TOPOLOGICAL EQUIVALENCE OF FUNCTIONS TWO VARIABLES

T. G. Krivorot

Abstract. *Many processes that arise in the natural sciences are described by smooth and continuous functions. When creating a classification of continuous functions, many difficulties arise, since the behavior of the function in the neighborhood of the critical point can be complex and not analogous to the smooth case. The classification and investigation of the conditions for the topological equivalence of functions of two variables on manifolds is an important direction of research in topology.*

The questions of topological equivalence of continuous functions of two variables are considered in the article. Their topological classification was carried out in the case of smooth functions on manifolds. It is proved that in a neighborhood of an isolated critical point the function is topologically equivalent to Rezn, and in the neighborhood of a local minimum (maximum) it is equivalent to x2+y2. We illustrate the class of continuous functions having only a singularity of saddle type, we consider the case of functions with an isolated local minimum (maximum). The case of continuous functions with a point of an isolated local minimum (maximum) inside the domain is characterized, features that can arise and become an obstacle in the topological classification of functions of two variables are determined.

Keywords: topological equivalence, function, manifold, isolated local extremum

УДК 517.927.2

РОЗВ’ЯЗКИ СЛАБОЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТА УМОВИ ЇХ ВИНИКНЕННЯ (ВИПАДОК $k = -1$)

Р. Ф. ОВЧАР, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: rfovchar@gmail.com

Анотація. *Запропоновано схему знаходження коефіцієнтних умові існування розв’язків слабозбурених крайових задач для систем з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. На основі методу типу Вішіка-Люстерніка отримано коефіцієнтні умови існування розв’язків крайової задачі при довільних неоднорідностях* $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$. *Для отримання цих умов будується* $(d \times r)$ *–вимірна матриця.*

© Р. Ф. Овчар, 2017

Використано ефективні методи теорії збурень, асимптотичні методи нелінійної механіки, розроблені в працях Ю. О. Митропольського, М. М. Крилова, М. М. Боголюбова та А. М. Самойленка, апарат узагальнених операторів Гріна лінійних напіводнорідних крайових задач.

Цінність цієї теми зумовлена, перш за все, важливістю практичного застосування теорії крайових задач у теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії управління, ряді геофізичних задач. З іншого боку, отримані в статті нові результати суттєво доповнюють дослідження по теорії нелінійних коливань для слабозбурених крайових задач.

Стаття має теоретичний характер, узагальнює і поглиблює раніш відомі результати з лінійних і слабонелінійних періодичних крайових задач на загальний випадок, коли крайові умови задаються слабонелінійним векторним функціоналом, а кількість крайових умов не збігається з порядком диференціальної системи.

Ключові слова: слабозбурена лінійна неоднорідна крайова задача, однорідна крайова задача з імпульсною дією, ортопроектор, ряд, псевдообернена матриця, узагальнений оператор Гріна

Актуальність. У даній статті розглянуто найбільш загальні, маловивчені, недовизначені та перевизначені крайові задачі з імпульсною дією, у яких крайові умови задаються лінійним або слабонелінійним векторним функціоналом, число m компонент якого, у загальному випадку, не збігається з порядком n диференціальної системи.

Розглянемо слабозбурену лінійну неоднорідну крайову задачу з імпульсною дією виду

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + \varepsilon A_1(t)z + f(t), & t \neq \tau_i, \\ \Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z = a_i + \varepsilon A_{1i} z(\tau_i - 0), \\ lz = \alpha + \varepsilon l_1 z. \end{cases} \tag{1}$$

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Припустимо, що у породжуючої крайової задачі, яка отримується із (1) при $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + f(t), & t \neq \tau_i, \\ \Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z = a_i, \\ lz - \alpha. \end{cases} \tag{2}$$

не існує розв’язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Це означає, що має місце критичний випадок $(rank\, Q = n_1 < n)$ і критерій розв’язності

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\bar{K}(\cdot,\tau_i)a_i\right\} = 0, d = m - n_1$$

крайової задачі (2) у силу довільності неоднорідних її членів не виконується.

Мета дослідження. Виникає наступне запитання: чи можна за допомогою лінійних збурень зробити крайову задачу (2) розв'язною і, якщо можна, то якими повинні бути збурені доданки $\varepsilon A_1(t), \varepsilon A_{1i}$ і εl_1, щоб крайова задача (1) мала розв'язок при будь-яких неоднорідностях $f(t)$, a_i і α.

