4. ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ГАЛУЗІ

УДК 538.56:519.21

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ НЕГАРМОНІЧНИХ СИГНАЛІВ І СИСТЕМ ТА АТЕВ-ФУНКЦІЇ

***Я.П. Драґан*[1], *І.М. Дронюк*[2]**

Зроблено огляд застосувань оператора узагальненого зсуву для теорії негармонічних сигналів. Класична теорія комунікації та опрацювання сигналів спирається на формальний апарат теорії гармонічних функцій. Але для мереж спеціального призначення важливо використовувати інші функції. Показано, що у комунікації широко використовували розклади за функціями Беселя, а також будь-яка повна ортонормована система функцій може бути використана для розкладу у ряди чи інтеграли, що є відповідниками й узагальненнями розкладів Фур'є. Тому запропоновано за базис розкладу використати Ateb-функції, як ортонормовану систему. Показано, що так введені перетворення утворюють алгебру.

Ключові слова: оператор узагальненого зсуву, Ateb-функції, алгебра Ateb-перетворень, мережі спеціальної комунікації.

Вступ. Суть комунікації та її теорія. Класична теорія комунікації та опрацювання сигналів (так називають фізичні процеси, тобто змінні у часі фізичні величини, за допомогою яких передають відомості, числові дані і т.ін.) спирається на формальний апарат теорії гармонічних функцій, тобто синусоїдних та косинусоїдних чи на теоретично створене і запроваджене Ойлером комплексне стисле подання узагальнення їх у вигляді комплексних експонент: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $\cos x=1/2(e^{ix}+e^{-ix})$, $\sin x=1/2(e^{ix}-e^{-ix})$. Підставою його була, як наголошують дослідники, природність генерування таких коливних процесів та не менш істотна в цьому разі обставина, що гармонічні коливання (як переносники даних, відомостей, тобто різного типу повідомлень) проходять через інваріантні, тобто зі сталими в часі характеристиками та параметрами, без спотворень. Такі системи перетворення тільки послаблюють їх (тобто зменшують амплітуди) і затримують в часі: $A[ae^{ix}]=cAae^{i(x-\varphi)}$, де A – оператор системи, a – амплітуда, φ – затримка (фаза), c – коефіцієнт. А через пов'язання гармонічних функцій формулами Ойлера або вираження їх за допомогою комплексних експонент, дають змогу використовувати для розрахунків операторний метод Гевісайда [8, 15], коли операцію диференціювання трактують як формальну змінну чи пов'язане з ним традиційне для математиків перетворення Лапласа [20].

У середині XX ст. фахівці широко дискутували можливості створення засобів комунікації (для різних цілей, зокрема й для т. зв. спеціальних), базованих на використанні – замість традиційних до того і безапеляційно панівних гармонічних носіїв – сигналів у вигляді інших ортогональних функцій. Зокрема, з'ясовано, що система функцій Гаара-Уолша має таку важливу перевагу, що можна побудувати теорію фільтрів, для реалізації яких немає потреби використовувати індуктивності, як у разі звичайних частотних фільтрів. Тому свого часу в багатьох країнах були побудовані і успішно функціонували багатоканальні системи на таких функціях [13, 17, 22]. Це зумовило потребу розроблення питань модуляції (латин. modulor розмірюю – тут у значенні зміна в часі параметрів регулярного фізичного процесу) сигналів-носіїв та каналів і мереж, пересилання їх з метою отримати певні "виграші" [8]. Зокрема, як тепер кажуть, з метою "захисту інфомації" (чи радше захисту пересилання даних).

Під мережею розуміли розгалужену систему, створену шляхом послідовного та паралельного сполучення ланок загалом негармонічних переносників. Для аналізу їх за еталон досить узяти мережу з усіма ланками із однотипними переносниками, тобто такими, що елементарні переносники в них є ті самі. В іншому разі, потрібен узгоджувач-перетворювач "координат" [7] або, як ще називають їх, координатних чи базових функцій сигналів-переносників.

1. Пошуки нових можливостей. Лінійні інваріантні в часі електричні кола тільки послаблюють і затримують гармонічні (тобто синусоїдні та косинусоїдні, а в теорії в силу формул Ейлера – комплексно-екпонентні) функції. Вони мали переваги над іншими повними системами ортогональних функцій доти, доки резистори, ємності та індуктивності були основними елементами електричних кіл перетворювачів. Електричні радіолампи і транзистори забезпечили можливість генерувати такі несинусоїдні коливання як послідовності імпульсів, але до виникнення інтегральних схем реалізувати цю можливість було економічно невигідно.

