

роводжуваності є інструментом вагового оцінювання якості ПЗ на основі метрик програмного коду – *LOC, HV, CC*. Метрики забезпечують напрям подальшого пошуку рішень, на жаль, не отримавши універсального рецепту побудови якісного ПЗ. Є потреба у проведенні емпіричного оцінювання ефективності *АОП*. *АОП* має використовуватися як доповнення до *ООП*.

Література

1. Rajiv D. Banker. Software complexity and maintenance costs / Srikanth M. Datq Chris F. Kemer, Dani Zweig // Communications of the ACM. – 2003. – № 11. – Pp. 81-94.
2. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование / Г. Буч. – СПб. : Изд-во "Бином", Невский диалект, 1998. – 560 с.
3. Gary Pollice, Professor of Practice, Worcester Polytechnic Institute. Aspect-Oriented Programming: What is it good for. [Electronic resource]. – Mode of access [http://www.ibm.com/ developerworks/rational/library/mar06/pollice/](http://www.ibm.com/developerworks/rational/library/mar06/pollice/).
4. Tkachuk M. Knowledge-Based Approach to Effectiveness Estimation of Post Object-Oriented Technologies in Software Maintenance / Mykola Tkachuk, Konstantyn Nagorny, Rustam Gamzayev. // Proc. of the 11th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications : Integration, Harmonization and Knowledge Transfer, Lviv, Ukraine, 2015. – Pp. 23-32.
5. Сафонов В.О. Аспектно-ориентированное программирование / В.О. Сафонов. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского госуд. ун-та, 2011. – 104 с.
6. Нагорный К.А. Разработка и применение методики оценки эффективности пост объектно-ориентированных технологий / К.А. Нагорный // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – № 10. – С. 23-28.
7. Нагорный К.А. Архитектурні моделі та метрики оцінювання складності застосування пост объектно-орієнтованих технологій розроблення програмних систем / М.М. Литвинчук, К.А. Нагорний, М.В. Ткачук // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. – Сер.: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2012. – № 1015. – С. 234-245.
8. Яковина В.С. Аналіз використання аспектно-орієнтованого програмування як засобу підвищення надійності програмного забезпечення / В.С. Яковина, Д.В. Федасюк, Н.М. Мамроха. // Інженерія програмного забезпечення. – 2010. – № 2. – С. 23-28.
9. Mourad A. An aspect-oriented approach for the systematic security hardening of code / A. Mourad, M. Laverdière, M. Debbabi // Elsevier Advanced Technology. – 2008. – № 3. – С. 101-114.
10. Uir Kulesza. Quantifying the Effects of Aspect-Oriented Programming: A Maintenance Study / Uir Kulesza, Cludio Sant'Anna, Alessandro Garcia, Roberta Coelho, Arndt von Staa, Carlos Lucena // ICSM '06. 22nd IEEE International Conference on Software Maintenance, Philadelphia, PA, Sept. 24-27, 2006.
11. Maintainability Index. [Electronic resource]. – Mode of access http://www.verifysoft.com/en_maintainability.html.

Надійшла до редакції 10.10.2016 р.

Левус Е.В., Витоль О.М., Бода О.Б. Оценивание аспектной реорганизации программного кода по характеристике сопровождаемости

Рассмотрена проблема сложности сопровождения программного обеспечения. Проанализировано применение аспектно-ориентированного программирования для обеспечения качественной характеристики программ – сопровождаемость программного обеспечения. Проведено исследование на примере прототипа программной системы онлайн-банкинга для случая объектно-ориентированной и аспектно-ориентированной реализации. Полученные результаты свидетельствуют о повышении индекса сопровождения для случаев локализации сквозной функциональности – логирование, обработка исключительных ситуаций, проверка прав доступа. Индекс сопровождения программного обеспечения можно рассматривать как весовую оценку на основе количества строк кода (*LOC*), цикломатической сложности (*CC*) и объема Холстеда (*HV*). Есть необходимость в совершенствовании весового оценивания поддержки программного обеспечения.

Ключевые слова: сопровождение программного обеспечения, модуль системы, объектно-ориентированное программирование, аспектно-ориентированная реализация, сквозная функциональность, метрики кода, индекс сопровождения.

Levus Ye.V., Vitol O.M., Boda O.B. The Evaluation of the Aspect Reorganization of Program Code according to Maintenance Characteristic

The problem of the complexity of the software maintenance is considered. Application of the aspect-oriented programming for providing qualitative characteristics of programs such as maintainability is analysed. Our investigation is based on Online Banking System's prototype (for Object-oriented case and Aspect-oriented implementation). Obtained results assure increasing maintainability index for localization of bi-directional functionality that is logging, processing exceptional cases, and authorization. Maintainability index can be considered as the weighted estimation based on the number lines of code (*LOC*), cyclomatic complexity (*CC*) and Halstead complexity measures (*HV*).

Keywords: software maintenance, system module, object-oriented programming, aspect-oriented implementation, cross-cutting functionality, code metric, maintainability index.

