

де:  $N$  – число положень симплекс-елемента (трикутника з вершинами на границі області в точках  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ );  $C_n(A)$  – середня зважена концентрація по трьох граничних значеннях, яка дорівнює:

$$C_n(A) = C_i \cdot \xi_i + C_j \cdot \xi_j + C_k \cdot \xi_k, \quad (9)$$

де  $\xi_i, \xi_j, \xi_k$  – вагові коефіцієнти, які визначаються як геометричні ймовірності:

$$\xi_i = \frac{mes\Omega_i}{mes\Omega},$$

де

$$mes\Omega = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad mes\Omega_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}.$$

Отже,  $mes\Omega$  – це площа трикутника (симплекс-елемента), а  $mes\Omega_i$  – це площа заштрихованого трикутника (рис. 3).

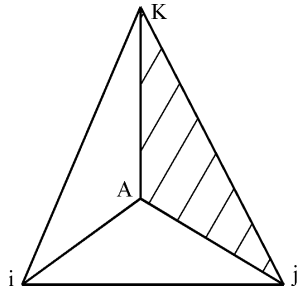


Рис. 3. Одне з положень симплекс-елемента

Під час обертання симплекс-елемента навколо точки А, його вершини збирають інформацію у граничних точках і передають її в точку А. Таким чином, можна знайти концентрацію в будь-якій внутрішній точці області, зокрема у вузлах нанесеної на неї сітки.

Для реалізації наведеної моделі необхідні дані хімічного складу проб води, відібраної із режимних пунктів (криниця, свердловина). При цьому дуже важливим є вибір критеріїв (гідрохімічних показників стосовно якості підземних вод у районі нафтових родовищ).

З урахуванням наведеного вище можна рекомендувати такий вибір параметрів, що характеризують техногенне навантаження на підземні води та ступінь їх придатності для господарсько-питного водопостачання:

- рівні підземних вод у спостережних свердловинах та криницях;
- періодичність замірів (квартал, півріччя, рік);
- гідрохімічні показники – періодичність аналізу проб із режимних пунктів (свердловин, криниць), водоймищ;
- макрокомпоненти:  $\text{HCO}_3^-$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{NO}_3^-$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ;
- мікроелементи:  $\text{Li}^+$ ,  $\text{Sr}^{2+}$ ;
- органічні речовини – нафтопродукти.

## Література

1. Бочевер Ф.М. Защита подземных вод от загрязнения / Ф.М. Бочевер, Н.М. Лапшин, А.Е. Орадковская. – М. : Изд-во "Недра", 1979. – 254 с.
2. ГОСТ 2874-82 "Вода питьевая. Гигиенические требования и контроль за качеством". [Электронный ресурс]. – Доступный с [http://www.znaytovar.ru/gost/2/GOST\\_287482\\_Voda\\_piteva-ya\\_Gigi.html](http://www.znaytovar.ru/gost/2/GOST_287482_Voda_piteva-ya_Gigi.html)
3. Гладкий А.В. Математичні моделі процесів забруднення навколишнього середовища / А.В. Гладкий, В.В. Скопечкий. – К. : Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2004. – 96 с.
4. Державні санітарні правила і норми. Вода питна. Гігієнічні вимоги до якості води централізованого господарсько-питного водопостачання. Міністерство охорони здоров'я України, 1996.
5. Положення про державний моніторинг навколишнього природного середовища. Затверджено Постановою КМ України від 20.07.96 р., № 815.
6. Семчук Я.М. Вплив Північно-Долинського нафтоконденсатного родовища на довкілля / Я.М. Семчук, Б.Ю. Депутат // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ : Державний міжвідомч. наук.-техн. зб. – Івано-Франківськ. – 2005. – Вип. 4, т. 17. – С. 40-44.

### Депутат Б.Ю. Методика определения концентрации солей в водосносном горизонте методом математического моделирования

Предложен метод определения концентрации солей в водосносном горизонте методом математического моделирования, с помощью которого можно обеспечить начальные условия для решения уравнений миграции методом конечных разностей и найти концентрацию подземных вод в любой момент времени в узлах сетки исследуемой области. Приведены рекомендации по выбору параметров, характеризующих техногенную нагрузку на подземные воды и степень их пригодности для хозяйственно-питьевого водоснабжения.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, минерализация, солевой поток, миграция, симплекс, макрокомпоненты, концентрация, ареол.

