5. Ковтун И.И.. О нахождении моментов решений систем дифференциальных уравнений со случайными возмущениями /И.И..Ковтун // Сб. науч. тр-в «Математика. Компьютер. Образование». Москва-Ижевск: Dynamics, 2007. – Вып. 14, ч.2. – С. 12–15.

6. Новиков Е.А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности/ Е.А.Новиков// Журнал экспериментальной и прикладной физики. – 1964. – Т. 47, № 5. – С. 1919–1926.

7. Furutsu K. Stftistical theory of wafe propagation in a Random Medium and Irradianse Distribution Function / K.Furutsu //JOSA, 1972. – 62. – 240 p.

Предложен метод определения первых моментов решения дифференициального уравнения второго порядка и системи дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициенты которых возмущены случайными процессами. Исследована устойчивость решения.

Дифференциальное уравнение, первые моменты решения, случайный процесс, устойчивость решения.

We propose the method of finding the first moments of the solution for the second order of the differential equations and a system of a first order of the differential equations with random perturbations. We get the conditions under which the solution is stable.

Differential equation, first moments, random perturbations, stable the solution.

УДК 517.958

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ В'ЯЗКОПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА, ЯКЕ ХАРАКТЕРИЗУЄТЬСЯ МОДЕЛЛЮ РАБОТНОВА

О.М. Нещадим, кандидат фізико-математичних наук
Ю.Б. Гнучій, доктор фізико-математичних наук

Для випадку плоских деформацій знайдено наближений фундаментальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння динаміки в'язкопружного середовища, властивості якого узгоджуються з реологічною моделлю Работнова. Компоненти фундаментального розв'язку виражено через дві скалярні функції, розкладено на потенціальну і соленоїдну складові.

В'язкопружність, інтегро-диференціальне рівняння, ядро релаксації, модель Работнова, фундаментальний розв'язок.

При розв'язуванні прикладних задач математичної фізики числовими методами успішно застосовується метод граничних інтегральних рівнянь [2, 3, 7]. Реалізація цього методу для конкретної задачі вимагає вирішення деяких проблем.

По-перше, необхідно знайти (точно або наближено) фундаментальний розв'язок відповідного диференціального чи інтегро-диференціального рівняння задачі.

По-друге, потрібно вивести спеціальні функціональні співвідношення, які узагальнюють відомі із класичної теорії формули Гріна, що зв'язують інтеграли по досліджуваній області з потенціалами по межі цієї області.

По-третє, дослідити граничні властивості одержаних потенціалів.

Якщо перераховані математичні проблеми подолані, то розв'язок крайової задачі шукається у вигляді інтегралів , залежних від параметрів – незалежних координат точки цієї області. Такі інтеграли беруться по межі області, а підінтегральна функція є добутком фундаментального розв'язку на невизначені функції точок межі (щільності потенціалів). Підстановка таких інтегральних представлень шуканих розв'язків у граничні умови приводить до граничних інтегральних рівнянь відносно невідомих щільностей потенціалів. На практиці згадані щільності визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, якою наближено замінюють одержані інтегральні рівняння.

У цій роботі розвивається метод потенціалів для розв'язування крайових задач лінійної в'язкопружності.

Мета досліджень – отримання фундаментального розв'язку інтегро-диференціального рівняння плоского руху в'язкопружного матеріалу, властивості якого узгоджуються із реологічною моделлю Ю.М. Работнова.

Матеріали та методика досліджень. Використовувались теоретичні положення математичної фізики і методи теорії потенціалів. Розглядались в'язкопружні матеріали, реологічні властивості яких характеризуються моделлю Работнова.

Результати досліджень. Розглянемо матеріальне тіло, що складається з ізотропного в'язкопружного матеріалу із неперервною пам'яттю. Вважаємо, що матеріал є нестаріючим, а пам'ять – затухаюча. Дослідимо випадок задач про плоскі деформації такого середовища.