Матеріали і методи дослідження. Відповісти на це запитання можна за допомогою $(d \times r)$ –вимірної матриці:

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left[l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau \right.$$
$$\left. - l\sum_{i=1}^{p} \bar{K}(\cdot,\tau_i+0)\times A_{1i}X_r(\tau_i-0)\right], \qquad (3)$$

побудованої по коефіцієнтах вихідної диференціальної крайової задачі. Застосування методу Вішика-Люстерніка дозволяє знайти ефективні коефіцієнтні умови виникнення розв'язків крайової задачі (2) у вигляді рядів Лорана по степенях малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені ε.

Результати дослідження та їх обговорення. Доведемо теорему, яка дає змогу розв'язати поставлену задачу. Перш ніж її сформулювати, введемо наступні позначення: $Q = lX(\cdot) - (m\times n)$ – вимірна матриця; $P_{Q^*} - (m\times m)$ – вимірна матриця (ортопроектор), що проектує $\mathbb{R}^m$ на $N(Q^*)$, $P_{Q^*}: \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$; Q^+ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до Q $(n\times m)$ – вимірна матриця; $P_{B_0} - (r\times r)$ –вимірна матриця (ортопроектор), що проектує $\mathbb{R}^r$ на нуль-простір $N(B_0)$ $(d\times r)$ –вимірної матриці B_0; $P_{B_0^*} - (d\times d)$ –вимірна матриця (ортопроектор), що проектує $\mathbb{R}^d$ на нуль-простір $N(B_0^*)$ $(r\times d)$ –вимірної матриці $B_0^* = B_0^T$, $P_{B_0^*}: \mathbb{R}^d \to N(B_0^*)$.

Теорема. Нехай крайова задача (1) задовольняє вказаним вище умовам так, що має місце критичний випадок $(rank\,Q = n_1 < n)$ і породжуюча крайова задача (2) при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ не має розв'язків. Тоді, якщо виконуються умови

$$P_{B_0} = 0, \qquad P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0, \qquad (4)$$

то для крайової задачі (1) існує при довільних $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ єдиний розв'язок, поданий у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$ ряду

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=k}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t), k = -1. \tag{5}$$

Доведення. Підставимо ряд (5) у крайову задачу (1) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Отже, при ε^{-1} для $z_{-1}(t)$ отримаємо однорідну крайову задачу:

$$\begin{cases} \dot{z}_{-1} = A(t)z_{-1}, \qquad t \neq \tau_i, \\ \Delta z_{-1}|_{t=\tau_i} = S_i z_{-1}(\tau_i) - 0, \\ l z_{-1} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Згідно з припущеннями теореми, однорідна крайова задача (6) має r —параметричне сімейство $r = n - n_1$ розв'язків $z_{-1}(t, c_{-1}) = X_r(t)c_{-1}$, де r —вимірний вектор-стовпець $c_{-1} \in \mathbb{R}^r$ констант буде визначений на наступному кроці з умови розв'язності задачі для $z_0(t)$.
При ε^0 приходимо для $z_0(t)$ до крайової задачі

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = A(t)z_0 + \varepsilon A_1(t)z_{-1} + f(t), \qquad t \neq \tau_i \qquad , \\ \Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z_0(\tau_i - 0) + A_{1i} z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i \\ l z_0 = l_1 z_{-1} + \alpha. \end{cases} \tag{7}$$

Критерій розв'язності задачі (7) має вигляд

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha + l_1 X_r(\cdot)c_{-1} - l\int_a^b K(\cdot,\tau)(f(\tau) + A_1(\tau)X_r(\tau)c_{-1})d\tau \right.$$
$$\left. - l\sum_{i=1}^{p} \overline{K}(\cdot,\tau_i)(a_i + A_{1i}X_r(\tau_i - 0)c_{-1})\right\} = 0$$

Звідси отримуємо алгебраїчну відносно $c_{-1} \in \mathbb{R}$ систему

$$B_0 c_{-1}$$
$$= -P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^{p} \overline{K}(\cdot,\tau_i)a_i\right\}, \tag{8}$$

де

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{ l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau \right.$$
$$\left. - l\sum_{i=1}^{p}\overline{K}(\cdot,\tau_i)\times A_{1i}X_r(\tau_i - 0)\right\} \quad (9)$$