УДК 556-12

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ КОНВЕКТИВНОГО РУХУ ІЗ ВНУТРІШНІМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

В.В. Негрич¹, Я.М. Дем'ячук², В.Р. Процюк³

Досліджено гідродинамічну стійкість в'язкої нестисливої рідини, розміщеної між вертикальними паралельними поверхнями. Розглянуто вільну конвекцію з парним профілем для швидкості. Для дослідження використано варіаційний принцип нерівноважної термодинаміки – метод локального потенціалу. Визначено критичне значення критерію Грасгофа, залежно від числа Прандтля та значення хвильового числа, за якого відбувається перехід від простої до складної дисипативної структури. Також враховано кут нахилу шару відносно гравітаційного поля. Представлений метод розрахунків з використанням тільки однієї пробної парної функції швидкості та однієї непарної для температури дає змогу отримати задовільні результати.

Ключові слова: конвективний рух рідини, локальний потенціал, дисипативні структури, критерій Грасгофа, критерій Прандтля.

Вступ. У практичних умовах процеси доцільно проводити у високо-інтенсивному стаціонарному режимі. Тому їх проводять в умовах, далеких від рівноважних, у нелінійній області залежності потоків від термодинамічних сил. У цьому випадку проявляється велика різноманітність станів. У міру збільшення величини сил, які накладаються на систему, в ній відбуваються зміни, нагромадження яких призводить до швидкої перебудови режиму перебігу необоротних процесів; ці зміни зумовлюють нестійкість у вигляді просторових дисипативних структур.

Незважаючи на велику різноманітність стаціонарних станів, форм нестійкості і дисипативних структур у сильно нерівноважних умовах, їх об'єднують деякі спільні закономірності поведінки систем, віддалених від рівноваги, які добре вписуються у фундаментальну теорію необоротних процесів.

Аналіз сучасних досягнень розвитку наявної проблеми. На відміну від звичайної проблеми Бенарда, конвективний рух рідини, яка міститься між двома вертикальними площинами, відбувається за нескінченно малої різниці тем-

¹ доц. В.В. Негрич, канд. хім. наук – Івано-Франківський НТУ нафти і газу;

² доц. Я.М. Дем'ячук, канд. техн. наук – Івано-Франківський НТУ нафти і газу;

³ доц. В.Р. Процюк, канд. техн. наук – Івано-Франківський НТУ нафти і газу

ператур. У такій системі, за деяких критичних значень градієнта температури, настає вторинна конвенція, яка проявляється у переході одного типу ламінарного руху в інший, або безпосередньо в турбулентний.

Мета роботи – методом локального потенціалу вивчити границю стійкості ламінарної течії рідини із внутрішнім джерелом тепла.

Виклад основного матеріалу дослідження. Температурні поля спричиняють виникнення у термодинамічній системі дисипативних структур, організація яких залежить від величини температурного градієнта; за малих температурних градієнтів виникають прості дисипативні структури, а за досягненням критичних градієнтів відбувається перехід до просторових і просторово-часових дисипативних структур [1].

Розглянемо шар нестисливої в'язкої рідини між двома вертикальними площинами з накладеним на них градієнтом температури. Розміри пластинок будемо вважати у багато разів більшими за товщину шару рідини між пластинами. Вісь "x" декартової системи приймаємо перпендикулярною пластинам, а вісь "z" спрямовуємо вверх, початок координат розміщуємо посередині між пластинами. Для спрощення системи рівнянь, які описують конвективний рух рідини, використовуємо наближення Буссінесна. У задачі, яку розглядаємо, градієнт температури перпендикулярний напрямку гравітаційного поля. За таких умов механічна рівновага неможлива і за малого значення градієнта температури виникає конвективний рух, інтенсивність якого зростає із підвищенням температури, а за досягнення критичних значень градієнта температури, збурення призводять до переходу одного типу ламінарного руху в інший або безпосередньо в турбулентний рух.

Рівняння збереження для такої системи у векторній формі запишемо [2]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)V = -\frac{1}{\rho}\nabla\rho + \nu\nabla^2V + g\beta T_j, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla T = \lambda\nabla^2T + \frac{Q}{\rho \cdot C_p}, \quad (1)$$

де: λ – коефіцієнт теплопровідності; Q – потужність внутрішніх джерел теплоти. Цю систему рівнянь можна представити в безрозмірній векторній формі:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + Gr(V\nabla)V = -\nabla\rho + \nabla^2V + T_j, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + Gr(V\nabla)T = \frac{1}{Pr}\nabla^2T, \quad (2)$$

де $Gr = \frac{g\rho qh^2}{2\nu}$ і $Pr = \frac{\nu}{\lambda}$ числа Грасгофа і Прандтля. Використовують такі одини-

ці: h – довжини; $\frac{h^2}{\nu}$ – час; $\frac{qh^4g\beta}{2\nu}$ – швидкість; $\frac{qh^2}{2}$ – температура; $\frac{\rho g\beta h^3}{2}$ – тиск.

Рівняння допускають такі стаціонарні рішення для швидкості і температури [1]:

$$v_s = \frac{\cos\alpha}{60}(1 - 6x^2 + 5x^4), \quad (3)$$

$$T_s = 1 - x^2. \quad (4)$$

Запишемо систему рівнянь (1) у збуреному вигляді:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Gr[(v\nabla)v_s + (v_s\nabla)v] = -\nabla p + \nabla^2v + T_j, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + Gr[v\nabla T_s + v_s\nabla T] = \frac{1}{Pr}\nabla^2T. \quad (5)$$

Проекції цих рівнянь на координатні осі мають вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x - v_s \frac{\partial v_x}{\partial z} Gr - T \sin\alpha, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_z - \left(v_x \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)Gr + T \cos\alpha, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T \frac{1}{Pr} - \left(v_x \frac{\partial T_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial T}{\partial z}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Систему рівнянь (6) використовують для отримання локального потенціалу. Кожне з рівнянь цієї системи домножуємо на відповідні прирости, складаємо їх і враховуючи, що

