УДК 004.056.5:517.[3+4+51]

ВИКОРИСТАННЯ МНОГОЧЛЕНА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ТАБЛИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДВОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

***Ю.І. Грицюк*[1], *Я.П. Драґан*[2]**

Показано можливість чисельного інтегрування табличних функцій від двох незалежних змінних з використанням многочлена Тейлора. З'ясовано, що у багатьох практичних задачах не завжди вдається виразити первісну від підінтегральної функції через елементарні функції. Розроблено метод чисельного інтегрування табличної функції, який дає змогу обчислити означені одинарні інтеграли за кожною зі змінних, а також означений подвійний інтеграл за двома змінними. З використанням многочлена Тейлора розроблено алгоритм обчислення площ перерізів тривимірної фігури та її об'єму, заданої двома табличними функціями від двох змінних.

Ключові слова: довільна точка простору незалежних змінних; многочлен Тейлора; таблична функція від двох змінних; чисельне інтегрування табличних функцій; означені одинарні інтеграли за кожною зі змінних; означений подвійний інтеграл за двома змінними.

Вступ. При вирішенні певних проблем інтелектуального аналізу даних існує багато прикладних задач, у математичному формулюванні яких виникає потреба обчислення інтегралів – неозначених і означених, одинарних, подвійних і потрійних, криволінійних і за поверхнею та ін. Найважливіші з таких задач полягають в обчисленні: площі та довжини дуги плоскої фігури; об'єму тіла за відомими площами поперечних перерізів чи тіла обертання; площі поверхні будь-якої фігури чи тіла обертання; статичних моментів і моментів інерції плоских дуг і фігур; координат центра ваги; роботи і тиску [2]. В таких задачах певна підінтегральна функція у процесі виконання інженерних розрахунків часто подається у вигляді таблиці.

З курсу вищої математики [2, ст. 261; 3, ст. 349] відомо, що для функції $f[x]$, неперервної на відрізку $[a, b]$, означений інтеграл існує та визначається за формулою Ньютона-Лейбніца

$$I = \int_a^b f[x]dx = F[x]\Big|_a^b = F[b] - F[a], \qquad (1)$$

де $F[x]$ – первісна для функції $f[x]$. Однак для більшості практичних задач первісну $F[x]$ не завжди вдається виразити через елементарні функції. В інженерних розрахунках функція $f[x]$ часто задається у вигляді таблиці її значень для певних значень аргумента. Тому для обчислення означеного інтеграла (1) часто використовують наближені числові методи [2, 4, 5]. Ці методи дають змогу безпосередньо знайти числове значення інтеграла, базуючись на відомих значеннях підінтегральної функції (а інколи і на її похідних) у заданих точках, які називають вузлами.

[1] проф. Ю.І. Грицюк, д-р техн. наук, НУ "Львівська політехніка", E-mail: yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua
[2] проф. Я.П. Драган, д-р фіз.-мат. наук, НУ "Львівська політехніка", E-mail: yaroslav.p.dragan@lpnu.ua

Свого часу було розроблено значну кількість методів і алгоритмів чисельного інтегрування як аналітичних, так і табличних функцій від однієї, двох і трьох змінних з використання різних квадратурних формул [3, ст. 355]. Однак спробуємо дещо удосконалити методику чисельного інтегрування табличних функцій, особливо її матричні алгоритми, позаяк вона має ще багато прихованих можливостей. Тому розроблення надійної матричної системи чисельного інтегрування табличних функцій від однієї, двох і трьох змінних з використанням многочлена Тейлора є актуальним науковим завданням, деякі результати реалізації якого продемонстровано в цій роботі.

1. Чисельне інтегрування табличної функції від двох змінних

Постановки задач чисельного інтегрування табличних функцій з однією, двома чи трьома незалежними змінними можуть мати одну з двох формулювань [3, ст. 349]. У роботі [1] було розглянуто алгоритми розв'язання деяких задач для табличної функції від однієї змінної з використанням многочлена Тейлора. Тут розглянемо деякі алгоритми чисельного інтегрування табличної функції від двох змінних, а вже потім, у інших публікаціях, від трьох змінних.

Табличну функцію $\overline{Y} = f[\overline{X}_1, \overline{X}_2]$ від двох змінних (табл. 1) можна подати аналітично її інтерполянтою [7] у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня:

$$\begin{aligned} y = f^n[x_1,x_2] &= c_0 + c_1\frac{x_1}{1!} + c_2\frac{x_2}{1!} + c_3\frac{x_1^2}{2!} + c_4\frac{x_1x_2}{1!1!} + c_5\frac{x_2^2}{2!} + \\ &+ c_6\frac{x_1^3}{3!} + c_7\frac{x_1^2x_2}{2!1!} + \ldots + c_{p-1}\frac{x_1x_2^{n-1}}{1!(n-1)!} + c_p\frac{x_2^n}{n!} = \overline{T}^n[x_1,x_2]\times\overline{C}^{\mathrm{т}}, \end{aligned} \qquad (2)$$

де: $\overline{T}^n[x_1,x_2]$ – рядок Тейлора n-го степеня для двох змінних; $\overline{C}^{\mathrm{т}}$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів інтерполянти.