### Deputat B.Yu. Methods for Determining the Concentration of Salts in the Aquifer by Mathematical Modelling

The method for determining the concentration of salts in the aquifer through mathematical modelling that allows providing the initial conditions for solving equations migration method of finite differences and find a concentration of groundwater at any point of time in the grid study area is proposed. Recommendations on the choice of parameters that characterize the human impacts on groundwater and the extent of their suitability for drinking water supply are offered.

**Keywords:** mathematical modelling, salinity, salt flow, migration, simplex, macro, concentration, areola.

УДК 378.1

Доц. О.Ю. Чмир, канд. фіз.-мат. наук; доц. О.О. Карабин, канд. фіз.-мат. наук – Львівський ДУ безпеки життєдіяльності

### ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТА MAPLE У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОКРЕМИХ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРУ

Показано застосування прикладного пакета Maple до розв'язування двох прикладних задач з курсу вищої математики. Побудовано процедуру для наближення розв'язку задачі тригонометричними поліномами. Показано, що застосування пакета Maple в навчальному процесі під час вивчення вищої математики розширює можливості викладача, дає змогу легко ілюструвати розв'язки задач графіками, змінювати їх вигляд за різних початкових умов. Усе це змінює підходи до викладання та вимагає від студента вільного володіння математичним апаратом, знання основ програмування та глибокого розуміння поставлених перед ним задач.

**Ключові слова:** команда, процедура, пакет програм, прикладна задача.

Вивчення вищої математики у вищих технічних навчальних закладах має бути скероване в прикладному руслі. Саме прикладна спрямованість викладання дає змогу студентам розуміти необхідність глибокого вивчення цієї дисципліни і розуміння того, що знання з більшості спеціальних дисциплін є неможливим без знань з вищої математики. Для демонстрації застосування навчального матеріалу з вищої математики з метою вирішення прикладних задач допомагає викладачеві пакет Maple. Грамотне використання цього пакета в навчальному процесі забезпечує підвищення рівня фундаментальності математичної освіти. За допомогою цього пакета викладач має змогу не тільки показати можливість швидкого розв'язання задачі, а й графічно проілюструвати розв'язок. Під грамотним використанням варто розуміти можливість застосування прикладного пакета тільки після того, як студент на належному рівні оволодів вміннями та навичками розв'язування задач відповідного розділу вищої математики.

Багато робіт стосуються питань впровадження використання в навчальному процесі прикладних математичних пакетів. Дослідження у цьому напрямі здійснюють С.А. Семеріков, В.І. Клочко, Ю.В. Триус, О.В. Грицунов, Е.В. Баранова. Проте практика показує, що програмного і методичного забезпечення комп'ютерних тренажерів розв'язання типових задач вищої математики є недостатньо. У роботі показано застосування пакета Maple для ілюстрації розв'язку двох задач з курсу вищої математики та можливості створення процедури для наближення розв'язку задачі тригонометричними многочленами.

**Задача 1. Знайти миттєве значення синусоїдального струму в контурі, що складається з ємності та індуктивності.**

Методика розрахунку електричних кіл несинусоїдального струму полягає в тому, що задана несинусоїдальна періодична напруга або струм джерела аналітично подають у вигляді гармонічного ряду Фур'є, після чого виконують розрахунок кола по кожній гармоніці або діючих значеннях струмів (або напруг) на окремих ділянках.

Відомо, що в контурі, який складається з ємності та індуктивності, ємність сприяє збільшенню вищих гармонік у кривій струму, істотно спотворюючи її, порівняно із кривою напруги живлення. Індуктивність, навпаки, придушує вищі гармоніки в складі струму, згладжуючи криву струму і наближаючи її форму до вигляду першої гармоніки подавання напруги джерела.