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v_x}{\partial t} \delta v_x &= -\frac{\partial v_x^0}{\partial t} \delta v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta v_x)^2, \\ -\frac{\partial v_z}{\partial t} \delta v_z &= -\frac{\partial v_z^0}{\partial t} \delta v_z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta v_z)^2, \\ -\frac{\partial T}{\partial t} \delta T &= -\frac{\partial T}{\partial t} \delta T - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta T)^2, \end{aligned}$$

після інтегрування по частинах отриманого виразу маємо:

$$L = \int_{-1}^1 \left(\begin{aligned} &\frac{\partial v_x^0}{\partial t} v_x + \frac{\partial v_z^0}{\partial t} v_z + \frac{\partial T^0}{\partial t} T + \frac{\partial p^0}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial z} v_z - \\ &-\frac{\partial^2 v_x^0}{\partial x^2} v_x - T^0 v_z \cos\alpha - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} v_x + T^0 v_x \sin\alpha - \\ &-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} v_z - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} v_z + v_x^0 \frac{\partial v_x}{\partial x} v_z Gr + v_s \frac{\partial v_z^0}{\partial z} v_z Gr - \\ &-\frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T^0}{\partial x^2} T - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} T + v_x^0 \frac{\partial T_s}{\partial x} T Gr + v_s \frac{\partial T^0}{\partial z} T Gr + \\ &+ v_s \frac{\partial T^0}{\partial z} T Gr \end{aligned} \right) dx. \quad (7)$$

Використовуючи збурення у формі:

$$\left. \begin{aligned} u' &= G e^{ikz} e^{\sigma t}, & u'^0 &= G^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ w' &= \frac{i}{k} \frac{dG}{dx} e^{ikz} e^{\sigma t}, & w'^0 &= \frac{i}{k} \frac{dG_0}{dx} e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ T' &= \theta e^{ikz} e^{\sigma t}, & T'^0 &= \theta^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ p' &= \eta e^{ikz} e^{\sigma t}, & p'^0 &= \eta^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t} \end{aligned} \right\}$$

і пробні функції

$$\left. \begin{aligned} G &= A_1(1-x^2)^2 + A_2x(1-x^2)^2, \\ \theta &= B_1(1-x^2)(5-x^2) + B_2x(1-x^2)(7-3x^2), \\ G^0 &= A_1^0(1-x^2)^2 + A_2^0x(1-x^2)^2, \\ \theta^0 &= B_1^0(1-x^2)(5-x^2) + B_2^0x(1-x^2)(7-3x^2) \end{aligned} \right\}$$

локальний потенціал набуде вигляду:

$$\begin{aligned} L &= 0,813i\lambda A_1A_1^0 + 0,074i\lambda A_2A_2^0 + 25,194B_1B_1^0 + 5,541i\lambda B_2^0B_2 + \\ &+ 2,438\frac{i\lambda}{k^2}A_1A_1^0 + 0,813\frac{i\lambda}{k^2}A_2^0A_2 + \frac{1}{k^2}25,6A_1^0A_1 + \frac{1}{k^2}18,28A_2^0A_2 + \\ &+ 1,625A_2^0A_2 - \frac{i}{k}0,044GrA_1A_1^0 \cos \alpha + \frac{i}{k}0,0114GrA_2A_2^0 \cos \alpha - \\ &- \frac{i}{k}0,00985GrA_1^0A_1 \cos \alpha + \frac{i}{k}0,00227GrA_2A_2^0 \cos \alpha - \\ &- \frac{i}{k}3,657A_1B_2^0 \cos \alpha + \frac{i}{k}1,625A_2B_1 \cos \alpha + 4,876A_1^0A_1 + \\ &+ k^20,813A_1^0A_1 + k^20,039A_2^0A_2 + 0,00758ikGrA_1A_1^0 \cos \alpha + \\ &+ 4,47A_1B_1^0 \sin \alpha + 0,628A_2B_2^0 \sin \alpha + \frac{1}{Pr}54,857B_2^0B_2 + \\ &+ \frac{1}{Pr}62,171B_1^0B_1 + \frac{k^26}{315Pr}B_1^0B_1 + 5,541\frac{k^2}{Pr}B_2^0B_2 - \\ &- 0,96GrA_2^0B_1 - 1,256GrA_1B_1 + \\ &+ 0,175ikGrB_1B_1^0 \cos \alpha - 0,0072ikGrB_2^0B_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Сталі $A_1, A_1^0, A_2, A_2^0, B_1, B_1^0, B_2, B_2^0$ вибираємо так, щоб виконувалися умови

$$\left(\frac{\partial L}{\partial A_1} \right)_{A_2, A_1^0, B_1, B_2, B_2^0, A_2^0, B_1^0} = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial A_2} \right)_{A_1, A_1^0, B_1, B_1^0, B_2, B_2^0, A_2^0} = 0, \\ \left(\frac{\partial L}{\partial B_1} \right)_{A_1, A_1^0, A_2, A_2^0, B_1^0, B_2, B_2^0} = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial B_2} \right)_{A_1, A_1^0, B_1, B_1^0, A_2, B_2^0, A_2^0} = 0. \quad (9)$$