Використання синусоїдних функцій теоретично забезпечує формальний математичний апарат аналізу Фур'є, що у висліді дає перехід від функцій часу до функцій частоти, тобто Фур'є-образів функцій часу. Але, з іншого боку, подання через синусоїдні функції є тільки одним із багатьох можливих. Бо всяка повна ортонормована система функцій може бути використана для розкладу на елементарні складники – розклади у ряди чи інтеграли, що є відповідниками й узагальненнями розкладів Фур'є. Зокрема, у комунікації широко використовували розклади за функціями Беселя. І для багатьох систем функцій є також перетворення, подібні до перетворень Фур'є [8, 13, 17, 22]. Показано, що для них існують методи модуляцій, які відповідають амплітудній, частотній і фазовій модуляції гармонік.

Зокрема, узагальнення поняття частоти дало багато теоретичних результатів, важливих для теорії комунікацій. Ідея його така [15]: частота є параметром, тобто (фізичною) величиною, задання значень якої характеризує об'єкт, і яка є сталою тільки за умов конкретної задачі. Показано [15, 22], що частоту можна інтерпретувати як половину кількості перетинів функцією нульового рівня ("нуля") за одиницю часу. Перетин "нуля" можна означити і для несинусоїдної функції. Для цього запроваджено новий термін φ-частість як половину середньої кількості перетинів нульового рівня за одиницю часу.

Поняття періоду коливань $T=1/f$ і довжини хвилі $\lambda=v/f$ пов'язане з частотою. Тому заміна частоти f на частість φ веде до таких загальніших означень: середній період коливань $T=1/\varphi$ як середня відстань у часі між перетинами нуля, помножена на два; середня довжина хвилі $\lambda=v/\varphi$ – середня відстань у просторі між нулями, помножена на два. Тут v – швидкість розповсюдження нулів.

[1] проф. Я.П. Драган, д-р ф.-м. наук – НУ "Львівська політехніка";
[2] доц. І.М. Дронюк, канд. ф.-м. наук – НУ "Львівська політехніка"

Уже розроблено цифрові пристрої ущільнення та фільтри на бінарних цифрових елементах, носії сигналів у яких описують за допомогою функцій Волша (Walsh) чи Віленкіна-Крестенсона [17, 22], які мають певні переваги (простіші і надійніші за синусоїдні), зокрема просто реалізуються засобами геометричної оптики та інтегральних схем у спеціальних застосуваннях.

Подальшим розвитком ідеї ортогонального подання (розкладу) є розглянуте далі використання для цієї мети запроваджених і досліджених у працях [5-7] *T*-варіантних процесів.

2**. Попередні підсумки пошуків та перспективи Ateb-комунікації**

Як прояв ролі класичної парадигми в науці стало свого часу повсюдне панування концепції коливань (вібрацій, осциляцій, хвиль, гармонік), перетворень Фур'є як подання коливань у вигляді суперпозицій гармонік, а це привело до пошуків причин цього і до того ж, виражених у найзагальнішому вигляді, і переконання, що вони полягають у прийнятій (підсвідомо часто) стабільності речей і процесів, режимів їх перебігу. Такий погляд підкріплявся значними здобутками механіки, електрорадіотехніки, оптики і споріднених з ними галузей. Такі стабільні об'єкти стали називати інваріантними (з лат. invariantis), стаціонарними (з лат. stationarius – непорушний, усталений), коли розглядаються процеси (з лат. processus – порядок проходження).