Табл. 1. Загальний вигляд табличної функції від двох змінних

№ вузла	0	1	…	i	…	p
$\overline{X}_1$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	…	$x_{1,i}$	…	$x_{1,p}$
$\overline{X}_2$	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	…	$x_{2,i}$	…	$x_{2,p}$
$\overline{Y}$	y_0	y_1	…	y_i	…	y_p

У табл. 1 введено такі позначення: $\overline{\overline{X}} = [\overline{X}_k = [x_{k,i}, i = \overline{1,p}]; k = \overline{1,m}]$ – значення аргументів табличної функції у вузлових точках; p – кількість вузлових точок; $\overline{Y} = [y_i, i = \overline{1,p}]$ – значення табличної функції у вузлових точках; m=2 – кількість змінних.

Для знаходження значень стовпця $\overline{C}^{\mathrm{т}}$ з виразу (2) потрібно сформувати таку лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_0 + c_1\frac{x_{1,0}}{1!} + c_2\frac{x_{2,0}}{1!} + c_3\frac{x_{1,0}^2}{2!} + c_4\frac{x_{1,0}x_{2,0}}{1!1!} + c_5\frac{x_{2,0}^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x_{2,0}^n}{n!} = y_1; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ c_0 + c_1\frac{x_{1,p}}{1!} + c_2\frac{x_{2,p}}{1!} + c_3\frac{x_{1,p}^2}{2!} + c_4\frac{x_{1,p}x_{2,p}}{1!1!} + c_5\frac{x_{2,p}^2}{2!} + \ldots + c_p\frac{x_{2,p}^n}{n!} = y_p, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{T}}[\bar{X}_1, \bar{X}_2]\times \bar{C}^{т} = \bar{Y}^{т}, \qquad (3)$$

звідки
$$\bar{\bar{T}}[\bar{X}_1, \bar{X}_2]^{-1}\times \bar{Y}^{т} = \bar{C}^{т}, \qquad (4)$$

де: $\bar{\bar{T}}[\bar{X}_1, \bar{X}_2]$ – матриця Тейлора, значення елементів якої обчислюються за координатами вузлів $\bar{X}_1$ і $\bar{X}_2$ інтерполяції; $\bar{\bar{T}}[\bar{X}_1, \bar{X}_2]^{-1}$ – обернена матриця за відношенням до матриці Тейлора; $\bar{Y}^{т}$ – вектор-стовпець вузлових значень інтерполяції.

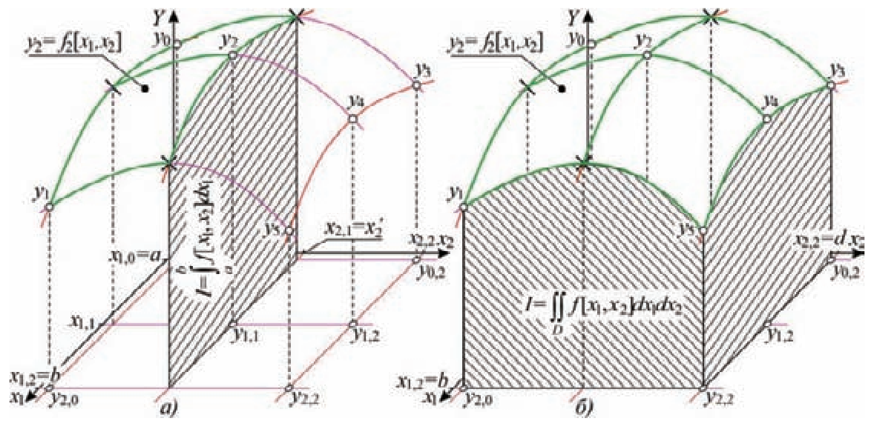

Рис. 1. Схема обчислення означених одинарного (а) та подвійного (б) інтегралів, обмеженого гладкими кривими

Означені одинарні інтеграли від многочлена (2) (рис. 1, *а*) за однією зі змінних x_1 та x_2 з урахуванням (4) визначаються за такими формулами:

$$\int_a^b f^n[x_1,x_2]dx_1 = \left(\bar{T}_1^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=b\\ x_2=x_2'}} - \bar{T}_1^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}\right)\times \overline{\overline{Ix_1}}\times \bar{C}^{т}; \qquad (5)$$

$$\int_c^d f^n[x_1,x_2]dx_2 = \left(\bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=d}} - \bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}\right)\times \overline{\overline{Ix_2}}\times \bar{C}^{т}, \qquad (6)$$

де: $\bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]$ – рядок Тейлора (n+1)-го степеня для двох змінних; $\overline{\overline{Ix_1}}$ і $\overline{\overline{Ix_2}}$ – матриці інтегрування рядка Тейлора відповідно за змінною x_1 та x_2.

