

It is investigated trajectory-kinematic characteristics of movement of part of mineral fertilizers on rough internal surface of inclined elliptic cylinder.

Movement of particles, surface roughness, elliptic cylinder, trajectory, speed.

УДК 62-187.3

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПІДЙОМУ ВАНТАЖУ ПРОЛЬОТНИМ КРАНОМ

***В.С. Ловейкін, доктор технічних наук
В.А. Голдун, магістр***

В статті побудовано динамічну модель механізму підйому вантажу, яка представлена у вигляді зосереджених мас, що з'єднані пружними зв'язками. На основі динамічної моделі виконано математичне моделювання динаміки підйому вантажу, яке виконується прольотним краном. Математична модель є багатоступенною, в якій кожен етап описується системою диференціальних рівнянь. Крім того, записані початкові та кінцеві умови руху окремих мас. Проведено аналіз математичної моделі, який показав те, що етап натягу канату та підйому вантажу не дозволяє забезпечити задані наперед кінцеві умови руху приведених мас моста та вантажу.

Підйом вантажу, математичне моделювання, диференціальні рівняння, задача Коші.

Постановка проблеми. Під час виконання навантажувально-розвантажувальних робіт на транспортні засоби досить часто використовуються вантажопідйомні крани. Вони дозволяють підвищити ефективність транспортних потоків на підприємстві.

При взаємодії вантажу та транспортного засобу в підвісці останнього виникають значні навантаження. Вони можуть призвести до поломки елементів транспортного засобу. Крім того, елементи крана (вантажний канат, крановий міст, передачі у механізмі підйому вантажу) також зазнають впливу динамічних навантажень. Тому виникає необхідність встановити причини виникнення динамічних навантажень у транспортному засобі та крані для того, щоб зменшити їх дію. Побудова та аналіз математичної моделі системи „механізм підйому вантажу – вантаж – транспортний засіб” дозволяє

© В.С. Ловейкін, В.А. Голдун, 2014

провести оптимізацію режимів руху елементів системи для того, щоб підвищити ефективність її експлуатації.

Аналіз останніх досліджень. Перші дослідження динаміки підйому вантажу прольотних кранів пов'язані з іменами М.С. Комарова [1], С.А. Казака [2], М.М. Гохберга [3].

У роботі [1] побудована тримасова динамічна модель підйому вантажу та виведені рівняння руху окремих мас (приводу, моста та вантажу). Дисипативні властивості механізму підйому вантажу, а також динамічна деформація металоконструкції не враховуються. Приведені у праці [1] результати можна використовувати для першого наближення динамічних розрахунків механізму підйому вантажу. С.А. Казаком у роботі [2] проведені детальні розрахунки механізму підйому вантажу, у який показано вплив змінного зусилля приводу на величину динамічних навантажень, а також залежність натягу канату від його довжини. Детально розглянуто метод розрахунку навантажень при перемиканні в схемі електрообладнання крана.

М.М. Гохберг у роботі [3] дослідив випадки найбільшого навантаження механізму підйому вантажу при підйомі вантажу з основи та при гальмуванні вантажу, який опускається. Для обох випадків швидкість канатного барабану є постійною величиною. Дослідження проведені для двомасової динамічної моделі.

Серед закордонних робіт по динаміці вантажопідйомних машин необхідно виділити книгу М. Шеффлера, Х. Дресінга та Ф. Курта [4]. У дослідженні автори використали одно- та двомасову динамічні моделі механізму підйому вантажу. Динамічні процеси, які описані при підйомі та опусканні вантажу, дослідники розділяють на декілька етапів. Кінцевими результатами досліджень є аналітичні вирази для коефіцієнтів динамічності зусиль у канаті та мості прольотного крана.

В.Ф. Гайдамака дослідив динамічні зусилля, які виникають у механізмі підйому вантажу при умові, що швидкість зменшення довжини канатів поліспасти в довідливій стадії руху вантажу є постійною, а в післявідливій – постійним є приводне зусилля [5]. Механізм підйому представлений у вигляді двомасової динамічної моделі.

М.А. Лобов у роботі [6] розробив методику розрахунку максимальних навантажень кранів в режимі підйому вантажу з основи. У цій роботі автор аналізує причини неспівпадіння теоретичних та експериментальних результатів досліджень механізму підйому вантажу.