Фактична постановка задачі приводить до розкладання в ряд Фур'є функції  $i(t) = I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$  в інтервалі  $[0; T]$ , де  $i(t)$  задовольняє умови Діріхле. Графік функції  $i(t)$  і її періодичне продовження зображено на рис. 1.

Ряд Фур'є для функції  $i(t)$  має вигляд

$$i(t) = I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega t}{k} \quad (0 \leq t \leq T).$$

В інтервалі  $[0; T]$  функція  $i(t)$  неперервна, на підставі чого у всіх внутрішніх точках цього інтервалу сума ряду дорівнює  $\{i(0) + i(T)\} / 2 = I_0 / 2$ , що й має місце (оскільки  $\sin 0 = 0$  і  $\sin k\omega T = \sin 2\pi k = 0$ ). Поза інтервалом  $[0; T]$  ряд дає

періодичне продовження функції  $i(t)$  на всю вісь  $t$ . У всіх точках  $t \neq mT$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) періодичне продовження неперервне. У всіх точках  $t = mT$  (точки розриву 1-го роду) сума ряду дорівнює півсумі лівої і правої границь періодичного продовження у цих точках, тобто  $I_0 / 2$ .

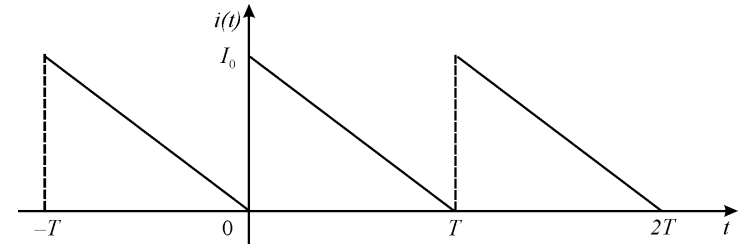


Рис. 1. Графік функції  $i(t) = I_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$

Використовуючи команди пакета Maple, побудовано наближення функції  $i(t)$  тригонометричними многочленами:

$$i_2(t) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{\pi} \sin \omega t + \frac{I_0}{2\pi} \sin 2\omega t,$$

$$i_5(t) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{\pi} \sin \omega t + \frac{I_0}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{I_0}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{I_0}{4\pi} \sin 4\omega t + \frac{I_0}{5\pi} \sin 5\omega t,$$

а також 
$$i_9(t) = \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{\pi} \sin \omega t + \frac{I_0}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{I_0}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{I_0}{4\pi} \sin 4\omega t + \frac{I_0}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{I_0}{6\pi} \sin 6\omega t + \frac{I_0}{7\pi} \sin 7\omega t + \frac{I_0}{8\pi} \sin 8\omega t + \frac{I_0}{9\pi} \sin 9\omega t,$$

що є відповідно частковими сумами ряду.

Наближення  $i_2(t)$ ,  $i_5(t)$  та  $i_9(t)$  функції  $i(t)$  здійснюємо такими командами:  
> restart; > i2:= 1/2+1/Pi\*sin(t)+1/(2\*Pi)\*sin(2\*t);

$$i_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sin(t)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2t)}{\pi}$$

> i5:= 1/2+1/Pi\*sin(t)+1/(2\*Pi)\*sin(2\*t)+1/(3\*Pi)\*sin(3\*t)+1/(4\*Pi)\*sin(4\*t)+1/(5\*Pi)\*sin(5\*t);

$$i_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sin(t)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2t)}{\pi} + \frac{1}{3} \frac{\sin(3t)}{\pi} + \frac{1}{4} \frac{\sin(4t)}{\pi} + \frac{1}{5} \frac{\sin(5t)}{\pi}$$

> i9:= 1/2+1/Pi\*sin(t)+1/(2\*Pi)\*sin(2\*t)+1/(3\*Pi)\*sin(3\*t)+1/(4\*Pi)\*sin(4\*t)+1/(5\*Pi)\*sin(5\*t)+1/(6\*Pi)\*sin(6\*t)+1/(7\*Pi)\*sin(7\*t)+1/(8\*Pi)\*sin(8\*t)+1/(9\*Pi)\*sin(9\*t);

$$i_9 = \frac{1}{2} + \frac{\sin(t)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\sin(2t)}{\pi} + \frac{1}{3} \frac{\sin(3t)}{\pi} + \frac{1}{4} \frac{\sin(4t)}{\pi} + \frac{1}{5} \frac{\sin(5t)}{\pi} + \frac{1}{6} \frac{\sin(6t)}{\pi} + \frac{1}{7} \frac{\sin(7t)}{\pi} + \frac{1}{8} \frac{\sin(8t)}{\pi} + \frac{1}{9} \frac{\sin(9t)}{\pi}$$

Для виведення результатів на екран, після кожного символу ";", натискаємо клавішу Enter.