Звідси за використання додаткових умов:

$$A_1^0 = A_1; B_1^0 = B_1; A_2^0 = A_2; B_2^0 = B_2$$

впливає

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A_1} &= (4,8760 + 25,6\frac{1}{k^2} + 0,8126k^2 - 0,0541\frac{i}{k}Gr \cos \alpha + 0,0075ikGr \cos \alpha + \\ &+ 0,8126\lambda + 2,4380\frac{i\lambda}{k^2})A_1 + 4,4698B_1 \sin \alpha - 3,6571\frac{i}{k}B_2 \cos \alpha \\ \frac{\partial L}{\partial A_2} &= (1,6252 + 18,2857\frac{1}{k^2} + 0,0738k^2 + \frac{1}{k^2}0,8126\lambda + 0,0739i\lambda + \\ &+ 0,0033\frac{i}{k}Gr \cos \alpha)A_2 + 1,6253\frac{i}{k}B_1 \cos \alpha + 0,6279B_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_1} = -0,9604GrA_2 + \left(62,1714\frac{1}{Pr} + 25,1936\frac{k^2}{Pr} + 0,1750ikGr \cos \alpha + \right. \\ \left. + 25,1936i\lambda \right) B_1 \\ \frac{\partial L}{\partial B_2} = -1,2559GrA_1 + \left(54,8571\frac{1}{Pr} + 5,5411\frac{k^2}{Pr} - 0,0144ikGr \cos \alpha + \right. \\ \left. + 5,541i\lambda \right) B_2.$$

Для існування нетривіальних рішень цієї системи рівнянь потрібно, щоб

$$\begin{vmatrix} A_{11} + i\lambda B_{11} + & 0 & F_{13} \sin \alpha & D_{14} ik \cos \alpha \\ + ikC_{11} Gr \cos \alpha & & & \\ 0 & A_{22} + i\lambda B_{22} + & F_{23} ik \cos \alpha & D_{24} \sin \alpha \\ & + ikC_{22} Gr \cos \alpha & & \\ 0 & d_{22} Gr & a_{11} + b_{11} i\lambda + & 0 \\ & & + s_{11} ik Gr \cos \alpha & \\ d_{11} Gr & 0 & 0 & a_{22} + b_{22} i\lambda + \\ & & & + s_{22} ik Gr \cos \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

де $A_{11} = 4,8760k^2 + 25,6 + 0,8126k^4$; $A_{22} = 0,0739k^4 + 1,6252k^2 + 18,2857$;

$B_{11} = 0,8126k^2 + 2,4380$; $B_{22} = 0,8126 + 0,0739k^2$; $C_{11} = 0,0075k^2 - 0,0541$;

$a_{11} = \frac{1}{Pr}(62,1714 + 25,1936k^2)$; $d_{11} = -1,2559$; $C_{22} = 0,0053$; $F_{13} = 4,4698k^2$;

$b_{11} = 25,1936$; $a_{22} = \frac{1}{Pr}(54,8571 + 5,5411k^2)$; $D_{24} = 0,6279k^2$; $b_{22} = 5,5411$; $S_{11} = 0,1750$;

$S_{22} = 0,0144$.

З вимоги рівності нулю цього визначника, отримуємо характеристичне рівняння

$$\begin{aligned} E_{40}Gr^4 \cos^4 \alpha + E_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + E_{13}i\lambda^3Gr \cos \alpha + E_{04}\lambda^4 + \\ + E_{20}Gr^2 \cos^2 \alpha + E_{11}\lambda Gr \cos \alpha + E_{20}Gr^2 \sin^2 \alpha + E_{02}i\lambda^2 + E_{00} + \\ + i \left(N_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + N_{03}\lambda^3 + N_{12}\lambda^2Gr \cos \alpha + \right) = 0 \\ + N_{21}i\lambda Gr^2 \cos^2 \alpha + N_{10}Gr \cos \alpha + N_{01}\lambda \end{aligned} \quad (12)$$

Коефіцієнти $E_{40}, E_{30}, E_{13}, E_{04}, E_{20}, E_{11}, E_{20}, E_{02}, E_{00}, N_{30}, N_{03}, N_{12}, N_{21}, N_{10}, N_{01}$ визначають за такими залежностями:

$$\begin{aligned} E_{40} &= K^4 C_{22} S_{11} S_{22} C_{11}; E_{04} = B_{22} b_{11} b_{22} B_{11}; \\ L_{31} &= K^3 (C_{22} S_{11} S_{22} B_{11} + C_{22} S_{11} b_{22} C_{11} + b_{11} C_{22} S_{22} C_{11} + S_{11} B_{22} S_{22} C_{11}); \\ E_{22} &= K^2 (C_{22} S_{11} b_{22} B_{11} + b_{11} C_{22} S_{22} B_{11} + S_{11} B_{22} S_{22} B_{11} + B_{22} b_{11} S_{22} C_{11} + b_{11} b_{22} C_{22} C_{11} + \\ &+ S_{11} B_{22} b_{22} C_{11}); \end{aligned}$$

