метры динамического процесса системы трубчатое тело-сплошная среда в зависимости от физико-механических характеристик системы и скорости движения сплошной среды.

***Ключевые слова:*** трубчатое тело, колебание, сплошной поток однородной среды, волновое число, амплитуда, частота.

***Sokil M.B., Verkhola I.I., Sokil B.I., Khytryak O.I.*** **Nonlinear Vibrations of System Flexible Tubular Body-continuous Stream of Environment which oves along It**

Dynamic processes in a tubular body along which the continuous stream of homogeneous environment moves with permanent speed on condition that a tubular body cooperates with resilient basis, are investigated. The mathematical model of nonlinear vibrations of the indicated system is built. It shows by itself nonlinear differential equalization of the second order with the derivatives of part, which contains the mixed derivative of linear and time variables. The presence of the last partly takes into account motion of continuous environment along a tubular body and to it basic difficulties are related at the construction of decision of mathematical model. In basis of researches the base results of dynamics of longitudinally mobile continuous environments and generalization on their base of asymptotic methods of nonlinear mechanics are fixed. In an aggregate the marked allowed to get correlations which describe the basic parameters of dynamic process of the system tubular body-continuous environment in dependence on physical-mechanical descriptions of the system and speed of movement of continuous environment.

***Keywords:*** tubular body, vibration, continuous stream of homogeneous environment, wave-number, amplitude, frequency.

***УДК 534.1***

# ВПЛИВ РУХОМОГО ВАНТАЖУ НА КОЛИВАННЯ ПОЗДОВЖНЬО-РУХОМОЇ СТРІЧКИ

***О.І. Хитряк***[1]

Досліджено коливання гнучкої одновимірної стрічки, вздовж якої рухається, зі сталою за величиною швидкістю, деяка точкова маса. Побудовано математичну модель динаміки вказаної системи, яка описується диференціальним рівнянням із частинними похідними другого порядку та однорідними крайовими умовами. Особливістю зазначеного диференціального рівняння є те, що воно містить мішану похідну лінійної та часової змінних. Ця похідна враховує рух стрічки та точкової маси (вантажу) і з нею пов'язані основні труднощі побудови розв'язку диференціального рівняння руху.

***Ключові слова:*** поздовжньо-рухома стрічка, рухомий вантаж, мішана похідна, амплітуда, частота, методи збурень, хвильова теорія руху.

**Вступ**. Дослідження впливу рухомих вантажів на динаміку основи, по якій цей вантаж переміщується, є одним із важливих питань динаміки конструкцій [1]. Такі механічні системи трапляються у різних сферах інженерної діяльності та машинобудування. Прикладами структурних елементів, які призначені для підтримки рухомих тіл, є стрічки конвеєрних ліній чи транспортерів, мости, різного роду крани, канати, рейки, мостові та злітно-посадкові смуги, трубопроводи [2]. Вивчення перелічених механічних систем отримало особливу увагу в продовж останніх десятиліть [3-6]. Проте у зазначених працях дослідження проведено в основному із використанням чисельних методів.

[1] доц. О.І. Хитряк, канд. техн. наук – Національна академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного





Особливістю опису процесів із врахуванням рухомих вантажів, на відміну від статичних, є те що постійно змінюється точка їх контакту із несучою основою. Рух вантажу вздовж деякого тіла впливає на основні характеристики коливань останнього, а отже, і на динамічні зусилля та динамічні реакції (у разі взаємодії гнучкого тіла із зовнішніми об'єктами). Саме тому у низці праць досліджують проблему моделювання цього навантаження. Основними підходами до зазначеного моделювання є опис рухомого вантажу у вигляді рухомої сили, рухомої маси чи осцилятора [7].

Відомо, що для транспортування різних об'єктів широко використовують поздовжньо-рухомі тіла. Їх математичними моделями є одновимірні поздовжньо-рухомі одновимірні гнучкі елементи [8]. Урахування вказаного руху у поєднанні з рухомим осцилятором призводить до якісно нової математичної моделі динаміки системи "гнучка поздовжньо-рухома стрічка –рухомий вантаж". Задачі такого типу у літературі розглянуто частково. У зв'язку з наявністю мішаної похідної у математичній моделі зазначеної системи для її дослідження, навіть за значних спрощень, не вдається застосувати відомі класичні методи інтегрування [9]. У цій роботі для вирішення поставленої задачі побудовано математичну модель, що описує коливальні процеси у механічній системі "гнучка поздовжньо-рухома стрічка – рухомий вантаж" із врахуванням нелінійних силових чинників. Для її аналізу використано ідею описання коливального процесу поздовжньо-рухомих одновимірних тіл, у вигляді накладання хвиль різних довжин [10, 11] та однакових частот. Зазначене у поєднанні із основними ідеями методів збурень [12] дало змогу визначити основні параметри динамічного процесу залежно від базових характеристик поздовжньо-рухомого одновимірного тіла, його швидкості та властивостей рухомого вантажу.