Означений подвійний інтеграл від многочлена (2) (рис. 1, *б*) за двома змінними x_1 та x_2 з урахуванням (4) визначається за такою формулою:

$$\iint_D f^n[x_1,x_2]dx_1dx_2 = \int_a^b dx_1\int_c^d f^n[x_1,x_2]dx_2 = \int_c^d dx_2\int_a^b f^n[x_1,x_2]dx_1 =$$
$$= \left(\bar{T}^{n+2}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=b\\ x_2=d}} - \bar{T}^{n+2}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=c}}\right)\times \overline{\overline{Ix_1x_2}}\times \bar{C}^{т}. \qquad (7)$$

де $\bar{T}^{n+2}[x_1,x_2]$ – рядок Тейлора (n+2)-го степеня для двох змінних; $\overline{\overline{Ix_1x_2}}$ – матриця інтегрування рядка Тейлора за змінними x_1 і x_2.

Отже, для обчислення значень одинарних і подвійних інтегралів від функції, заданої табл. 1, потрібно виконати такі дії:

- за даними таблиці сформувати матричне рівняння (3) та розв'язати його;
- сформувати рядок Тейлора (n+1)-го степеня $\bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]$ та матриці його інтегрування $\overline{\overline{Ix_1}}$ і $\overline{\overline{Ix_2}}$ відповідно за змінною x_1 та x_2;
- сформувати рядок Тейлора (n+2)-го степеня $\bar{T}^{n+2}[x_1,x_2]$ та матрицю його інтегрування $\overline{\overline{Ix_1x_2}}$ за змінними x_1 і x_2;
- для означеного одинарного інтегралу – підставити у формулу (5) чи (6) отриманий корінь $\bar{C}^{т}$ рівняння (4) та числові значення $x_1=b$, $x_2=x_2'$ і $x_1=a$, $x_2=x_2'$ (чи $x_1=x_1'$, $x_2=d$ і $x_1=x_1'$, $x_2=c$) і виконати вказані в (5) чи (6) дії множення матриць;
- для означеного подвійного інтегралу – підставити у формулу (7) отриманий корінь $\bar{C}^{т}$ рівняння (4) та числові значення $x_1=b$, $x_2=d$ і $x_1=a$, $x_2=c$ і виконати вказані в (7) дії множення матриць.

3. Обчислення площ перерізів тривимірної фігури та її об'єму

Загалом тривимірна фігура, обмежене зверху і знизу опуклими поверхнями, має вигляд, який показано на рис. 2, *а*. В цьому випадку табличні функції від двох змінних, які описують опуклі поверхні тривимірної фігури, задамо у вигляді табл. 2.

Табл. 2. Загальний вигляд двох табличних функцій від двох змінних

№ вузла	0	1	…	i	…	p
$\bar{X}_1$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	…	$x_{1,i}$	…	$x_{1,p}$
$\bar{X}_2$	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	…	$x_{2,i}$	…	$x_{2,p}$
$\bar{Y}_1$	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	…	$y_{2,i}$	…	$y_{1,p}$
$\bar{Y}_2$	$y_{2,0}$	$y_{3,1}$	…	$y_{2,i}$	…	$y_{2,p}$

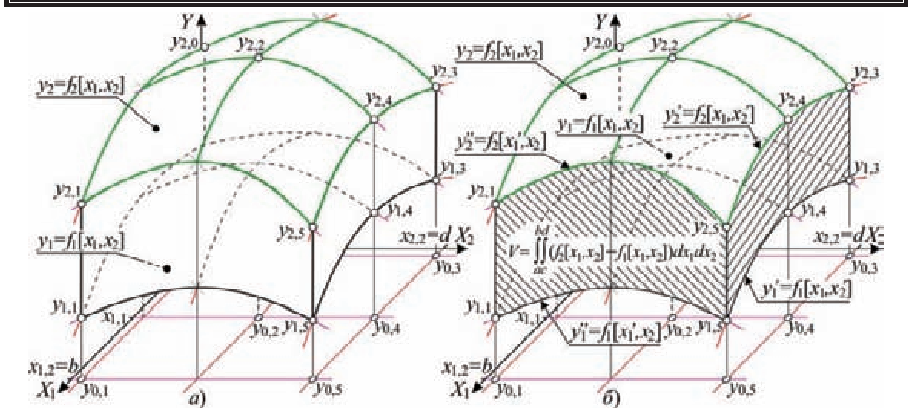

Рис. 2. Загальний вигляд тривимірної фігури (а), обмеженої гладкими поверхнями, та схема обчислення її об'єму (б)