$$E_{11} = -K \left(\begin{array}{l} b_{11}C_{22}a_{22}A_{11} + S_{11}B_{22}a_{22}A_{11} + B_{22}a_{11}S_{22}A_{11} + A_{22}b_{11}S_{22}A_{11} + C_{22}a_{11}b_{22}A_{11} + \\ + A_{22}S_{11}b_{22}A_{11} + C_{22}a_{11}a_{22}B_{11} + A_{22}S_{11}a_{22}B_{11} + S_{22}A_{22}a_{11}B_{11} + B_{22}a_{11}a_{22}C_{11} + \\ + A_{22}b_{11}a_{22}C_{11} + A_{22}b_{22}a_{11}C_{11} - d_{11}A_{11}F_{23}b_{22} - F_{23}a_{22}d_{11}B_{11} + B_{22}a_{11}D_{14}d_{22} + \\ + A_{22}b_{11}D_{14}d_{22} \end{array} \right);$$

$$E_{20} = -K^2 \left(\begin{array}{l} C_{22}a_{22}S_{11}A_{11} + C_{22}a_{11}S_{22}A_{11} + A_{22}S_{11}A_{11}S_{22} - d_{11}F_{23}a_{22}C_{11} + C_{22}a_{11}a_{22}C_{11} + \\ + A_{22}S_{11}a_{22}C_{11} + S_{22}A_{22}a_{11}C_{11} - d_{11}F_{23}S_{22}A_{11} + d_{11}F_{23}D_{14}d_{22} \end{array} \right);$$

$$E_{02} = -(B_{11}b_{11}a_{22}A_{11} + B_{22}a_{11}b_{22}A_{11} + A_{22}b_{11}b_{22}A_{11} + B_{22}a_{11}a_{22}B_{11} + A_{22}b_{11}a_{22}B_{11} + A_{22}b_{22}a_{11}B_{11});$$

$$E_{13} = K (B_{22}b_{11}S_{22}B_{11} + b_{11}b_{22}C_{22}B_{11} + S_{11}B_{22}b_{22}B_{11} + B_{22}b_{11}b_{22}C_{11});$$

$$E'_{20} = -F_{13}D_{24}d_{11}d_{22}; \quad L_{00} = A_{11}a_{11}a_{22}A_{22};$$

$$N_{01} = B_{22}A_{11}a_{11}a_{22} + A_{22}A_{11}b_{11}a_{22} + A_{22}A_{11}b_{22}a_{11} + A_{22}B_{11}a_{11}a_{22};$$

$$N_{10} = K (C_{22}a_{11}a_{22}A_{11} + A_{22}S_{11}A_{11}a_{22} + S_{22}A_{22}a_{11}A_{11} - d_{11}F_{23}a_{22}A_{11} + A_{22}a_{11}a_{22}C_{11} - A_{22}a_{11}D_{14}d_{22});$$

$$N_{03} = -(B_{22}A_{11}b_{11}b_{22} + B_{22}B_{11}b_{11}a_{22} + B_{22}B_{11}a_{11}b_{22} + A_{22}b_{11}b_{22}B_{11});$$

$$N_{21} = -K^2 \left(\begin{array}{l} C_{22}S_{11}b_{22}A_{11} + b_{11}C_{22}S_{22}A_{11} + S_{11}B_{22}S_{22}A_{11} + C_{22}a_{22}S_{11}B_{11} + C_{22}a_{11}S_{22}B_{11} + \\ + A_{22}S_{11}S_{22}B_{11} - d_{11}F_{23}S_{22}B_{11} + b_{11}C_{22}a_{22}C_{11} + S_{11}B_{22}a_{22}C_{11} + B_{22}a_{11}S_{22}C_{11} + \\ + A_{22}b_{11}S_{22}C_{11} + C_{22}a_{11}b_{22}C_{11} + A_{22}S_{11}b_{22}C_{11} - d_{11}F_{23}b_{22}C_{11} - b_{11}C_{22}D_{14}d_{22} + \\ + B_{22}S_{11}D_{14}d_{22} \end{array} \right);$$

$$N_{30} = -K^3 \left(\begin{array}{l} C_{22}S_{11}S_{22}A_{11} + C_{22}a_{22}S_{11}C_{11} + C_{22}a_{11}S_{22}C_{11} + A_{22}S_{11}S_{22}C_{11} + \\ + d_{11}F_{23}S_{22}C_{11} - C_{22}S_{11}D_{14}d_{22} \end{array} \right);$$

$$N_{22} = K^2 F_{23} D_{14} d_{11} d_{22}.$$

Прирівнюючи до нуля окремо дійсну та уявні частини цього рівняння маємо:

$$E_{40}Gr^4 \cos^4 \alpha + E_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + E_{13}i\lambda^3 Gr \cos \alpha + E_{04}\lambda^4 + E_{20}Gr^2 \cos^2 \alpha + E_{11}\lambda Gr \cos \alpha + E'_{20} \sin^2 \alpha + E_{02}i\lambda^2 + E_{00} = 0, \quad (13)$$

$$N_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + N_{03}\lambda^3 + N_{12}\lambda^2 Gr \cos \alpha + N_{21}i\lambda Gr^2 \cos^2 \alpha + N_{10}Gr \cos \alpha + N_{01}\lambda = 0 \quad (14)$$

Розв'язок цієї нелінійної системи алгебраїчних рівнянь дає змогу визначити границю стійкості конвективного руху рідини у широкому інтервалі зміни кута α і числа Прандтля Pr . Покажемо, що навіть якщо обмежитися тільки однією парною пробною функцією для швидкості і однією непарною для температури, отримаємо цілком задовільний результат аж до $\alpha = 50^\circ$. Задамо, наприклад, для швидкості і температури такими функціями:

$$G_1 = A_1(1-x^2)^2; \quad v_1 = B_1x(1-x^2)(7-3x^2). \quad (15)$$

Для цього випадку характеристичне рівняння запишемо у вигляді

$$A_1a_{11} + \lambda(A_1b_{22} + B_{11}a_{22}) + ikGr\lambda \cos \alpha (S_{22}A_{11} + a_{22}C_{11}) + \lambda^2 b_{22}B_{11} + ikGr \cos \alpha (S_{22}B_{11} + b_{22}C_{11} - d_{11}D_{14}) + k^2 C_{11} S_{22} Gr^2 \cos^2 \alpha = 0 \quad (16)$$