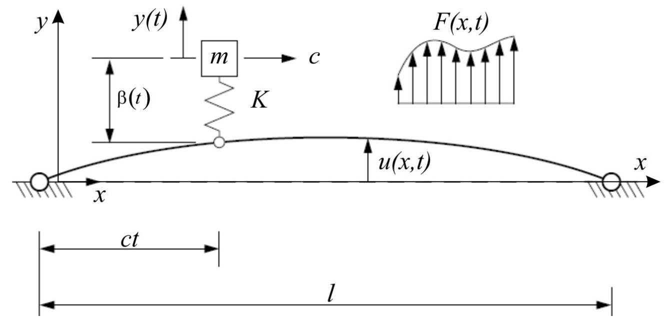


***Рис. Розрахункова модель і розподіл сил, які діють на систему "гнучка поздовжньо-рухома стрічка – рухомий вантаж"***

**Постановка задачі та методика розв'язування**. Розглянемо стрічку довжиною $l$, що рухається у поздовжньому напрямку із сталою швидкістю $V$ і характеризується силою попереднього натягу $T$. По стрічці із відносною швидкістю $c$ переміщується осцилятор (вантаж) із жорсткістю $K$ масою $m$ (рис.). Стрічка характеризується певними нелінійними силовими чинниками, а також на неї діє зовнішнє розподілене по довжині збурення. Вони описуються функцією $F(x,t)$. Систему координат вибираємо таким чином, що її початок збігається із лівим кінцем рухомої стрічки, вісь абсцис – із недеформованим (горизонтальним) положенням і її додатний напрямок скерований за напрямком поздовжнього руху стрічки. Переміщення $u(x,t)$ центра перерізу стрічки з координатою $x$, у напрямку перпендикулярному до її недеформованого положення в довільний момент часу $t$, визначається із рівняння [1]

$$\rho u_{tt}(x,t)-Tu_{xx}(x,t)=F(x,t)+q_c(t)\delta(x-x_c), \qquad (1)$$

де: $\rho$ – густина матеріалу стрічки; $\delta(x-x_c)$ – дельта функція; $q_c(t)=K\beta(t)$ – реакція зв'язку, яка характеризує вплив рухомого осцилятора на збурену систему в точці $x_c=(c+V)t$ контакту рухомої стрічки та рухомого осцилятора, причому $\beta(t)=y(t)-u(x_c,t)$ – відносне переміщення між збуреною системою та осцилятором; $y(t)$ – переміщення точкової відносно положення стаціонарної рівноваги осцилятора у точці $x_c$. Переміщення $y(t)$ і $u(x,t)$ є абсолютними, їх вимірюють у нерухомій системі координат.

Вважаємо, що в точках дотикання стрічки до шківів, обертання яких забезпечують її рух у поздовжньому напрямку, відсутні поперечні переміщення. Це дає змогу долучити до рівняння (1) крайові умови

$$u(0,t)=u(0,l)=0\,. \qquad (2)$$

Вважаємо, що рух осцилятора задовольняє співвідношення

$$m\ddot{y}(t)=-q_c(t)-mg=-K\beta(t)-mg\,, \qquad (4)$$

де $g$ – прискорення вільного падіння.

Підставляючи (4) в (1), отримуємо

$$\rho u_{tt}(x,t)-Tu_{xx}(x,t)=F(x,t)-(m\ddot{y}(t)+mg)\delta(x-x_c)\,. \qquad (5)$$

Враховуючи, що $y(t)=\beta(t)+u(x_c,t)$, отримуємо

$$\dot{y}(t)=\dot{\beta}(t)+u_x\dot{x}+u_t,\ \ddot{y}(t)=\ddot{\beta}(t)+\left(\dot{x}\right)^2u_{xx}+2\dot{x}u_{xt}+u_{tt}+u_x\ddot{x}\,. \qquad (6)$$