Динаміка руху механізму підйому досліджена одеською школою ПТМ на чолі з професором Р.П. Герасимяком [7, 8]. Результати цих досліджень свідчать про те, що найбільший вплив на характер

пружних коливань тримасової електромеханічної системи, якою представлено механізм підйому вантажу при його підйомі „з підхватом”, мають жорсткість механічної характеристики електроприводу, жорсткість гнучкого канату й кут нахилу стріли крана. Л.Я. Будіков [9] провів дослідження динаміки руху механізму підйому вантажу мостового крана. У роботі [9] побудована динамічна тримасова модель механізму підйому вантажу та відповідна їй математична модель. Чисельне інтегрування систем диференціальних рівнянь, які відповідають обом динамічним моделям механізму підйому вантажу, показують збіг і тому у подальшому автор використовує лише модель із зосередженими параметрами. Необхідно сказати те, що в усіх наведених роботах не враховується або в недостатній мірі враховується вплив основи, з якої виконується підйом вантажу.

Мета досліджень є аналіз математичної моделі підйому вантажу, який виконує прольотний кран.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання: побудувати динамічну модель руху системи; на основі динамічної моделі знайти математичну модель; виконати аналіз математичної моделі.

Результати досліджень. Для проведення досліджень використаємо динамічну модель, яка показана на рис. 1.

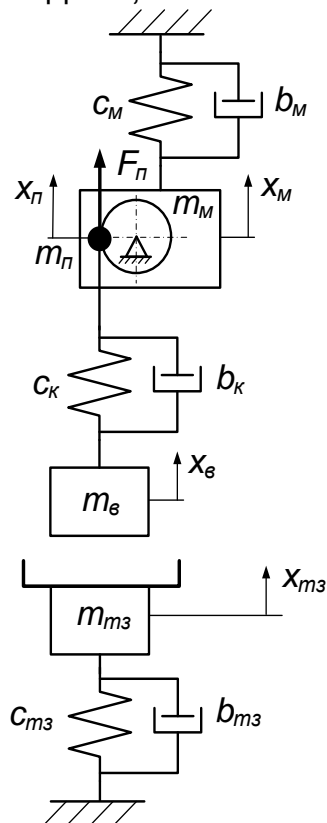


Рис. 1. Динамічна модель системи „механізм підйому вантажу – вантаж – транспортний засіб”.

На рис. 1 наведені такі позначення: $c_{mз}$, c_k , c_M – приведені коефіцієнти жорсткості транспортного засобу, вантажних канатів та моста крана відповідно; $b_{mз}$, b_k , b_M – приведені коефіцієнти дисипації транспортного засобу, вантажних канатів та моста крана відповідно; $m_{mз}$, $m_в$, $m_п$, m_M – приведені маси транспортного засобу, вантажу, приводу механізму підйому вантажу та кранового моста відповідно; $x_{mз}$, $x_в$, $x_п$, x_M – узагальнені координати відповідних мас; $F_п$ – приведене до барабана зусилля приводу механізму підйому вантажу. Для побудови повної динамічної картини процесів піднімання вантажу необхідно розділити ці процеси на певні етапи. Дамо детальний опис цих етапів.

Перший етап підйому вантажу триває поки йде вибірка слабину каната. При цьому рухається лише приведена маса приводу. Цей етап характеризується нульовими початковими умовами:

$$x_n(0) = \dot{x}_n(0) = 0. \quad (1)$$

Математична модель першого етапу записується таким чином:

$$m_n \ddot{x}_n = F_n. \quad (2)$$

На другому етапі відбувається натяг каната до зусилля ваги вантажу. На цьому етапі рухаються всі маси динамічної системи. Однак, оскільки вантаж знаходиться на транспортному засобі, то приведені маси вантажу та транспортного засобу рухаються синхронно, тобто для цього етапу справедливе рівняння:

$$x_в = x_{mз}. \quad (3)$$

Початковими умовами для руху приведених мас вантажу та моста є такі:

$$\begin{cases} x_в(t_1) = -\frac{(m_в + m_{mз})g}{c_{mз}}; \\ \dot{x}_в(t_1) = 0; \\ x_M(t_1) = -\frac{m_M g}{c_M}; \\ \dot{x}_M(t_1) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де t_1 – тривалість першого етапу.

Кінцеві умови руху приведеної маси приводу для першого етапу є початковими умовами для другого етапу.

Математична модель руху мас на другому етапі складається із трьох диференціальних рівнянь (5). Третє рівняння системи (5) відображає той факт, що на вантаж діє пружно-в'язке зусилля підвіски транспортного засобу. У системі рівнянь (5) присутні початкові умови руху вантажу, приводу та моста. Дійсно, на цьому етапі зусилля натягу каната починає зростати від нульового

значення. Для забезпечення цієї умови узагальнені координати вантажу, приводу та моста віднімаються від їх початкових умов (4).

$$\begin{cases} m_n \ddot{x}_n + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_e) + c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - (x_e - x_e(t_1))) = F_n; \\ m_m (\ddot{x}_m + g) + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_e) + b_m \dot{x}_m + c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - (x_e - x_e(t_1))) + c_m x_m = 0; \\ (m_e + m_{m3}) (\ddot{x}_e + g) - b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_e) - c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - (x_e - x_e(t_1))) + b_{m3} \dot{x}_e + c_{m3} x_e = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Кінцем другого етапу вважається момент відриву вантажу від поверхні транспортного засобу.