Прирівнюючи до нуля дійсну і уявну частини характеристичного рівняння, маємо систему рівнянь:

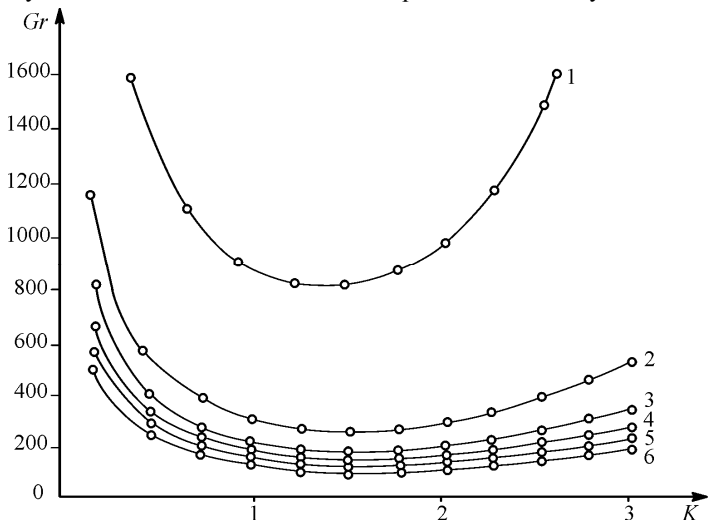
$$\left. \begin{array}{l} A_1a_{22} - B_{11}b_{22}\lambda^2 - \lambda Gr \cos \alpha (C_{11}a_{22} + S_{22}A_{11}) - k^2 S_{22} C_{11} Gr^2 \cos^2 \alpha = 0 \\ (B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11})\lambda + kGr \cos \alpha (B_{11}S_{22} + b_{22}C_{11}) - d_{11}D_{14}Gr \cos \alpha = 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

Виключивши з цієї системи λ , отримуємо рівняння, яке дає змогу визначити критичне число Грасгофа як функцію хвильового числа і числа Прандтля

$$k^2 Gr^2 \cos^2 \alpha \left[\begin{array}{l} B_{11}b_{22} \frac{(A_{22}S_{22} + a_{22}C_{11} - d_{22}D_{14})^2}{(B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11})^2} + \\ + (C_{11}b_{22} + S_{22}B_{11}) \frac{-A_{11}S_{22} - a_{22}C_{11} + d_{22}D_{14}}{B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11}} \end{array} \right] - A_{11}a_{22} = 0. \quad (18)$$

Розв'язання рівняння (18) виконували для різних значень хвильового числа (k) 0,2-3, чисел Прандтля – від 1 до 13 з кроком 3 і кута нахилу α шару до напрямку гравітаційного поля – до 50° через кожні 10° .

Рівняння (18) у координатах $Gr-k$ представляє нейтральну криву, за допомогою якої площина розділяється на область стійкого і нестійкого конвективного руху (рис. 1-3). Ця крива володіє екстремальними властивостями, за певних значень хвильового числа на нейтральній кривій залежно від числа Прандтля і кута нахилу появляється більш або менш виражений максимум.



Рису. 1. Нейтральна крива для вертикального шару за різних значень числа Прандтля: крива 1 за $Pr=1$; 2-4; 3-7; 4-10; 5-13; 6-16. Система із внутрішніми джерелами теплоти

Фізичні властивості рідини, які визначають величину числа Прандтля і орієнтація шару в гравітаційному полі істотним чином впливають на хід нейтральної кривої. За значення числа Прандтля, що дорівнює одиниці, крива має чітко виражений мінімум (див. рис. 1-3).

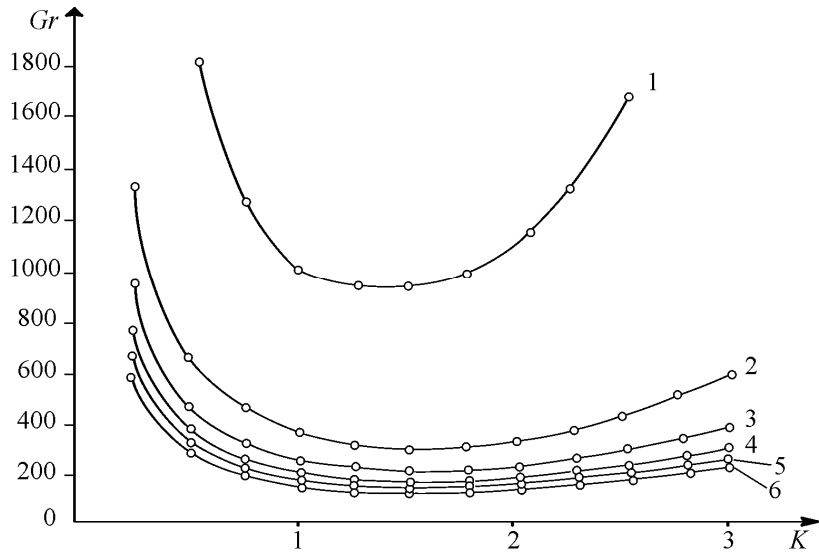


Рис. 2. Вплив Pr на залежність $Gr - K$ при $\alpha = 30^\circ$: крива 1 за $Pr = 1$; 2 – 4; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 13; 6 – 16. Профіль швидкості парний