Можна вважати, що однією з перших монографій, у якій систематизоване, викладене з єдиних позицій і математично строго обґрунтоване широке коло засобів аналізу динамічних, інваріантних у часі систем, як називає їх автор В. Браун, була книжка [2]. А такі динамічні системи, за його словами, займають важливе місце в науці й техніці, зокрема, системи радіолокації, комунікації, управління є такими системами. Термін динамічний (з грец. δυναμίκωσ від δυναμίσ – сила) тут означає пов'язаний з видозмінами. Питання строгого обґрунтування стало пріоритетним перед фізичним сенсом і навіть загальнонауковим значенням цього справді важливого класу систем як об'єкта дослідження. Книжка [23] теж як чисто математична не вказує нові шляхи досліджень, а тільки розуміння минулого [20]. Ця обставина змушує поглянути на всю проблему зі сучасних позицій – трактування цього класу як важливого і навіть певним чином зразкового для вивчення інших – в якомусь сенсі аналогічних класів, але вже коли він (тобто інваріантний клас) стає одним із них: позбавляємося при цьому ореолу унікальності (з лат. unicum – єдине, виняткове), а стає одним із об'єктів, виокремлених за універсальним (з лат. universum – всезагальне) відповідно до тези А. Пуанкаре: "Простота – єдиний ґрунт, що на ньому можна спорудити будівлю наших узагальнень" [18]. Отже, зі зазначеного випливає, що потрібен виразно сформульований критерій, придатний за основу принципу класифікації.

Концептуальний бік його стає зрозумілим з таких фактів. Очевидне співвідношення $U^s e^{it\lambda} = e^{i(t+s)\lambda} = e^{it\lambda} \cdot e^{is\lambda}$, що випливає із сенсу оператора зсуву U^s, який діє як $U^s x(t) = x(t+s)$, тепер для цієї мети можна трактувати так, що $e^{is\lambda}$ за всякого фіксованого s є значенням у цій точці гармоніки $e^{i\lambda\cdot}$, а крапка "$\cdot$" є позначення місця на її аргумент, тобто як $U^s e^{i\lambda\cdot} = e^{i\lambda s} \cdot e^{i\lambda\cdot}$ (у певних дослідженнях,

коли важливо розрізняти функцію як таку та її значення за конкретного значення її аргументу, математики вживають такі позначення; практики ж вважають, що краще вказувати явно аргумент функції, зокрема послугуватись для цього Діраковою символікою [14]: замість $\varphi(\cdot,\lambda)$, а в цьому разі $e^{i\lambda\cdot}$, цей факт подали в термінах ket-вектора – загалом $|\phi(t,\lambda)>$ і відповідно $|e^{it\lambda}>$, де λ – параметр, а t – час як аргумент його). А звідси проглядається ідея – узагальнити (перенести) цей факт на випадки, коли замість гармоніки поставити іншу функцію $\varphi(t, \lambda)$ з параметром λ, яка є власною для іншого ніж диференціювання d/dt порідного оператора L.Ж. Дельсарт [24] брав дещо змодифіковані функції Беселя згідно з вимогою, щоб у нулі вони мали значення 1. Таким шляхом він запровадив т. зв. оператори узагальненого зсуву (ОУЗ) T (з лат. transporto – переношу) зі змінами. У пізніших застосуваннях [8, 13] цієї ідеї за порідний взято оператор Штурма-Ліувілля і за прикладом, що випливає з ідеї Дельсарта, означено формально відповідний ОУЗ виразом $T^s = \phi(s, L)$ через власну функцію порідного оператора: $L \cdot \phi(t,\lambda) = \lambda \cdot \phi(t,\lambda)$. А це рівносильне тому, що $T^s \phi(\cdot,\lambda) = \phi(s,\lambda)\phi(\cdot,\lambda)$.

Оскільки, що показано в монографії [11] і спеціально підкреслено ще у пленарній доповіді [10], лінійність, тобто подання через лінійні комбінації елементів множин, рівносильна лінійній упорядкованості їх, то функцію $x(t)$ трактують як послідовність її значень, позначену (занумеровану) значеннями аргументу t на дійсній осі R, що з використанням δ-функцій (у разі послідовності – відповідно символу Кронекера δ_{jk} [9]) і традиційного подання вектора через його компоненти: $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або ж як лінійну комбінацію $x = \sum x_k \delta_{\cdot k}$ (тепер тут $\{\delta_{\cdot k}, k \in N\}$ – природний базис) подають її у вигляді $x(t) = \int x(s) \cdot \delta(t-s) ds$ (а тут $\delta(t-s), s \in R$ за кожного фіксованого $s \in R$ є імпульс, зосереджений у точці s), а вся впорядкована множина цих імпульсів – гребінка їх, як кажуть техніки, тоді "вибирає" послідовно ці значення $x(t)$ функції $x(\cdot)$). Тому, використовуючи традиційне у фізиків "ортонормування на δ-функцію" нового базису $\{e(t,\lambda), \lambda \in R\}$ простору функцій, що його виражають як $\int e(t,\lambda)\overline{e(s,\lambda)} d\lambda = \delta(t-s)$, матимемо розклад функції за цим базисом у вигляді прямого перетворення

$$x(t) = \int x(s)[\int e(t,\lambda)\overline{e(s,\lambda)} d\lambda] ds = \delta(t-s) = \int e(t,\lambda)[\int x(s)\overline{e(s,\lambda)} ds] d\lambda = \int X(\lambda) e(t,\lambda) d\lambda,$$