У табл. 2 введено такі позначення: $\bar{\bar{Y}} = \left[\bar{Y}_k = [y_{k,i}, i=\overline{1,p}];\ k=\overline{1,2}\right]$ – значення табличних функцій у вузлових точках. Табличні функції $\bar{Y}_k = f_k[\bar{X}_1, \bar{X}_2], k=\overline{1,2}$ від двох змінних можна подати аналітично їх інтерполянтою (2) у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня:

$$y_k = f_k^n[x_1,x_2] = \bar{T}^n[x_1,x_2]\times \bar{C}_k^{т}, k=\overline{1,2}, \quad (8)$$

де: $\bar{C}_k^{т}, k=\overline{1,2}$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів k-ої інтерполянти. Згідно з виразом (3), k-ий стовпець $\bar{C}_k^{т}$ з виразу (8) є коренем такого лінійного матричного рівняння:

$$\bar{\bar{T}}[\bar{X}_1,\bar{X}_2]\times\bar{C}_k^{т} = \bar{Y}_k^{т}, k=\overline{1,2} \Rightarrow \bar{\bar{T}}[\bar{X}_1,\bar{X}_2]^{-1}\times\bar{Y}_k^{т} = \bar{C}_k^{т}, k=\overline{1,2}, \quad (9)$$

де $\bar{Y}_k^{т}, k=\overline{1,2}$ – транспонований рядок (стовпець) значень вузлових точок k-ої інтерполяції.

Обчислення площ перерізів тривимірної фігури (площ плоских фігур). Згідно з **[**2, ст. 269**]**, площа плоскої фігури (рис. 3, *а*), яка обмежена гладкими кривими $y_1' = f_1^n[x_1,x_2']$ і $y_2' = f_2^n[x_1,x_2']$ (де $f_1^n[x_1,x_2'] \le f_2^n[x_1,x_2']$, $x_2' - const$), а також прямими $x_1 = a$, $x_1 = b$ та $x_2 = x_2'$, визначається за такою формулою:

$$S_1 = \int_a^b \left(f_2^n[x_1,x_2'] - f_1^n[x_1,x_2']\right)dx_1. \quad (10)$$

Площа плоскої фігури (рис. 3, *б*), яка обмежена гладкими кривими $y_1'' = f_1^n[x_1',x_2]$ і $y_2'' = f_2^n[x_1',x_2]$ (де $f_1^n[x_1',x_2] \le f_2^n[x_1',x_2]$, $x_1' - const$), а також прямими $x_1 = x_1'$, $x_2 = c$ і $x_2 = d$, визначається за формулою:

$$S_2 = \int_c^d \left(f_2^n[x_1',x_2] - f_1^n[x_1',x_2]\right)dx_2. \quad (11)$$

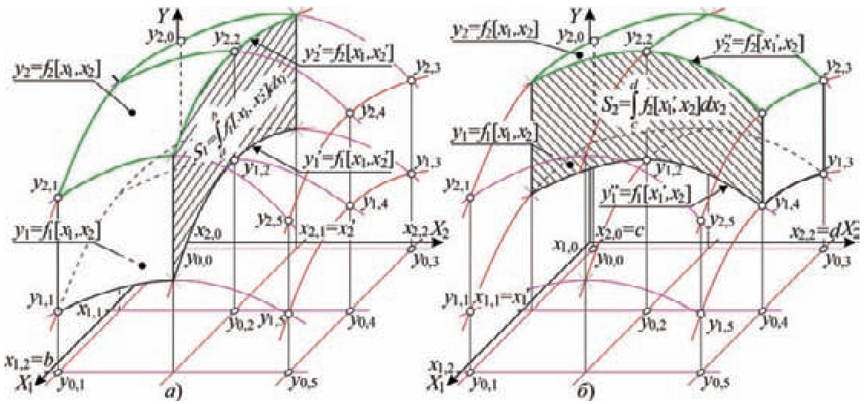

Рис. 3. Схема обчислення площ перерізів тривимірної фігури (площ плоских фігур), обмежених гладкими кривими

Якщо опуклі поверхні тривимірної фігури (рис. 3, *а*) аналітично задано двома інтерполянтами $y_k = f_k^n[x_1,x_2]$, $k=\overline{1,2}$ від двох змінних у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня (8), то площі перерізів двох плоских фігур S_1 та S_2 у буквеному записі можна визначити за такими формулами:

$$S_1 = F[y_1',y_2']\Big|_{\substack{x_1\in[a,b]\\ x_2=x_2'}} = f_2^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}^{x_1=b} - f_1^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}^{x_1=b}, \quad (12)$$

$$S_2 = F[y_1'',y_2'']\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2\in[c,d]}} = f_2^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}^{x_2=d} - f_1^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}^{x_2=d}. \quad (13)$$