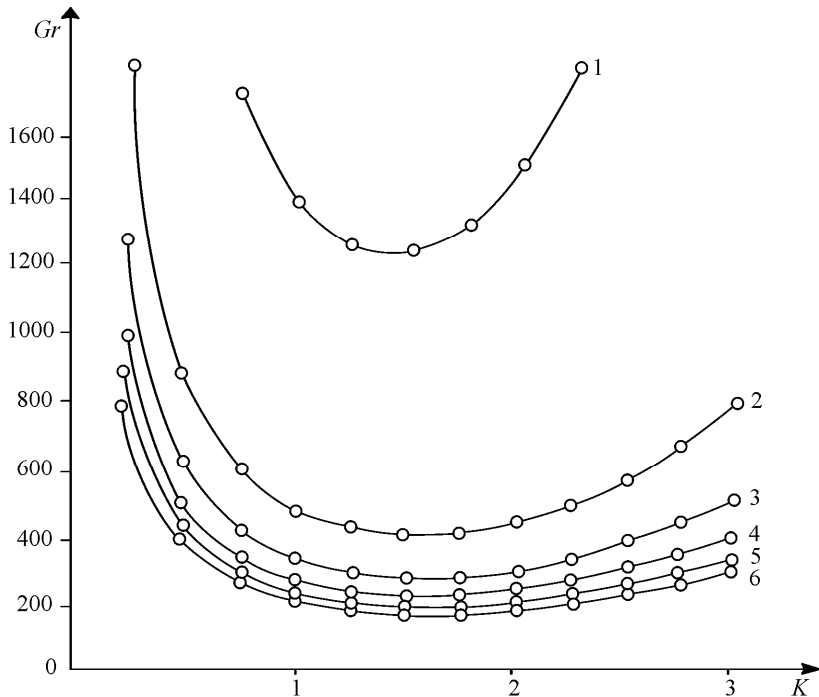


Рис. 3. Залежність $Gr - K$ для різних Pr : крива 1 за $Pr = 1$; 2 – 4; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 13; 6 – 16. Профіль швидкості парний

Зі збільшенням Pr мінімум на нейтральній кривій стає дедалі розмитішим. Вплив кута нахилу на хід нейтральної кривої для значення $Pr = 1, 10$ і 16 показано на рис. 1-3. Зі зміною кута нахилу шару малов'язкої рідини границя стійкості змінюється у широких межах, але хід кривої зберігається. При переході до більш в'язких рідин зміна кута нахилу впливає значно більшою мірою. Так при $Pr = 1$ для критичного хвильового числа якщо відхилення від шару від вертикалі становить 50° , критичне число Грасгофа збільшується на 450, а за $Pr = 16$ – тільки на 80. Вплив кута нахилу на границю стійкості конвективного руху стає дедалі відчутнішим за віддаленням від вертикалі.

Значення мінімального числа Грасгофа залежно від числа Прандтля для шести його значень наведено в табл.

З табл. випливає, що кут нахилу і число Прандтля істотно впливають на мінімальне критичне значення числа Грасгофа. Залежність мінімального числа Грасгофа від числа Прандтля має антибатний характер, тоді як вплив кута нахилу на границю стійкості – симбатний. Хвильове число виявляється мало відчутним до зміни кута нахилу шару і числа Прандтля. Вплив числа Прандтля на границю стійкості виявляється більшою мірою в області малих його значень, а за значень Pr , які наближаються до $16 \cdot Gr$, змінюється незначно. Вплив хвильового числа на хід $Gr - Pr$ кривої проявляється так: зі збільшенням до його критичного значення крива зміщується вниз, із подальшим збільшенням хвильового числа – вгору.

Табл. Мінімальні критичні числа Грасгофа залежно від кута нахилу шару і числа Прандтля

α°	0	10	20	30	40	50
Pr = 1						
Gr	810,90	823,44	862,98	936,39	1058,60	1261,21
K_m	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45
Pr = 4						
Gr	265,18	269,27	282,20	306,20	346,17	412,55
K_m	1,53	1,52	1,53	1,53	1,53	1,53
Pr = 7						
Gr	182,92	185,74	194,56	211,22	238,79	284,58
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 10						
Gr	147,02	149,29	156,45	169,76	192,92	228,72
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 13						
Gr	126,07	128,01	134,16	145,57	164,57	196,13
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 16						
Gr	112,01	113,73	119,20	129,33	146,22	179,25
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55

Висновок. Методом локального потенціалу знайдено границю стійкості вільного конвективного руху відносно стоячих збурень нестисливої в'язкої рідини з парним профілем швидкості, зумовленим зовнішнім температурним градієнтом, перпендикулярним до напрямку гравітаційного поля.

Результати, отримані з використанням тільки однієї пробної функції для швидкості і температури, достатньо добре узгоджуються з даними, отриманими кінетичним методом з використанням складних пробних функцій [1].