Довільна точка M плоскої в'язкопружної області в момент часу $\tau > 0$ визначається радіус-вектором $\vec{x}(\tau) = \vec{e}^k x_k(\tau)$, тут $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$ – декартів базис. Загальне напруження за проміжок часу $0 < \tau < t$ в цій матеріальній частинці, спричинене її деформацією в момент часу τ і подальшою релаксацією напружень, визначається тензором напружень [5]:

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{x}(t),t) = \int_0^t \{ & E[kh(t-\tau) - \frac{2}{3}\mu q(t-\tau)] div\ \vec{v}(\vec{x}(\tau),\tau) + \\ & + 2\mu q(t-\tau) Def\ \vec{v}(\vec{x}(\tau),\tau)\} d\tau. \end{aligned} \quad (1)$$

де μ – миттєво-пружний модуль зсуву; $\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$ – миттєво-пружна стала Ламе; k – миттєвий модуль об'ємної деформації; E – одиничний тензор; $Def\ \vec{v}(\vec{x}(\tau),\tau) = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T\right)$ – тензор швидкості деформації; $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{x}(\tau),\tau)$ – вектор швидкості частинки M у момент часу τ; $\nabla = \vec{e}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ – оператор Гамільтона. Тут функції $q(t)$ і $h(t)$ характеризують реологічні властивості матеріалу і називаються ядрами зсувної та об'ємної релаксації відповідно; вони визначені при $t \geq 0$, є невід'ємними і монотонно спадними. Вважається [4], що більшість в'язкопружних матеріалів мають несуттєву об'ємну релаксацію. тобто $h(t) = 0$. В інженерній практиці приймається реологічна модель, запропонована Ю.М. Работновим [6]:

$$q(t) = \frac{ct^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{2}$$

де $c > 0,\ \alpha \in (0,\ 1)$ – параметри матеріалу; $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція.

Швидкості і зміщення частинок, що відбуваються в матеріальному тілі за період релаксації, а також похідні по координатах від зміщень до другого порядку включно вважаємо малими величинами (це можливо або у випадку малих швидкостей, або при швидких коливаннях із малою амплітудою). В початковий момент часу $t = 0$ тіло вважаємо вільним від напружень. Тому наближено можемо прийняти

$$\vec{v}(\vec{x},\tau) \approx \frac{\partial\vec{u}(\vec{x},\tau)}{\partial\tau}, \quad \frac{d\vec{v}(\vec{x},\tau)}{d\tau} \approx \frac{\partial^2\vec{u}(\vec{x},\tau)}{\partial\tau^2},$$

де $\vec{u}(\vec{x},\tau) = \vec{e}^k u_k$ – вектор зміщення.

Рівняння руху

$$div\Pi(\vec{x},t) + \rho(\vec{x},t)\vec{m}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)\frac{dv(\vec{x},t)}{dt}$$

цього в'язкопружного середовища набуває такого вигляду:

$$\mu\Delta\vec{u}(\vec{x},t) + (\lambda+\mu)graddiv\vec{u}(\vec{x},t) - \mu\int_0^t q(t-\tau)[\Delta\vec{u}(\vec{x},\tau) + \frac{1}{3}graddiv\vec{u}(\vec{x},\tau)]d\tau -$$

$$-\rho_0\frac{\partial^2\vec{u}(\vec{x},t)}{\partial t^2} + \vec{f}(\vec{x},t) = \vec{0}, \tag{3}$$

тут

$$\vec{f}(\vec{x},t) = \rho_0\vec{m}(\vec{x},t)[1 - div\vec{u}(\vec{x},t)]; \tag{4}$$

$$\rho(\vec{x},t) \approx \rho_0[1 - div\vec{u}(\vec{x},t)]; \tag{5}$$

$\vec{m}(\vec{x},t)$ – інтенсивність масових сил; $\rho_0 = const$ – густина речовини в початковий момент; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа. Величини $(x_1, x_2; t)$ – основні незалежні змінні (змінні Ейлера).

Вводячи інтегро-диференціальний оператор з пам'яттю

$$L(q) = \mu\Delta + (\lambda+\mu) graddiv\vec{u} - \mu \int\limits_0^t q(t-\tau)[\Delta + \frac{1}{3} graddiv\vec{u}]\langle\cdot\rangle d\tau,$$

рівняння (3) запишемо так:

$$L(q)\vec{u}(\vec{x},t) - \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{x},t)}{\partial t^2} + \vec{f}(\vec{x},t) = \vec{0}\,. \qquad (6)$$

Частинний розв'язок рівняння (6), який задовольняє умовам

$$u(\vec{x},0)=0, \quad \frac{\partial u(\vec{x},0)}{\partial t}=0, \quad \lim_{|x|\to\infty} u(\vec{x},t)=0\,,$$

подається у вигляді

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \sum_{j=1}^{2} \vec{e}^{\,j} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{jk}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau) f_k(\vec{y},\tau) dy_1 dy_2\,. \qquad (7)$$

Сукупність ядер $\left\| u_{jk}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau) \right\|$, $(j,k=1,2)$ називається фундаментальним розв'язком (матрицею Гріна) рівняння (6). Компоненти u_{jk} задовольняють двом векторним рівнянням:

$$L(q)\vec{v}^{(j)}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau) - \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{v}^{(j)}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau) + e^j \delta(t-\tau)\delta(\vec{x}-\vec{y}) = 0, \; j=1,2\,, \qquad (8)$$

де позначено: $\delta(t-\tau)$ і $\delta(\vec{x}-\vec{y})$ – відповідно одновимірна і двовимірна функції Дірака;

$\vec{v}^{(1)}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau) = \vec{e}^{\,k} u_{1k}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)$, $\vec{v}^{(2)}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau) = \vec{e}^{\,k} u_{2k}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)$.