Для розв’язання останньої при довільних $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ необхідно і достатньо виконати умову $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$. Якщо додатково вимагати $rank\, B_0 = r \Leftrightarrow P_{B_0} = 0$, то система (8) єдиним чином розв’язна відносно $c_{-1} \in \mathbb{R}^r$:

$$c_{-1} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^{p}\overline{K}(\cdot,\tau_i)a_i\right\}.$$

Крайова задача (7) при (4) має r —параметричне сімейство $(r = n - n_1)$ розв’язків

$$z_0(t,c_0) = X_r(t)c_0 + \bar{z}_0(t),$$

де $c_0 - r$ – вимірний вектор констант, який буде однозначно визначений на наступному кроці з умови розв’язності крайової задачі для $z_1(t)$; $\bar{z}_0(t)$ —частинний розв’язок задачі (7):

$$\bar{z}_0(t) = \left(G\begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-1}(\tau,c_{-1}) + f(\tau) \\ A_{1i}z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i \end{bmatrix}\right)(t) + X(t)Q^+\{\alpha + l_1 z_{-1}(\cdot.c_{-1})\},$$

де $\left(G\begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\right)(t) -$ узагальнений оператор Гріна крайової задачі (7), який має вигляд:

$$\left(G\begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-1}(\tau,c_{-1}) + f(\tau) \\ A_{1i}z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i \end{bmatrix}\right)(t) \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \left(\left[\int_a^b K(t,t) * d\tau - X(t)\times Q^+ l\int_a^b K(\cdot,\tau) * d\tau, \sum_{i=1}^{p}{}' \overline{K}(\cdot,\tau_i) * \right.\right.$$
$$\left. - X(t)Q^+ l\sum_{i=1}^{p}\overline{K}(\cdot,\tau_i) * \right]\begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-1}(\tau,c_{-1}) + f(\tau) \\ A_{1i}z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i \end{bmatrix}(t).$$

Продовжуючи цей процес, методом математичної індукції доводимо, що при (4) коефіцієнти $z_i(t)$ ряду (5) однозначно визначаються з відповідних крайових задач. Збіжність ряду (5) також доводиться традиційними способами мажорування.

Висновки і перспективи. На основі методу типу Вішика-Люстерніка отримані коефіцієнтні умови існування розв'язків крайової задачі (1) при довільних $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Для отримання цих умов будується $(d \times r)$–вимірна матриця (3). Отримані результати узагальнюють і поглиблюють раніш відомі результати з лінійних і слабонелінійних періодичних крайових задач на загальний випадок, дозволяють проводити ефективний аналіз таких задач, знаходити умови їх розв'язності та можуть бути застосовані у подальших дослідженнях крайових задач з імпульсною дією.

Список літератури

1. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием // А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К. : Вища шк.; 1987. – 287 с.
2. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач // А. А. Бойчук. – К. : Наук. думка; 1990. – 96 с.
3. R. Ovchar. Terms of solutions of weakly perturbed linear boundary problems (if *k* = – 2) // R. Ovchar – K. : Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: Техніка та енергетика АПК; 2014. – 177–182 с.

References

1. Samoylenko, A. M. (1987). Differencial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem [Differential equations with impulse action]. K.: High school – 287 s.
2. Boychuk, A. A. (1990). Konstruktivnyye metody analiza kraevyh zadach [Constructive methods for analyzing boundary value problems]. K., 96.
3. R. Ovchar (2014). Terms of solutions of weakly perturbed linear boundary problems (if *k* = – 2), K., 177–182.

РЕШЕНИЯ СЛАБОВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И УСЛОВИЯ ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ (СЛУЧАЙ $k = -1$)

Р. Ф. Овчар

Аннотация. *Предложена схема нахождения коэффициентных условий существования решений слабовозмущенных краевых задач для систем с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. На основании метода типа Вишика-Люстерника получены коэффициентные условия существования решений краевой задачи при произвольных неоднородностях* $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$. *Для получения этих условий строится* $(d \times r)$ *– мерная матрица.*

Использованы методы теории возмущений, асимптотические методы нелинейной механики, разработанные в трудах Ю. О.

Митропольского, М. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, и А. М. Самойленка, аппарат обобщенных операторов Грина линейных полуоднородных краевых задач.