Література

1. Gerchuni G.Z. Convective stability of incompressible fluid / G.Z. Gerchuni, E.M. Zhukovitsky, A.A. Yakimov // J. Heat Mass Transfer. – 1974. – Vol. 17. – 717 p.
2. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, И.М. Жуховицкий. – М. : Изд-во "Наука", 1972. – 392 с.
3. Гершуни Г.З. Результаты, отримані з використанням тільки однієї пробної функції для швидкості і температури / Г.З. Гершуни, Е.Н. Жуховицкий // Вісник вузів : зб. наук. техн. праць. – Сер.: Фізика. – 2014. – № 45. – С. 43-48.
4. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика / В.Г. Левич. – М. : Изд-во АН СССР, 1952, 132 с.
5. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / П. Гленсдорф, И. Пригожин. – М. : Изд-во "Мир", 1973. – 273 с.
6. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика / Р.Л. Стратонович. – М. : Изд-во "Наука", 1985. – 480 с.

Надійшла до редакції 23.10.2016 р.

Negrich V.V., Demyanchuk Ya.M., Protsiuk B.G. Исследование устойчивости конвективного движения с внутренним источником тепла

Исследована гидродинамическая устойчивость вязкой несжимаемой жидкости, размещенной между вертикальными параллельными поверхностями. Рассмотрена свободная конвекция с четным профилем скорости. Для исследования использован вариационный принцип неравновесной термодинамики – метод локального потенциала. Определено критическое значение критерия Грасгофа в зависимости от числа Прандтля и значение волнового числа, при котором происходит переход от простой до сложной диссипативной структуры. Также учитывался угол наклона слоя по отношению к гравитационному полю. Представленный метод расчетов с использованием только одной пробной парной функции скорости и одной непарной для температуры позволяет получить удовлетворительные результаты.

Ключевые слова: конвективное движение жидкости, локальный потенциал, диссипативные структуры, критерий Грасгофа, критерий Прандтля.

Negrich V.V., Demyanchuk Ya.M., Protsiuk B.G. The Study of the Stability of Convective Motions with Internal Heat Source

We investigate the hydrodynamic stability of viscous incompressible fluid located between vertical parallel surfaces. We considered free convection with an even velocity profiles. For research we have used variational principle of non-equilibrium thermodynamics – the method of local potential. We have determined the critical Grashof criterion, depending on the Prandtl number and value of the wave number at which the transition from simple to complex dissipative structures occurs. We have also taken into account the angle of the layer with respect to the gravitational field. The method of calculation using only one test feature provides comparable results with the kinetic method, using complex test functions.

Keywords: convective fluid motion, the local potential, dissipative structures, criteria Grashof, Prandtl number.

УДК 519.63:004.02

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ РЕКУРЕНТНОЮ НЕЙРОННОЮ МЕРЕЖЕЮ ДЖОРДАНА

Н.О. Семеншин¹

Наведено методологію для розв'язання крайових задач, а саме одновимірного рівняння теплопровідності за допомогою штучної нейронної мережі Джордана. Подано результати моделювання. В основі функції вартості мережі лежить метод Кранка-Ніколсона. Архітектура представленої нейронної мережі має класичну рекурентну структуру, але з додатковим прихованим шаром, в якій вузли вихідного шару мають ефект на вузли попереднього шару.

Для навчання рекурентної мережі використано розширення стандартного алгоритму зворотного поширення – "Зворотного поширення в часі". Його отримано шляхом розгортання часових операцій мережі в багатшарову мережу прямого поширення, топологія якої розширюється на один шар на кожному часовому кроці. Мета навчання нейронної мережі є зведення до мінімуму неув'язки вихідного рівняння, яке описує проблему.

Ключові слова: рівняння теплопровідності, рекурентна нейронна мережа Джордана, метод Кранка-Ніколсона, метод "Зворотного поширення в часі".

Вступ. Точні розв'язки крайових задач для рівнянь з частинними похідними, до яких зводиться дослідження багатьох важливих проблем практики, вдається знайти тільки для часткових випадків. Тому, зазвичай, такі задачі розв'язують наближено. Серед відомих числових методів для розв'язування крайових задач особливо поширеними є метод скінченних різниць (МСР) та метод скінченних елементів (МСЕ). Ідея цих методів полягає в редукції вихідної диференціальної задачі до дискретної: область зміни неперервного аргументу замінюють дискретною множиною точок (вузлів), які називають сіткою. Згідно з МСР, замість функцій неперервного аргументу розглядають функції дискретного аргументу, визначені у вузлах сітки. Похідні, що містять диференціальні рівняння і граничні умови, замінюють різницевиими співвідношеннями. Теоретичною основою МСЕ є варіаційні методи.

Незважаючи на розвиток сучасної обчислювальної техніки, досягнення у програмному забезпеченні, конструюванні нових алгоритмів, є багато задач, які або не піддаються розв'язуванню наявними числовими методами, або не досягають задовільної точності. Це зумовило пошук нових ідейно методів, зокрема нейромережевих [1-5]. Набутий досвід застосування штучних нейронних мереж до розв'язування крайових задач математичної фізики і зумовив написання цього дослідження.

Мережа Джордана. В цій роботі розглядаємо одновимірну задачу теплопровідності для ізотропних матеріалів із граничними умовами першого типу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, \quad 0 < t < T \\ u(0, t) = C_1, \\ u(L, t) = C_2, \end{cases}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = C_0(x), \quad 0 < x < L$$

¹ інж. Н.О. Семеншин – НЛТУ України, м. Львів