де $X(\lambda) = \int x(s)\overline{e(s,\lambda)} d\lambda$ – образ Фур'є функції як відповідне цьому розкладові зворотне перетворення. Ці формули є вираженням розкладу функції за цим новим базисом: аналогом коефіцієнтів розкладу є значення образу – $X(\lambda)$, що має сенс прямого перетворення Фур'є функції $x(\cdot)$, а сам розклад тоді – це зворотне перетворення цього образу.

Наведені тут маніпуляції з використанням недолюблюваного серед загалу математиків формалізму теорії δ-функції підтверджує не тільки сформульовану тезу доповіді [10], але й рацію ініціатора активного використання запровадженої ще Гевісайдом функції похідної від його "сходинки" як виразу увімкнення електричного кола, а названої опісля ім'ям цього дослідника δ-функцією Дірака і факт, що "символічний метод неминуче веде до розриву з історичною лінією розвитку, але зате дає змогу підійти до нових ідей якомога простішим шляхом" [23]. Ідея Дельсарта опирається на факт, установлення якого схематично виглядає так: загальновідому (від 1715 р.) формулу ряду Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

коли аргументом функції є час t, а s – параметром зсуву, тобто зафіксованим моментом часу, та $D=d/dt$ – оператор диференціювання за часом, подають у вигляді

$$f(t+s)=(U^s f)(t)=\sum_{k\in N_0}\frac{s^k}{k!}(D^k f)(t).$$

А тоді, використавши отримуваний із цієї ж формули ряд для розкладу експоненти $e^x=\sum_{k\in N_0}\frac{x^k}{k!}$, цей вираз стисло подають як $(U^s f)(t)=e^{sDf}(t)$, що фактично є поданням сім'ї операторів зсуву U^s через оператор диференціювання як порідний для зсуву, тобто у вигляді експоненти від цього оператора $U^s=e^{sD}$.

І тут вступає в дію факт, зумовлений обставиною, що власними функціями цього оператора (диференціювання) є в силу очевидної рівності $\frac{d}{dt}e^{it\lambda}=i\lambda e^{it\lambda}$, де i – уявна одиниця $i=\sqrt{-1}$, а параметр λ має мати фізичну розмірність, обернену до часу, щоб добуток їх був безрозмірним числом (формально це пишуть так $[\lambda]=[t]^{-1}$ і цю величину як фізичну трактують як частоту гармоніки). Далі треба пригадати, що фізики і техніки звикли зображати коливні процеси тригонометричними функціями $\cos\lambda t$ та $\sin\lambda t$, але вони мають прості вирази через експоненти $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ як образи гармонік за допомогою формул Ойлера. А формально $\cos x=1/2(e^{ix}+e^{-ix})$, $\sin x=1/2(e^{ix}-e^{-ix})$, тому подання розкладів функцій на гармоніки за допомогою прямого і зворотного перетворень Фур'є зручніше і простіше подати через експоненти (принаймні в теоретичних дослідженнях):

$$x(t)=\int X(\lambda)e^{it\lambda}dt,\ X(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int x(s)\overline{e^{i\lambda s}}ds,$$

що просто випливає з подання δ-функції у вигляді $\delta(u)=\frac{1}{2\pi}\int e^{iu\lambda}d\lambda$ та її властивості $x(t)=\int\delta(t-s)x(s)ds$.