Водночас, у матричному записі вирази (12) та (13) з урахуванням виразу (9) матимуть такий вигляд:

$$S_1 = \bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}^{x_1=b}\times\overline{\overline{Ix_1}}\times\left(\bar{C}_2^{т}-\bar{C}_1^{т}\right) = \left(\bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=b\\ x_2=x_2'}} - \bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}\right)\times\overline{\overline{Ix_1}}\times\Delta\bar{C}^{т}; \quad (14)$$

$$S_2 = \bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}^{x_2=d}\times\overline{\overline{Ix_2}}\times\left(\bar{C}_2^{т}-\bar{C}_1^{т}\right) = \left(\bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=d}} - \bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}\right)\times\overline{\overline{Ix_2}}\times\Delta\bar{C}^{т}. \quad (15)$$

Отже, для обчислення площ плоских фігур S_1 та S_2 від двох функцій, заданих табл. 2, потрібно виконати такі дії:

- за даними табл. 2 сформувати два матричні рівняння (9) та розв'язати їх;
- сформувати рядок Тейлора (n+1)-го степеня $\bar{T}^{n+1}[x_1,x_2]$ і відповідні матриці його інтегрування $\overline{\overline{Ix_1}}$ та $\overline{\overline{Ix_2}}$;
- підставити у формулу (14) отримані корені $\bar{C}_1^{т}$ k = 1-го матричного рівняння (9) та числові значення аргументів $x_1 = a$ і $x_1 = b$ та $x_2 = x_2'$, після чого для отримання площі S_1 потрібно виконати дії множення матриць;
- підставити у формулу (15) отримані корені $\bar{C}_2^{т}$ k = 2-го матричного рівняння (9) та числові значення аргументів $x_1 = x_1'$ та $x_2 = c$ і $x_2 = d$, після чого для отримання площі S_2 потрібно виконати дії множення матриць.

Приклад 1. Нехай від функцій $\bar{Y}_k = \bar{Y}_k[x_1,x_2], k=\overline{1,2}$, заданих табл. 3, потрібно обчислити площі плоских фігур S_1 та S_2 при таких обмеженнях: $x_1 = b$ = 20, $x_1 = a$ = -10 та $x_2 = x_2'$ = 70; $x_1 = x_1'$ = 15, $x_2 = d$ = 95, $x_2 = c$ = 46.

Табл. 3. Значення табличних функцій, що описують опуклі поверхні тривимірної фігури

№ вузла	1	2	3	4	5	6
$\bar{X}_1$	-10	-10	-10	5	5	20
$\bar{X}_2$	46	68	95	62	84	74
$\bar{Y}_1$	5	8	18	6	11	9
$\bar{Y}_2$	10	14	26	12	18	14

Згідно з даними табл. 3, аналітичний вираз інтерполянти 2-го степеня для k-ої табличної функції має мати такий вигляд

$$y_k = f_k^2[x_1,x_2] = c_{0,k} + c_{1,k}\frac{x_1}{1!} + c_{2,k}\frac{x_2}{1!} + c_{3,k}\frac{x_1^2}{2!} + c_{4,k}\frac{x_1x_2}{1!1!} + c_{5,k}\frac{x_2^2}{2!} = \bar{T}^2[x_1,x_2]\times\bar{C}_k^{т}, k=\overline{1,2}. \quad (16)$$

Рядок Тейлора 3-го степеня для змінних x_1 та x_2 матиме такий вигляд:

$$\bar{T}^3[x_1,x_2] = \left|1 \quad \frac{x_1}{1!} \quad \frac{x_2}{1!} \quad \frac{x_1^2}{2!} \quad \frac{x_1x_2}{1!1!} \quad \frac{x_2^2}{2!} \quad \frac{x_1^3}{3!} \quad \frac{x_1^2x_2}{2!1!} \quad \frac{x_1x_2^2}{1!2!} \quad \frac{x_2^3}{3!}\right|, \quad (17)$$

а матриці інтегрування $\overline{\overline{Ix_1}}$ та $\overline{\overline{Ix_2}}$ рядка Тейлора $\bar{T}^3[x_1,x_2]$ відповідно за змінними x_1 та x_2 матимуть такий вигляд:

$$\overline{\overline{Ix_1}} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \overline{\overline{Ix_2}} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{matrix} \right\|. \qquad (18)$$