Оскільки шукані ядра залежать від різниць $\vec{x}-\vec{y}$ і $t-\tau$, то достатньо їх знайти при $\vec{y}=\vec{0},\ t=0$.

Застосуємо до кожного із рівнянь (8) перетворення Лапласа по змінній t:

$$\int\limits_0^{+\infty} v(\vec{x},t)e^{-pt}dt = V(\vec{x},p)$$

і перетворення Фур'є по одній із координат; прийдемо до двох систем звичайних диференціальних рівнянь. Кожна з цих систем нескладно зводиться до диференціального рівняння четвертого порядку і визначається його частинний розв'язок, регулярний в нескінченності. Внаслідок оберненого перетворення Фур'є знаходимо дві функції

$$\begin{aligned} 2\pi\Omega(\vec{r},p) &= \frac{1}{\rho_0 p^2}\left(\ln r + K_0(pz)\right), \\ 2\pi\Phi(\vec{r},p) &= \frac{1}{\rho_0 p^2}\left(\ln r + K_0(p\zeta)\right), \end{aligned} \qquad (9)$$

які дають можливість Лаплас-образи фундаментального розв'язку розкласти на потенціальну та соленоїдну складові:

$$\vec{V}^{(1)}(\vec{x},p)=grad_x\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+rot_x\left(\vec{e}^{\,3}\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right),$$
$$\vec{V}^{(2)}(\vec{x},p)=grad_x\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}-rot_x\left(\vec{e}^{\,3}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right), \qquad (10)$$

де $K_0(x)$ – функція Макдональда; $r=|\vec{x}|$; $z=r\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\mu(1-Q)}}$; $\zeta=r\sqrt{\dfrac{3\rho_0}{3k+4\mu(1-Q)}}$; $Q(p)=\int\limits_0^{+\infty}q(t)e^{-pt}dt$.

Щоб визначити векторні функції $\vec{v}^{(1)}(\vec{x},t)$ і $\vec{v}^{(2)}(\vec{x},t)$, а отже, компоненти фундаментального розв'язку, необхідно знайти обернене перетворення Лапласа виразів (10). Це вимагає відшукання оригіналів $\omega(\vec{x},t)$ і $\varphi(\vec{x},t)$ відповідних зображень $\Omega(\vec{x},p)$ і $\Phi(\vec{x},p)$. Оскільки, як і у хвильових задачах, зображення не допускають точного оберненого перетворення Лапласа [8], то обмежимось знаходженням наближених виразів для функцій $\omega(\vec{x},t)$ і $\varphi(\vec{x},t)$. Для цього врахуємо, що зображення $Q(p)$ ядра релаксації (2) має вигляд:

$$Q(p)=\frac{c}{p^{\alpha}}$$

і параметр c можемо вважати малим.

Розгорнемо функції Макдональда, які входять до виразів (9), у ряд

Тейлора за степенями параметра c. Нехтуючи степенями, вищими за c^2, одержимо наближені співвідношення:

$$K_0(pz)\approx K_0(pz_0)-\frac{cz_0p^{1-\alpha}}{2}K_1(pz_0)+\frac{(cz_0)^2}{8}p^{2(1-\alpha)}\left[K_0(pz_0)-\frac{2}{pz_0}K_1(pz_0)\right];$$

$$K_0(p\zeta)\approx K_0(p\zeta_0)-\frac{2\mu c\zeta_0p^{1-\alpha}}{3k+4\mu}K_1(p\zeta_0)+$$
$$+2\zeta_0\left(\frac{\mu c}{3k+4\mu}\right)^2p^{1-2\alpha}\left[p\zeta_0K_0(p\zeta_0)-2K_1(p\zeta_0)\right],$$

тут $z_0=r\sqrt{\dfrac{\rho_0}{\mu}}$, $\zeta_0=r\sqrt{\dfrac{3\rho_0}{3k+4\mu}}$.