У випадку $x=x_c$ то $\dot{x}=c+V$ і $\ddot{x}=0$ (6) набуває вигляду

$$\ddot{y}(t)=\ddot{\beta}(t)+\left(\left(c+V\right)^2u_{xx}+2(c+V)u_{xt}+u_{tt}\right)\Big|_{x=x_c}. \qquad (7)$$

Підставляючи (7) у (5), отримуємо

$$\rho u_{tt}(x,t)-Tu_{xx}(x,t)=F(x,t)-m(\ddot{\beta}(t)+(\left(c+V\right)^2u_{xx}+2(c+V)u_{xt}+u_{tt})\Big|_{x=x_c}+g)\delta(x-x_c)\,. \qquad (8)$$

Рівняння (8) та (5) є еквівалентні, оскільки вони описують коливання системи "гнучка поздовжньо-рухома стрічка – рухомий вантаж". Проте останнє є більш прийнятне для вивчення задачі про рухомий осцилятор. Хоча, з іншого боку, рівняння (5) є простішим для побудови розв'язку, оскільки у його правій частині явно не зв'язані просторові та часові координати типу.

Якщо коефіцієнт жорсткості $K$ прямує до безмежності, тоді відносне зміщення $\beta(t)$ стає нульовим, а це означає, що $\ddot{\beta}(t)=0$ у будь-який момент часу і рівняння (8) набуває вигляду





$$\rho u_{tt}(x,t)-Tu_{xx}(x,t)=F(x,t)-m(((c+V)^2u_{xx}+2(c+V)\cdot u_{xt}+u_{tt})\Big|_{x=x_c}+g)\delta(x-x_c). \qquad (9)$$

Потрібно зазначити, що добуток $K\beta(t)$ має бути скінченним, незважаючи на те, що $K\to\infty,\ \beta(t)\to 0$.

Рівняння (9) описує коливання поздовжньо-рухомої стрічки для випадку, коли по ній безвідривно рухається вантаж. Воно записано у змінних Лагранжа. Зважаючи на наявність поздовжнього руху стрічки, більш доцільно використати координати Ейлера [11] і подати (9) у вигляді

$$u_{tt}+2Vu_{xt}-(\alpha^2-V^2)u_{xx}=\varepsilon f(u,u_x,u_t,u_{xx},...)-$$
$$-\varepsilon M(((c+V)^2u_{xx}+2(c+V)u_{xt}+u_{tt})\Big|_{x=x_c}+g)\delta(x-x_c), \qquad (10)$$

де $\alpha^2=T\rho^{-1}$, $\rho^{-1}F(x,t)=\varepsilon f(u,u_x,u_t,u_{xx},...)$, $m\rho^{-1}=\varepsilon M$, $\varepsilon$ – малий параметр.

Визначимо розв'язок рівняння (10) за крайових умов (2). Наявність малого параметра у правій частині дає змогу, відповідно до методу Крилова-Боголюбова-Митропольського [12] разом із поєднанням хвильової теорії руху [10-13] її розв'язок у першому наближенні подати у вигляді

$$u\left(x,t\right)=a\left(\cos\left(\kappa x+\omega t+\phi\right)-\cos\left(\chi x-\omega t-\phi\right)\right)+\varepsilon U_1\left(a,x,\psi\right), \qquad (11)$$

де: $\psi=\omega t+\phi$; $\phi$ – початкова фаза коливань; $a$ – амплітуда; $U_1\left(a,x,\psi\right)$ – невідома функція з періодом $2\pi$ по $\psi$, яка узгоджується із (4). Вважаємо, що функція $U_1\left(a,x,\psi\right)$ та її частинні похідні по $\psi$ та $x$ до другого порядку включно, не містять у розкладах доданків пропорційних головним гармонікам. Хвильові числа $\kappa$ й $\chi$ та частота $\omega$ обчислюються за формулами [10-12]:

$$\kappa=k\pi\alpha^{-1}l^{-1}\left(\alpha+V\right),\ \chi=k\pi\alpha^{-1}l^{-1}\left(\alpha-V\right),\ \omega=k\pi\alpha^{-1}l^{-1}\left(\alpha^2-V^2\right),\ k=1,2,....$$

Для систем із обмеженими геометричними розмірами вважається [11], що нелінійні сили впливають тільки на закони зміни в часі амплітуди і частоти динамічного процесу. Ці закони у першому наближенні будемо задавати за допомогою звичайних диференціальних рівнянь [11, 13]:

$$\dot{a}=\varepsilon\Lambda(a),\quad \dot{\psi}=\omega+\varepsilon\Xi(a). \qquad (12)$$

Функції $\Lambda(a),\Xi(a)$ визначаємо, виходячи з того, що співвідношення (11) повинно задовольняти з необхідним ступенем точності рівняння (10), якщо у нього на місце параметрів $a$ та $\psi$ підставити функції, визначені із системи (12).