На третьому етапі вантаж відривається від поверхні транспортного засобу. Початковими умовами для цього етапу є кінцеві умови для другого етапу. Рівняння руху, які описують рух всіх чотирьох елементів динамічної системи, мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} m_n \ddot{x}_n + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_e) + c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - (x_e - x_e(t_1))) = F_n; \\ m_m (\ddot{x}_m + g) + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_e) + b_m \dot{x}_m + c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - (x_e - x_e(t_1))) + c_m x_m = 0; \\ m_e (\ddot{x}_e + g) - b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_e) - c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - (x_e - x_e(t_1))) = 0; \\ m_{m3} (\ddot{x}_{m3} + g) + b_{m3} \dot{x}_{m3} + c_{m3} x_{m3} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

На четвертому етапі руху динамічної системи „механізм підйому вантажу – вантаж – транспортний засіб” відбувається вимикання електродвигуна і накладання гальм. При цьому вважаємо, що зусилля F_n змінюється стрибкоподібно, оскільки тривалість накладання гальм з електромагнітами змінного струму не перевищує 0,015-0,02 секунди [10]. Гальмівний момент, що пропорційний гальмівному зусиллю, для четвертого етапу визначається за формулою [8]:

$$M_z = K_3 M_e \eta_{мех}, \quad (7)$$

де K_3 – коефіцієнт запасу, який прийемо рівним $K_3=2$ (для середнього режиму роботи 5М механізму підйому вантажу); M_e – статичний момент при опусканні номінального вантажу (20 тон) приведений до вала двигуна ($M_e=834$ Нм); $\eta_{мех}$ – номінальний ККД механізму ($\eta_{мех}=0,9$).

Для того, щоб знайти оптимальне керування динамічною системою „механізм підйому вантажу – вантаж – транспортний засіб” необхідно проаналізувати рівняння руху окремих мас. Кожному

етапу руху системи відповідає визначена вище система диференціальних рівнянь. Для режиму підйому вантажу перший етап описується диференціальним рівнянням (2). Це диференціальне рівняння дозволяє виконувати постановку оптимізаційних задач та знаходити їх розв'язки, оскільки лише функція приводного зусилля у правій частині рівняння (2) визначає рух двигуна. Тривалість другого етапу незначна, тому можна вважати, що рух мас відбувається без дії на них дисипативних сил.

Отже, прийнемо, що $b_K=b_M=b_{m3}=0$. Крім того, введемо позначення зусилля розтягу канату:

$$F_e = c_e((x_r - x_r(t_1)) + (x_i - x_i(t_1)) - (x_a - x_a(t_1))).$$

Враховуючи все це можемо записати рівняння руху мас для другого етапу:

$$\begin{cases} m_r \ddot{x}_r + F_e = F_r; \\ m_i (\ddot{x}_i + g) + F_e + c_i x_i = 0; \\ (m_a + m_{\delta\zeta})(\ddot{x}_a + g) - F_e + c_{\delta\zeta} x_a = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Проаналізуємо систему рівнянь (8). Друге та третє рівняння із системи (8) можемо замінити одним:

$$\ddot{x}_i + \Omega_i^2 x_i = -\frac{(m_a + m_{\delta\zeta})}{m_i}(\ddot{x}_a + g) - \frac{c_{\delta\zeta}}{m_i} x_a - g, \quad (9)$$

де Ω_M – частота власних коливань моста крана ($\Omega_i = \sqrt{\frac{\tilde{n}_i}{m_i}}$).

Нехай, згідно постановки оптимізаційної задачі, необхідно перемістити вантаж із одного положення, яке описується початковими умовами (4), у інше, яке описується кінцевими умовами:

$$\begin{cases} x_a(t_2) = -\frac{m_a g}{\tilde{n}_{\delta\zeta}}; \\ \dot{x}_a(t_2) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Приведені вище умови (10) відповідають закінченню другого етапу без коливань вантажу. Припустимо, що знайдено таку функцію руху вантажу, яка забезпечує вказані початкові та кінцеві умови та доставляє екстремум деякому оптимізаційному критерію. Надалі можемо знайти функцію прискорення вантажу \ddot{x}_a при $t \in [t_1; t_2]$. Знаючи функції \ddot{x}_a та x_a неважко знайти праву частину рівняння (9), яка виступає „зовнішнім” збуренням для коливань приведеної маси кранового моста. Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (9) необхідно шукати у вигляді суми [11]:

$$x_i = \tilde{\sigma}_i^* + \tilde{\sigma}_i^{**}, \quad (11)$$

де \tilde{o}_i^* – загальний розв’язок однорідного рівняння $\ddot{x}_i + \Omega_i^2 x_i$, яке описує вільні коливання приведеної маси кранового моста; \tilde{o}_i^{**} – частковий розв’язок неоднорідного рівняння (9), який характеризує рух приведеної маси моста під дією збурюючої сили без вільних коливань. Частковий розв’язок неоднорідного рівняння \tilde{o}_i^{**} визначається правою частиною диференціального рівняння (9). У свою чергу загальний розв’язок однорідного рівняння \tilde{o}_i^* визначається початковими умовами руху моста та його параметрами, які безпосередньо впливають на частоту власних коливань Ω_m . Кінцевими умовами руху моста для другого етапу руху є такі:

$$\begin{cases} x_i(t_3) = -\frac{(m_a + m_i)g}{\tilde{n}_i}; \\ \dot{x}_i(t_2) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Умови (12) означають, що крановий міст не коливається у кінці другого етапу руху; він навантажений силами власної ваги та ваги вантажу. Однак, забезпечити умови (12) наперед неможливо, оскільки доданок \tilde{o}_i^* у рівнянні (11) є „некерованим”. Проводячи аналогічні твердження для третього та четвертого етапів приходимо до висновку, що у повній мірі керувати рухом приведених мас кранового моста та вантажу на цих етапах неможливо.

Висновок. На основі аналізу побудованої математичної моделі руху системи „механізм підйому вантажу – вантаж – транспортний засіб” встановлено, що забезпечити наперед задані кінцеві умови руху вантажу та кранового моста неможливо. Математично неможливість керувати кінцевим станом приведеної маси кранового моста проявляється у необхідності розв’язання задачі Коші, а не крайової задачі. При постановці задач оптимального керування даною динамічною системою необхідно враховувати цю її особливість.

Список літератури

1. Комаров М.С. Динамика грузоподъемных машин / М.С. Комаров. – М.: Машиностроение, 1969. – 206 с.
2. Казак С.А. Динамика мостовых кранов / С.А. Казак. – М.: Машиностроение, 1968. – 331 с.
3. Гохберг М.М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин / М.М. Гохберг. – М.: Машиностроение, 1969. – 520 с.
4. Грузоподъемные краны / Шеффлер М., Дресиг Х., Курт Ф. ; [пер. с немецкого М.М. Рунов, В.Н. Федосеев] ; под ред. М.П. Александрова. – М.: Машиностроение, 1981. – Кн. 2. – 287 с.

5. Гайдамака В.Ф. Грузоподъемные машины / В.Ф. Гайдамака. – К.: Выща школа, 1989. – 328 с.
6. Лобов Н.А. Динамика грузоподъемных кранов / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, 1987. – 160 с.
7. Герасимьяк Р.П. Синтез коррекции трехмассовой электромеханической системы подъемных механизмов / Р.П. Герасимьяк, Е.С. Пуртова // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 2000. – № 1 (6). – С. 65–72.
8. Герасимьяк Р.П. Анализ и синтез крановых электромеханических систем / Р.П. Герасимьяк, В.А. Лещёв. – Одесса: СМЛ, 2008. – 192 с.
9. Будиков Л.Я. Многопараметрический анализ динамики грузоподъемных кранов мостового типа / Л.Я. Будиков. – Луганск: Изд-во ВУГУ, 1997. – 210 с.
10. Александров М.П. Тормозные устройства: Справочник / М.П. Александров, А.Г. Лысяков, В.Н. Фадеев. – М.: Машиностроение, 1985. – 312 с.
11. Корн Г. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

В статье построена динамическая модель механизма подъема груза, которая представлена в виде сосредоточенных масс, которые соединены упругими связями. На основе динамической модели выполнено математическое моделирование динамики подъема груза, которое выполняется пролетным краном. Математическая модель многоэтапная, в которой каждый этап описывается системой дифференциальных уравнений. Кроме того, записанные начальные и конечные условия движения отдельных масс. Проведен анализ математической модели, который показал то, что этап натяжения каната и подъема груза не позволяет обеспечить заданные наперед конечные условия движения приведенных масс моста и груза.

Подъем груза, математическое моделирование, дифференциальные уравнения, задача Коши.

In paper have been carry out dynamic model of mechanism for cargo lifting. It is presented as few discrete masses, which connected with elastic constrains. On basis of dynamic model have been carry out simulation of lifting cargo dynamic. The mathematical model is multi-stage, in which each step is described by system of differential equations. In addition, initial and final conditions of masses movement are showed. Analisis of mathematical model have been cary out. The analysis of mathematical model, which showed that cable tension stage and lifting does not allow terminal conditions specified in advance motion of reduced masses crane bridge and load.

Cargo lifting, simulation, differential equations, Koshy problem.