Розв'язками лінійних матричних рівнянь (9) є числові значення елементів таких двох векторів-стовпців:

$$\bar{C}_1^{\text{т}} = \left| \begin{matrix} c_{1,0} \\ c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \\ c_{1,4} \\ c_{1,5} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 15,4854 \\ 0,2334 \\ -0,4493 \\ 0,0103 \\ -0,0041 \\ 0,0096 \end{matrix} \right|; \bar{C}_2^{\text{т}} = \left| \begin{matrix} c_{2,0} \\ c_{2,1} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \\ c_{2,4} \\ c_{2,5} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 21,3887 \\ 0,3150 \\ -0,4829 \\ 0,0033 \\ -0,0054 \\ 0,0107 \end{matrix} \right|; \Delta\bar{C}^{\text{т}} = \left| \begin{matrix} 5,9033 \\ 0,0816 \\ -0,0336 \\ -0,0070 \\ -0,0012 \\ 0,0012 \end{matrix} \right|. \qquad (19)$$

Введемо деякі проміжні змінні та виконаємо відповідні обчислення:

$$\Delta\bar{T}^3[x_1, x_2]\Big|^{x_1=20}_{\substack{x_1=-10 \\ x_2=70}} = \bar{T}^3[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=20 \\ x_2=70}} - \bar{T}^3[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=-10 \\ x_2=70}} =$$
$$= \left| 0 \quad 30 \quad 0 \quad 150 \quad 2100 \quad 0 \quad 1500 \quad 10500 \quad 73500 \quad 0 \right|. \qquad (20)$$

$$\Delta\bar{T}^3[x_1, x_2]\Big|^{x_2=95}_{\substack{x_1=15 \\ x_2=46}} = \bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=15 \\ x_2=46}} - \bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=15 \\ x_2=95}} =$$
$$= \left| 0 \quad 0 \quad 49 \quad 0 \quad 735 \quad 3454,5 \quad 0 \quad 5512,5 \quad 51817,5 \quad 126673,2 \right|. \qquad (21)$$

Значення площі плоскої фігури S_1, обмеженої двома інтерполянтами $y'_k = f_k[x_1, x'_2], k = \overline{1,2}$ від двох змінних, а також прямими $x_1 = b$ = 20, $x_1 = a$ = -10 та $x_2 = x'_2$ = 70 з урахуванням (14), (18), (19) і (20) становить:

$$S_1 = \Delta\bar{T}^3[x_1, x_2]\Big|^{x_1=20}_{\substack{x_1=-10 \\ x_2=70}} \times \overline{\overline{Ix_1}} \times \Delta\bar{C}^{\text{т}} = 181,05.$$

Значення площі плоскої фігури S_2, обмеженої двома інтерполянтами $y''_k = f_k^n[x'_1, x_2], k = \overline{1,2}$ від двох змінних, а також прямими $x_1 = x'_1$ = 15, $x_2 = d$ = 95, $x_2 = c$ = 46 з урахуванням (15), (18), (19) і (21) становить:

$$S_2 = \Delta\bar{T}^3[x_1, x_2]\Big|^{x_2=95}_{\substack{x_1=15 \\ x_2=46}} \times \overline{\overline{Ix_2}} \times \Delta\bar{C} = 277,92.$$

Значення площ плоских фігур, обчислені за формулами трапецій з кроком $\Delta x_1 = \Delta x_2$ = 5, відповідно становлять S_1 = 180,55 та S_2 = 278,03 кв. од., що практично збігається з отриманими вище результатами.

Обчислення об'єму тривимірної фігури. Згідно з **[**2, ст. 271**]**, об'єм фігури, яка обмежене гладкими поверхнями $y_1 = f_1^n[x_1, x_2]$ і $y_2 = f_2^n[x_1, x_2]$ (де $f_1^n[x_1, x_2] \le f_2^n[x_1, x_2]$), а також прямими $x_1 = a$ і $x_1 = b$ та $x_2 = c$ і $x_2 = d$, визначається за такою формулою:

$$V = \int_a^b \int_c^d \left(f_2^n[x_1, x_2] - f_1^n[x_1, x_2] \right) dx_1 dx_2 . \qquad (22)$$

Якщо опуклі поверхні тривимірної фігури (рис. 2, *а*) аналітично задано двома інтерполянтами $y_k = f_k[x_1, x_2], k = \overline{1,2}$ від двох змінних у вигляді многочлена Тейлора *n*-го степеня (8), то, з урахуванням виразу (9), об'єм цієї фігури (рис. 2, *б*) у буквеному записі можна визначити за такою формулою:

$$V = F[y_1, y_2]\Big|_{\substack{x_1 \in [a,b] \\ x_2 \in [c,d]}} = f_2^{n+2}[x_1, x_2]\Big|^{x_1=b}_{\substack{x_2=d \\ x_1=a \\ x_2=c}} - f_1^{n+2}[x_1, x_2]\Big|^{x_1=b}_{\substack{x_2=d \\ x_1=a \\ x_2=c}}, \qquad (23)$$