Підставляючи (11) у рівняння (10), враховуючи (12), після прирівнювання коефіцієнтів за однакових степенів $\varepsilon$, отримуємо диференціальне рівняння першого наближення, яке зв'язує невідомі функції $U_1\left(a,x,\psi\right)$, $\Lambda(a),\Xi(a)$ із відомими величинами

$$L\left(U_1\right)=\omega^2\left(U_1\left(a,x,\psi\right)\right)''_{\psi\psi}+2V\omega\left(U_1\left(a,x,\psi\right)\right)''_{x\psi}-\left(\alpha^2-V^2\right)\left(U_1\left(a,x,\psi\right)\right)''_{xx}=$$
$$=\tilde{f}\left(a,x,\psi\right)+2\Psi(x)\Lambda(a)+2a\Theta(x)\Xi(a), \qquad (13)$$
$$\Psi(x)=\left[\left(\omega+\kappa V\right)\sin\left(\kappa x\right)+\left(\omega-\chi V\right)\sin\left(\chi x\right)\right];$$
$$\Theta(x)=\left[\left(\omega+\kappa V\right)\cos\left(\kappa x\right)-\left(\omega-\chi V\right)\cos\left(\chi x\right)\right];$$

$$\tilde{f}\left(a,x,\psi\right) = f(a,x,\psi) - M\left\{g + a\cos(\kappa x+\psi)\left(-\kappa^2(c+V)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. -2\kappa\omega(c+V) - \omega^2\right) + a\cos(\chi x-\psi)\left(\chi^2(c+V)^2 - 2\chi\omega(c+V)+\omega^2\right)\right\}\delta(x-x_c);$$
$$f(a,x,\psi) = f(u,u_x,u_t,u_{xx},\ldots)\Big|_{u=u_0}.$$

Зважаючи на те, що $U_1\left(a,x,\psi\right)$ та її частинні похідні не містять у розкладах доданків пропорційних головним гармонікам, отримуємо із (13) систему алгебраїчних рівнянь відносно $\Lambda(a)$ та $\Xi(a)$.

$$\Psi(x)\Lambda(a) + \Theta(x)\Xi(a) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(a,x,\psi)\cos\psi d\psi;$$
$$\Theta(x)\Lambda(a) - a\Psi(x)\Xi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(a,x,\psi)\sin\psi d\psi. \qquad (14)$$

З (14), після усереднення по лінійній змінній, визначаємо:

$$\Lambda(a) = \frac{-1}{2\pi l\Delta}\int_0^l\int_0^{2\pi} f(a,x,\psi)\left(\Psi(x)\cos\psi + \Theta(x)\sin\psi\right)d\psi dx - \frac{Ma\pi\Delta_1}{2l\Delta}\sin((c+V)(\kappa+\chi)t);$$
$$\Xi(a) = \frac{1}{2a\pi l\Delta}\int_0^l\int_0^{2\pi} f(a,x,\psi)\left(\Psi(x)\sin\psi - \Theta(x)\cos\psi\right)d\psi dx -$$
$$-\frac{M}{2l\Delta}\left(\Delta_2-\Delta_3\right)\cos\left((c+V)(\kappa+\chi)t\right), \qquad (15)$$

де: $\Delta = (\omega+\kappa V)^2 + (\omega-\chi V)^2$; $\Delta_1 = (\omega+\kappa V)(\omega-\chi(c+V))^2 - (\omega-\chi V)(\omega+\kappa(c+V))^2$;

$$\Delta_2 = (\omega+\kappa V)(\omega+\kappa(c+V))^2 - (\omega-\chi V)(\omega-\chi(c+V))^2;$$
$$\Delta_3 = (\omega-\chi V)(\omega+\kappa(c+V))^2 + (\omega+\kappa V)(\omega-\chi(c+V))^2.$$

**Висновки**. Отримані аналітичні залежності визначають вплив рухомого вантажу на поздовжньо-рухому основу. Результати цих досліджень можуть бути основою для проектування динамічних систем, що мають своєю задачею транспортування вантажів. Їх часткові випадки дають змогу дослідити як вплив рухомого об'єкта на нерухому основу, так і нерухомого вантажу на рухому основу.