Для наочного зображення цих наближень виведено їх графіки,  $i(t) = I_0 / 2$  та графік функції  $i(t)$ , взявши  $I_0 = 1$  та  $T = 6,3$ , на рис. 2, скориставшись командою `> plot ([i2, i5, i9, 0.5, 1-1/6.3·t], t=0..2·Pi, color = [red, blue, green, black, black], linestyle = 20, xtickmarks = 10, ytickmarks = 10, thickness = 2);`

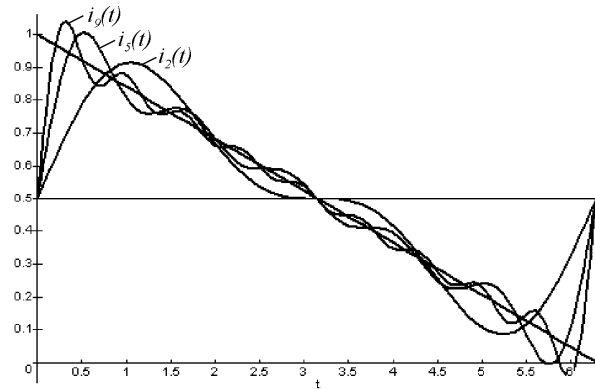


Рис. 2. Графіки наближень  $i(t)$  тригонометричними поліномами

Розглянуті вище команди пакета Maple можна описати за допомогою процедури:

```
> restart;
> fourierseries:= proc(f, t, t1, t2, n) local k, l, a, b, s;
> l:= (t2 - t1)/2;
> a[0]:= int(f, t = t1..t2)/l;
> a[k]:= int(f·cos(k·Pi·t/l), t = t1..t2)/l;
> b[k]:= int(f·sin(k·Pi·t/l), t = t1..t2)/l;
> s:= a[0]/2 + sum(a[k]·cos(k·Pi·t/l) + b[k]·sin(k·Pi·t/l), k = 1..n);
> end;
> f:= 1 - t/(2·Pi); t1:= 0; t2:= 2·Pi;
> i2:= fourierseries(f, t, t1, t2, 2);
> i5:= fourierseries(f, t, t1, t2, 5);
> i9:= fourierseries(f, t, t1, t2, 9);
> plot([i2, i5, i9, f], t = t1..t2, color = [red, blue, green, black], linestyle = 20,
xtickmarks = 10, ytickmarks = 10, thickness=2);
```

За допомогою цієї процедури можна побудувати будь-яке наближення функції  $i(t)$  в ряд, вибравши необхідні параметри в команді fourierseries.

Задача 2. Вузька трубка обертається із сталою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо перпендикулярної до неї вертикальної осі. У початковий момент на відстані  $a_0$  від осі всередині трубки лежить кулька масою  $m$ . Вважаючи, що тертя немає і в початковий момент швидкість кульки відносно трубки дорівнювала нулю, знайти закон руху кульки відносно трубки.

Спрямовано вісь координат  $Ox$  уздовж осі трубки, взявши точку  $O$  за початок координат (рис. 3).

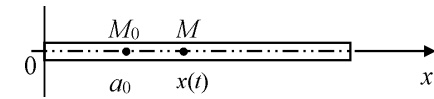


Рис. 3. Рух кульки в трубі

Позначено через  $x = x(t)$  координату кульки (точка  $M$ ) в момент часу  $t$ . Оскільки кулька рухається по трубі без тертя, то на неї діє лише відцентрова сила  $f_c = m\omega^2 x$ . За другим законом Ньютона для відносного руху маємо  $m\ddot{x} = m\omega^2 x$  або  $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ . Початковими умовами є умови  $x(t_0) = a_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 0$ . Положення точки  $M$  визначається функцією

$$x(t) = \frac{a_0}{2} e^{\omega(t-t_0)} + \frac{a_0}{2} e^{-\omega(t-t_0)},$$

що є розв'язком поставленого диференціального рівняння з визначеними початковими умовами.