Враховуючи одержані вирази функцій $K_0(pz)$ і $K_0(p\zeta)$, за таблицями [1] знаходимо оригінали функцій (9):

$$2\pi\omega(\vec{x},t)\approx\frac{1}{\rho_0}\left\{t\ln r+\int\limits_{z_0}^{t}arch\frac{\tau}{z_0}d\tau-\frac{c}{2\Gamma(\alpha)}\int\limits_{z_0}^{t}\frac{\sqrt{\tau^2-z_0^2}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau+\right.$$

$$+\frac{c^2}{8\Gamma(2\alpha)}\int_{z_0}^{t}\left[\frac{z_0^2}{\sqrt{\tau^2-z_0^2}}-2\sqrt{\tau^2-z_0^2}\right](t-\tau)^{2\alpha-1}d\tau\Bigg\};$$

$$2\pi\varphi(\vec{x},t)\approx\frac{1}{\rho_0}\Bigg\{t\ln r+\int_{\zeta_0}^{t}arch\frac{\tau}{\zeta_0}d\tau-\frac{2\mu c}{(3k+4\mu)\Gamma(\alpha)}\int_{\zeta_0}^{t}\frac{\sqrt{\tau^2-\zeta_0^2}}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau+$$

$$+\frac{2}{\Gamma(2\alpha)}\left(\frac{\mu c}{3k+4\mu}\right)^2\int_{\zeta_0}^{t}\left[\frac{\zeta_0^2}{\sqrt{\tau^2-\zeta_0^2}}-2\sqrt{\tau^2-\zeta_0^2}\right](t-\tau)^{2\alpha-1}d\tau\Bigg\}.$$

Отже, через одержані функції $\omega(\vec{x},t)$ і $\varphi(\vec{x},t)$ компоненти фундаментального розв’язку рівняння (3) виражаються так:

$$v^{(1)}(\vec{x},t)=grad_x\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+rot_x\left(\vec{e}^{\,3}\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\right),$$

$$\vec{V}^{(2)}(\vec{x},p)=grad_x\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}-rot_x\left(\vec{e}^{\,3}\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right).$$

Висновки

Для випадку плоских деформацій знайдено наближений фундаментальний розв’язок інтегро-диференціального рівняння динаміки в’язкопружного середовища, властивості якого узгоджуються із реологічною моделлю Ю.М. Работнова. Компоненти фундаментального розв’язку виражено через дві скалярні функції, розкладено на потенціальну і соленоїдну складові.

Список літератури

1. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. Т.1/ Бейтмен Г., Эрдейи А. - М.: Наука, 1969. – 344 с.

2. Белоносов С.М. Применение интегральных представлений к решениям задач теплопроводности и динамики в’язкой жидкости/ Белоносов С.М., Овсиенко В.Г., Карачун В.Я. – К.: Выща шк., 1989. – 163 с.

3. Бенерджи П. Методы граничних элементов в прикладних науках/ Бенерджи П., Баттерфилд Р. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

4. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе/ Москвитин В.В. – М.: Наука, 1972. – 328 с.

5. Нещадим О.М. Граничні інтегральні рівняння для задач про плоскі деформації в’язкопружного циліндричного тіла. / Нещадим О.М., Гнучій Ю.Б. //Науковий вісник НУБіП України. Серія “Техніка та енергетика АПК”. – 2011. – Вип.166, ч. 3. – С.235–242.

6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел/ Работнов Ю.Н. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

7. Теллес Д. Применение метода граничних элементов для решения неупругих задач/ Теллес Д. – М.: Стройиздат, 1987. – 159 с.

8. Филиппов И.Г. Волновые процессы в линейных вязкоупругихсредах/ Филиппов И.Г., Егорычев О.А. – М.: Машиностроение, 1983. – 269 с.

Для случая плоских деформаций найдено приближенное фундаментальное решение интегро-дифференциального уравнения динамики вязкоупругой среды, свойства которой согласуются с реологической моделью Работнова. Компоненты фундаментального решения выражено через две скалярные функции, разложено на потенциальную и соленоидальную составляющие.
Вязкоупругость, интегро-дифференциальное уравнение, ядро релаксации, модель Работнова, фундаментальное решение.

For the case of plane deformations the close fundamental decision of integro-differential equation of dynamics of viscoelasticity medium properties of what comport with the rheological model of Rabotnov is found. Components of fundamental solution are expressed through two scalar functions, it is decomposed on potential and solenoidal constituents.
Viscoelasticity, integro-differential equation, kernel of relaxation, model of Rabotnov, fundamental solution.