Ценность этой темы обусловлена, прежде всего, важностью практического применения теории краевых задач в теории нелинейных колебаний, теории устойчивости движения, теории управления, ряде геофизических задач. С другой стороны, полученные в статье новые результаты существенно дополняют исследования по теории нелинейных колебаний для слабовозмущенных краевых задач.

Статья носит теоретический характер, обобщает и углубляет ранее известные результаты из линейных и слабонелинейных периодических краевых задач на общий случай, когда краевые условия задаются слабонелинейным векторным функционалом, а количество краевых условий не совпадает с порядком дифференциальной системы.

Ключевые слова: слабовозмущенная линейная неоднородная краевая задача, однородная краевая задача с импульсным воздействием, ортопроектор, ряд, псевдообратная матрица, обобщенный оператор Грина

SOLUTIONS OF WEAKLY PERTURBED BOUNDARY PROBLEMS AND TERMS OF OCCURRENCE OF SOLUTIONS (CASE $k = -1$)

R. F. Ovchar

Abstract. *The scheme of finding the coefficient condition for the existence of solutions of weakly perturbed boundary value problems for systems with impulse action at fixed moments of time is proposed. The coefficient conditions for the existence of solutions of the boundary value problem for arbitrary inhomogeneities* $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$. *are obtained on the basis of the Vishik-Lyusternik type method. To obtain these conditions, a* $(d \times r)-$*dimensional matrix is constructed.*

The article uses effective methods of perturbation theory, asymptotic methods of nonlinear mechanics, developed in the works of M. Krylov, M. Bogolyubov,

Y. Mitropolsky and A. Samoilenko, the apparatus of generalized Green operators of linear semiautonomous boundary value problems.

The sense of this topic is due, above all, to the importance of the practical application of the theory of boundary value problems in the theory of nonlinear oscillations, the theory of stability of motion, the theory of control, a number of geophysical problems. On the other hand, obtaining in the article new results substantially complement the studies on the theory of nonlinear oscillations for weakly perturbed boundary-value problems.

The article is theoretical, generalizes and deepens the previously known results from linear and weakly nonlinear periodic boundary value problems in the general case when boundary conditions are given by a weakly linear

vector functionality, and the number of boundary conditions does not coincide with the order of the differential system.

Keywords: weakly perverted linear inhomogeneous boundary value problem, homogeneous boundary value problem with impulse action, orthoprojector, row, pseudo-inverse matrix, generalized Green's operator

УДК 662.997

ТЕПЛОСНАБЖЕНИЕ АВТОНОМНЫХ ОБЪЕКТОВ СЕЛЬХОЗНАЗНАЧЕНИЯ В КОНЦЕПЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ЭНЕРГОСНАБЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИКРОСЕТЕЙ

В. В. ХАРЧЕНКО, доктор технических наук, профессор
ФГБНУ ФНАЦ ВИМ, г. Москва, Россия
E-mail: kharval@mail.ru

Аннотация. *Для развития и вовлечения в хозяйственный оборот новых территорий требуется организация бесперебойного надежного энергообеспечения хозяйствующих субъектов на этих территориях. Большие возможности для решения этой проблемы открывает использования технологии микросетей на основе возобновляемых источников энергии. Положения и принципы создания микросетей, равно как и многие технические решения, необходимые для формирования микросети разработаны. Однако применение этой технологии обеспечивает решение проблемы электроснабжения, в то время как задача теплоснабжения потребителей не решается.*

В статье рассмотрены возможные подходы для решения проблемы теплоснабжения в рамках использования для электроснабжения технологии микросетей на основе возобновляемых источников энергии.

Ключевые слова: микросеть, электроснабжение, теплоснабжение, возобновляемые источники энергии, тепловые насосы, теплонасосные системы

Актуальность. В последние годы начали интенсивно развиваться работы по вовлечению в хозяйственную деятельность новых территорий. Эти процедуры неизменно связаны с поиском эффективных способов организации энергоснабжения объектов хозяйствования на этих территориях**.** Широкие перспективы для решения проблемы энергообеспечения новых хозяйствующих субъектов на новых территориях открывает использование технологии микросетей, получившей интенсивное развитие в последние годы. Существует много вариантов микросетей. Они могут работать не только автономно, но и параллельно с электросетью.

© В. В. Харченко, 2017