Показано, що хвильова теорія руху може бути ефективно адаптована до поздовжньо-рухомих одновимірних систем із рухомою масою. Отримано аналітичні залежності для визначення амплітуди та частоти коливань системи "гнучка поздовжньо-рухома стрічка – рухомий вантаж". Відповідно до цих співвідношень, вага вантажу, у першому наближенні, не пливає на частоту та амплітуду коливань несної стрічки.

## Література


1. Yang B. On the problem of a distributed parameter system carrying a moving oscillator / B. Yang, C.A. Tan, L.A. Bergman // Dynamic and control of distributed systems. – Cambridge university press. – 1998. – Pp. 69-94.
2. Zrnić, N.Đ., Hoffmann, K. and Bošnjak, S.M.: Modelling of dynamic interaction between structure and trolley for mega container cranes, Mathematical.
3. Ogunyebi S.N. On The Response of a Non -Uniform Beam Transvered by Mobile Distributed Loads / S.N. Ogunyebi, J. Sunday // Global Journal of Science Frontier Research Mathematics & Decision Sciences. – 2012. – Vol. 12, Issue 3. – Pp. 145-149.







4. Nguyen X.T. Bending vibration of beam elements under moving loads with considering vehicle braking forces / X.T. Nguyen // Vietnam Journal of Mechanics. – VAST. – 2011. – Vol. 33, Issue 1. – Pp. 27-40.
5. Volkan Kahya Dynamic Analysis Of Composite Sandwich Beams Under Moving Mass / Volkan Kahya, Ayman S. Mosallam // Journal of Engineering Sciences. – KSU. – 2011. – Vol. 14(1). – Pp. 18-25.
6. Alba Sofi Dynamic analysis of suspended cables carrying moving oscillators / Sofi Alba, Muscolino Giuseppe // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – Pp. 6725-6743.
7. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками / А.И. Весницкий. – М. : Изд-во "Прима", 2001. – С. 320-326.
8. Sandilo S. H. On Aspects of Asymptotics for Axially Moving Continua / S.H. Sandilo – Pakistan. – 2013. – Pp. 100-123.
9. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М. : Изд-во "Высш. шк.", 1970. – 710 с.
10. Мартинців М.П. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження / М.П. Мартинців, Б.І. Сокіл, М.Б. Сокіл // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість : міжвідомч. наук.-техн. зб. – Львів : Вид-во УкрДЛТУ. – 2003. – Вип. 28. – С. 81-89.
11. Сокіл М.Б. Згинні коливання гнучких елементів систем приводів і структура розв'язку їх математичних моделей / М.Б. Сокіл // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2012. – Вип. 22.1. – С. 144-147.
12. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М. : Изд-во "Наука". – 1974. – 501 с.
13. Хитряк О. Асимптотичний метод у дослідженні впливу періодичних сил на нелінійні коливання гнучких елементів приводу / О. Хитряк, М. Сокіл // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – Сер.: Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – Львів : Вид-во НУ "Львівська політехніка". – 2011. – Вип. 45. – С. 57-61.


*Надійшла до редакції 29.06.2016 р.*

### *Хытряк О.И.* Влияние подвижного груза на колебания продольно-подвижной ленты

Исследованы колебания гибкой одномерной ленты, вдоль которой движется, с постоянной по величине скоростью, некоторая точечная масса. Построена математическая модель динамики указанной системы, которая описывается дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка и однородными краевыми условиями. Особенностью указанного дифференциального уравнения является то, что оно содержит смешанную производную линейной и временной переменных. Эта производная учитывает движение ленты и точечной массы (груза) и с ней связаны основные трудности построения решения дифференциального уравнения движения.

***Ключевые слова:*** продольно-подвижная лента, подвижный груз, смешанная производная, амплитуда, частота, методы возмущений, волновая теория движения.

### *Khytriak O.I.* The Influence of Moving Load on Oscillation of Axially-moving String

The vibrations of flexible one-dimensional axially moving string, along with some point mass moves with constant size of speed, are investigated. The mathematical model of the dynamics of this system, which is described by the differential equation of second order partial derivatives and homogeneous boundary conditions, is built. The feature of the indicated differential equalization is that it contains the mixed derivative of linear and time variables. The indicated derivative partly takes into account motion of one- dimensional string and point mass (load) and difficulties of differential equations of motion solutions construction connected with it.

***Keywords***: axially moving string, boundary conditions, differential equation, motion.