За допомогою команд пакета Maple можна побудувати графік функції  $x(t)$  при різних значеннях кутової швидкості  $\omega$  (рис. 4).

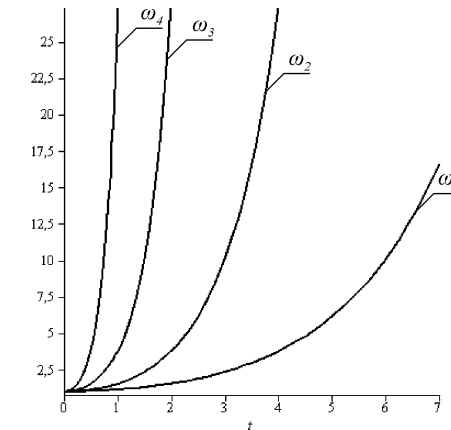


Рис. 4. Залежність координати кульки в трубі від часу

Для  $a_0 = 1$  та  $t_0 = 0$ ,  $\omega_1 = 0,5$ ,  $\omega_2 = 1$ ,  $\omega_3 = 2$ ,  $\omega_4 = 4$  будемо графіки.

```
> restart;
> with(plots):
> a0:= 1; t0:= 0; w1:= 0.5; w2:= 1; w3:= 2; w4:= 4;
> R[1]:= plot ( (a0/2 exp(w1(t-t0)) + a0/2 exp(-w1(t-t0))), t = 0..7, color = blue );
> R[2]:= plot ( (a0/2 exp(w2(t-t0)) + a0/2 exp(-w2(t-t0))), t = 0..4, color = red );
> R[3]:= plot ( (a0/2 exp(w3(t-t0)) + a0/2 exp(-w3(t-t0))), t = 0..2, color = green );
> R[4]:= plot ( (a0/2 exp(w4(t-t0)) + a0/2 exp(-w4(t-t0))), t = 0..1, color = black );
```

$\gt \text{display}(\{R[1], R[2], R[3], R[4]\});$

Отже, у сучасних умовах застосування прикладних математичних пакетів є необхідним. Однак це вимагає від студента вільного володіння математичним апаратом, знання основ програмування та розуміння поставлених перед ним задач. Від викладача в таких умовах вимагається переглянути підходи до викладання математично орієнтованих дисциплін.

### Література

1. Грицунов О.В. Інформаційні системи та технології : навч. посібн. / О.В. Грицунов; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : Вид-во ХНАМГ, 2010. – 222 с.
2. Семеріков С.О. Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі : монографія / наук. ред. акад. АПН України, д. пед. н., проф. М.І. Жалдак. – Кривий Ріг : Вид-во "Мінерал"; К. : Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – 340 с.
3. Баранова Е.В. Теория и практика объектно-ориентированного проектирования содержания обучения средствами информационных технологий : автореф. дисс. на соискание учен. степени д-ра пед. наук: спец. 13.00.02 – "Теория и методика обучения информатике" / Е.В. Баранова. – СПб., 2000. – 36 с.
4. Прохоров Г.В. Пакет символьных вычислений Maple V. / Г.В. Прохоров, М.А. Леденев, В.В. Колбеев. – М. : Изд-во "Компания Петит", 1998. – 198 с.

### *Чмыр О.Ю., Карабын О.А.* Применения пакета Maple в процессе решения отдельных задач прикладного характера

Показано применение прикладного пакета Maple к решению двух прикладных задач из курса высшей математики. Построена процедура для приближения решения задачи тригонометрическими полиномами. Показано, что применение пакета Maple в учебном процессе при изучении высшей математики расширяет возможности преподавателя, позволяет легко иллюстрировать решения задач графиками, изменять их вид при различных начальных условиях. Все это меняет подходы к преподаванию и требует от студента свободного владения математическим аппаратом, знания основ программирования и глубокого понимания поставленных перед ним задач.