а у матричному записі – за такою формулою:

$$V = \bar{T}^{n+2}[x_1, x_2]\Big|^{x_1=b}_{\substack{x_2=d \\ x_1=a \\ x_2=c}} \times \overline{\overline{Ix_1x_2}} \times \left(\bar{C}_2^{\text{т}} - \bar{C}_1^{\text{т}} \right) = \left(\bar{T}^{n+2}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=b \\ x_2=d}} - \bar{T}^{n+2}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=c}} \right) \times \overline{\overline{Ix_1x_2}} \times \Delta\bar{C}^{\text{т}}. \qquad (24)$$

Отже, для обчислення об'єму тривимірної фігури *V*, опуклі поверхні якої описано двома табличними функціями, потрібно виконати такі дії:

- за даними табл. 2 сформувати два матричні рівняння (9) та розв'язати їх;
- сформувати рядок Тейлора (*n*+2)-го степеня $\bar{T}^{n+2}[x_1, x_2]$ і відповідну матрицю його інтегрування $\overline{\overline{Ix_1x_2}}$;
- підставити у формулу (21) отримані корені $\bar{C}_k^{\text{т}}$ *k*-го матричного рівняння (9) та числові значення аргументів $x_1 = a$ і $x_1 = b$ та $x_2 = c$ і $x_2 = d$, після чого для отримання *V* потрібно виконати дії множення матриць.

Приклад 2. Нехай від функцій $\bar{Y}_k = \bar{Y}_k[x_1, x_2], k = \overline{1,2}$, заданих табл. 3, потрібно обчислити об'єм тривимірної фігури при таких обмеженнях: $x_1 = b$ = 20, $x_1 = a$ = -10; $x_2 = d$ = 95, $x_2 = c$ = 46.

Рядок Тейлора 4-го степеня для змінних x_1 та x_2 матиме такий вигляд:

$$\bar{T}^4[x_1, x_2] = \left| 1 \quad \frac{x_1}{1!} \quad \frac{x_2}{1!} \quad \frac{x_1^2}{2!} \quad \frac{x_1x_2}{1!1!} \quad \frac{x_2^2}{2!} \quad \frac{x_1^3}{3!} \quad \frac{x_1^2x_2}{2!1!} \quad \frac{x_1x_2^2}{1!2!} \quad \frac{x_2^3}{3!} \quad \frac{x_1^4}{4!} \quad \frac{x_1^3x_2}{3!1!} \quad \frac{x_2^2x_2^2}{2!2!} \quad \frac{x_1x_2^3}{1!3!} \quad \frac{x_2^4}{4!} \right|. \qquad (25)$$

Розв'язками двох лінійних матричних рівнянь (9) є числові значення двох векторів-стовпців (19).

Введемо деяку проміжну змінну та виконаємо відповідні обчислення:

$$\Delta\bar{T}^4[x_1, x_2]\Big|^{x_1=20}_{\substack{x_2=95 \\ x_1=-10 \\ x_2=46}} = \bar{T}^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=20 \\ x_2=95}} - \bar{T}_2^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=-10 \\ x_2=46}}$$
$$= \left| 0 \quad 30 \quad 49 \quad 150 \quad 2360 \quad 3454,5 \quad 1500 \quad 16700 \quad 100830 \right. \qquad (26)$$
$$\left. 126673,2 \quad 6250 \quad 134333,3 \quad 849600 \quad 3020143 \quad 3207215 \right|.$$

Значення об'єму тривимірної фігури (рис. 2, *б*), обмеженої двома інтерполянтами $y_k = f_k^2[x_1, x_2], k = \overline{1,2}$ 2-го степеня від двох змінних, а також прямими

$x_1 = b = 20$, $x_1 = a = -10$ та $x_2 = d = 95$, $x_2 = c = 46$ з урахуванням (19), (24) та (26) становить:

$$V = \Delta \overline{T}^{4}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=c}}^{\substack{x_1=b\\ x_2=d}} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \Delta \overline{C}^{\mathrm{т}} = 9062{,}16.$$

Значення об'єму тривимірної фігури, обчислене за формулами трапецій з кроком $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 5$, становить $V = 9056{,}12$ куб. од., що практично збігається з отриманим вище результатом.

Висновки

1. Встановлено, що для більшості практичних задач обчислення інтегралів не завжди вдається виразити первісну від підінтегральної функції через елементарні функції. В інженерних розрахунках підінтегральна функція часто задається таблицею її значень для певних значень аргумента.

2. Наведено метод чисельного інтегрування табличної функції від двох змінних з використанням многочлена Тейлора, який дає змогу обчислити означені одинарні інтеграли за кожною зі змінних і означений подвійний інтеграл за двома змінними. Обчислення означеного одинарного інтеграла за кожною змінною зводиться до множення виразу, який є різницею між рядками Тейлора (n+1)-го степеня в заданих межах (кінцевій та початковій), на відповідну матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти. Обчислення означеного подвійного інтеграла за двома змінними зводиться до множення виразу, який є різницею між рядками Тейлора (n+2)-го степеня в заданих межах (кінцевій та початковій), на відповідну матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти.

3. Розроблено алгоритм обчислення площ плоских фігур (перерізів тривимірної фігури), заданих табличними функціями від двох змінних з використанням многочлена Тейлора n-го степеня. Для обчислення площі плоскої фігури потрібно помножити рядок Тейлора (n + 1)-го степеня на матрицю інтегрування для однієї зі змінних, а також на вираз, який є різницю між стовпцями коефіцієнтів інтерполянт (верхньої та нижньої), які описують гладкі криві плоскої фігури.

4. Розроблено алгоритм обчислення об'єму тривимірної фігури, опуклі поверхні якої задано табличними функціями від двох змінних з використанням многочлена Тейлора n-го степеня. Для обчислення об'єму цієї фігури потрібно помножити рядок Тейлора (n + 2)-го степеня на матрицю інтегрування для двох

змінних, а також на вираз, який є різницю між стовпцями коефіцієнтів інтерполянт (верхньої та нижньої), які описують опуклі поверхні тривимірної фігури.

Література

1. Грицюк Ю.І. Чисельне інтегрування табличних функцій для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора / Ю.І. Грицюк, Я.П. Драган // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2016. – Вип. 26.3. – С. 350-360.
2. Данко П.Е. Вычислительная математика в упражнениях и задачах : учеб. пособ. [для студ. ВТУЗов] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Ч. І. – Изд. 3-е, [перераб. и доп.]. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1980. – 320 с.
3. Данилина Н.И. Вычислительная математика : учебн. пособ. / Н.И. Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша, Г.Л. Смирнов. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1985. – 472 с.
4. Davis, P. J., & Rabinowitz, P. (1984). Methods of Numerical Integrations, (2nd ed.). New York – San Francisco – London: Academic Press, 456 p.
5. Sugihara, Masaaki. (1987, February). Methods of numerical integration of oscillatory functions by the DE-formula with the Richardson extrapolation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 17(1–2), 47-68. doi:10.1016/0377-0427(87)90038-0
6. Фильц Р.В. Алгоритм вычисления на ЭВМ многочлена Тейлора и его производных / Р.В. Фильц, М.В. Коцюба, Ю.И. Грицюк // Электромеханика : Изв. вузов. – 1991. – № 5. – С. 5-10.
7. Фільц Р.В. Наближення таблично заданих функцій (інтерполяція та апроксимація). Конспект лекцій з предмету "Математичні задачі електромеханіки" для студ. спец. 1801 "Електромеханіка" / Р.В. Фільц. – Львів : Вид-во ДУ ЛП, 1995. – 60 с.

Надійшла до редакції 26.06.2016 р.

***Грыцюк Ю.И., Драган Я.П.* Использование многочлена Тейлора для численного интегрирования табличных функций от двух независимых переменных**

Показана возможность численного интегрирования табличных функций двух переменных с использованием многочлена Тейлора. Выяснено, что во многих практических задачах не всегда удается выразить первообразную от подынтегральной функции через элементарные функции. Разработан метод численного интегрирование табличной функции, позволяющий вычислить определенные одинарные интегралы по каждой из переменных, а также определенный двойной интеграл по двум переменным. С использованием многочлена Тейлора разработан алгоритм вычисления площадей сечений трехмерной фигуры и ее объема, заданной двумя табличными функциями от двух переменных.

Ключевые слова: произвольная точка пространства независимых переменных; многочлены Тейлора; табличная функция от двух переменных; численное интегрирование табличных функций; определенные одинарные интегралы по каждой из переменных; определенный двойной интеграл по двум переменным.

***Gryciuk Yu.Iv., Dragan Ya.P.* Use of Taylor Polynomial for Numerical Integration of Table Functions of two Independent Variables**

The possibility of numerical integration of table functions of two variables with the use of Taylor polynomial is shown. It is found out that in many practical problems it is not always that one succeeds in expressing the primitive of a subintegral function in terms of elementary functions. A method of numerical integration of a table function which enables us to calculate definite unary integrals with respect to each the variables, as well as to calculate a definite double integral with respect to its two variables is developed. With the use of Taylor polynomial, an algorithm of calculation of areas of sections and of volume of a three-dimensional geometrical solid which is deter-mined by means of two table functions of two variables is developed.

Keywords: arbitrary point of a space of independent variables; Taylor polynomial; table function of two variables; numerical integration of table functions; definite unary integrals with respect to each the variables; definite double integral with respect to two variables.