**Ключевые слова:** команда, процедура, пакет программ, прикладная задача.

### *Chmyr O. Yu., Karabyn O.O.* The Maple Package Application in Solving Some Applied Problems

The Maple application software packages for solving two applied problems of higher mathematics course are shown. A procedure for approaching the problem by trigonometric polynomials upshot is designed. The Maple application package in the classroom in the study of higher mathematics is shown to empower the teacher, and also make it easier to illustrate solutions of schedules, change their appearance under different initial conditions. This changes the approach to teaching the students proficiency in mathematical apparatus, knowledge of programming and in-depth understanding of the tasks assigned to them.

**Keywords:** command, procedure, package, application tasks, problem solving.

## 6. ОСВІТЯНСЬКІ ПРОБЛЕМИ ВИЩОЇ ШКОЛИ

УДК 378:504:316

Доц. П.К. Динька, канд. екон. наук;  
мол. наук співроб. О.П. Динька – НЛТУ України, м. Львів

### ЕКОЛОГІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ В КОНТЕКСТІ ВИМОГ "ЗЕЛЕНОЇ" ТА "СИНЬОЇ" ЕКОНОМІКИ (НА ПРИКЛАДІ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ВИКОРИСТАННЯ ЛІСОВИХ РЕСУРСІВ)

Досліджено проблеми освіти для сталого розвитку і обґрунтовано напрями екологізації навчального процесу в контексті національної парадигми сталого розвитку, яка обумовлюється поєднанням у його рамках двох рівноцінних складових – "зеленої" та "синьої" економіки. Імплементація принципів "зеленої" економіки в навчальний процес передбачає оволодіння студентами методами оптимізації еколого-економічних ефектів на загальнодержавному та галузевому рівнях. Вивчення засад "синьої" економіки повинне сприяти розвитку творчих здібностей студентів щодо екологічної трансформації виробничих процесів і створювати інноваційні умови, які забезпечать максимально наближене до природного циклічне використання всіх компонентів природних ресурсів та зосереджені у них речовини, що отримуються і утилізуються на локальних рівнях.

**Ключові слова:** освіта для сталого розвитку, екологізація навчального процесу, "зелена" економіка, "синя" економіка, енергетичне використання лісових ресурсів.

**Постановка проблеми.** У "Порядку денному на ХХІ століття" були визначені невідкладні завдання щодо переорієнтації системи освіти на напрями сталого розвитку і забезпечення практичної підготовки всіх прошарків суспільства для сталого управління територіями, ресурсами і галузями господарства [1]. Реалізація цих завдань передбачає включення принципів сталого розвитку в усі освітні програми, які мають забезпечити постійне і неперервне навчання та виховання і формування особливого освітнього напрямку – освіти в інтересах сталого розвитку (ОСР). Основними складовими ОСР повинні стати екологічна поінформованість, висока соціальна та моральна відповідальність щодо природного довкілля, пропагування узгодженого з принципами сталого розвитку способу життя, загальна екологізація суспільної свідомості.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Методологічною основою концепції ОСР є Белградська хартія (ЮНЕСКО-ЮНЕП, 1975), Університетська хартія зі сталого розвитку (Женева, 1994), Тбіліська декларація (ЮНЕСКО-ЮНЕП, 1977), Салонікська декларація (ЮНЕСКО, 1997) [2], головні положення яких були консолідовані у "Порядку денному на ХХІ століття", прийнятому у 1992 р. в Ріо-де-Жанейро [1]. Після проголошення Декади ООН "Освіта в інтересах сталого розвитку" на 2005-2014 рр. ОСР стала пріоритетним напрямом формування освітніх програм багатьох країн світу. Її логічним продовженням є Регіональна Стратегія з Освіти для сталого розвитку, підготовлена і прийнята у 2005 р. Європейською Економічною комісією (ЄЕК) ООН [3].

Аналіз міжнародних документів та наукових публікацій свідчить, що у загальному вигляді система ОСР, як і сама концепція сталого розвитку, скла-