Для повноти апарату дослідження, окрім описаного вже придатного для паралельного з'єднання систем і сигналів, потрібен ще апарат для послідовного, що в разі гармонік базується на властивостях згортки функцій, означуваної виразом $x(t)=(x_1\circ x_2)(t)=\int x_1(s)x_2(t-s)ds$, яку за допомогою оператора зсуву аргументу функції на величину s можна подати у вигляді

$$(x_1\circ x_2)(t)=\int x_1(s)\tilde{U}^s x_2(t)ds.$$

Тут ~ – знак ермітового спряження, бо оператор U є унітарним, тобто не змінює квадрат норми функції: $\|x\|^2=\int|x(t)|^2dt$, бо $\int|U^s x(t)|^2dt=\int|x(t+s)|^2dt$ і в силу влас-

тивості інтегралу цей вираз рівний $\int|x(t)|^2dt$, а ермітово спряжений такого оператора дорівнює його оберненому $\tilde{U}=U^{-1}$. Відображення Фур'є теж формально можна так трактувати, що деколи роблять, бо справді

$$\|X\|^2=\int x(s)\overline{x(v)}\left[\int e(s,\lambda)\overline{e(v,\lambda)}d\lambda\right]dv=\|x\|^2$$

(останнє в силу δ-ортонормованості базису). Але природнішим є трактування, що це тотожність Парсеваля-Релея і закон збереження енергії як загальна версія теореми Піфагора.

І не тільки, бо дуже повчальним є трактування цієї тотожності як частковий випадок загальнішого факту, який у разі інваріантних у часі [23] систем виражає властивість оператора згортки: Фур'є-перетворення згортки дорівнює добуткові Фур'є-образів її компонентів. А тому в разі загального перетворення Фур'є через гармоніки воно (таке трактування) теж мало б бути справедливе.

А тепер тут постала проблема: чи можна (і якщо так, то як) перенести цю властивість на інші, окрім гармонік, базиси? На цю думку насправді навели пошуки потрібного матеріалу в математичній літературі, у процесі яких перший з авторів статті [4] як керівник групи теорії сигналів Інституту машинознавства та автоматики АН УРСР (з 1964 р. Фізико-механічного інституту), відкрив для себе публікацію Ж. Дельсарта [24]. Другий автор мав завдання – вивчити можливості використання беселоїд у комунікації, що його поставив йому третій автор – тоді керівник відділу, в якому вони працювали. Ці факти відповідають тезі А. Пуанкаре [18]: "Не так важливо, яку теорему математик довів і яку варварську назву він дав їй, як те, як він до цього всього дійшов". Ця теза, на думку її автора, розкриває сенс наукової творчості.

Позитивна (ствердна) відповідь на цю проблему привела до вироблення концепції T-класів систем і сигналів, базованої на ідеї Дельсарта, як підстави розроблення апарату аналізу систем зі змінними в часі параметрами та нестаціонарних випадкових процесів – моделей сигналів, пріоритет якої засвідчує публікація [4]. На цьому конкретному історичному вже прикладі маємо підтвердження слушності і продуктивності тези про доконечність різнобічного системного аналізу на кожному етапі дослідження та його рекуренційної, а не фіналістичної природи.

3. Підсумок, коментарі та ідея реалізації Ateb-комунікації. Наведемо тепер стислий підсумок аргументації обраного шляху реалізації Ateb-комунікації з використанням алгебри T-класів. Позаяк за традицією, яка пов'язана з теорією електричних кіл, у теорії сигналів і перетворювачів їх зі сталими параметрами головну роль відіграють подання та перетворення їхніх характеристик засобами перетворення Фур'є-Лапласа чи операторного методу Гевісайда, який еквівалентний розширенню кільця функцій із множенням у ньому, означуваним за допомогою виразу

$$(f\circ g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)ds,$$

що його, особливо прикладники, називають згорткою, до поля відношень, теоретики ж подають з використанням оператора зсуву U^s – такого, що

$U^s f(t) = f(t+s)$, де s – величина зміни аргументу функції, трактована як зсув уліво її графіка, і тому є параметром сім'ї $\{U^s, s \in R\}$ операторів, у вигляді

$$(f \circ g)(t) = \int_0^t f(s)\tilde{U}^s g(t)ds, \quad (1)$$

а сам оператор U^s (він унітарний, ~ – символ ермітового спряження $\tilde{U}^s = U^{-s}$) пов'язаний формулою Тейлора, поданою в операторній формі, з оператором диференціювання D виразом

$$U^s = \sum_{k \in N} \frac{s^k}{k!} D^k = e^{sD}$$

та його власними функціями $e^{pt} : De^{pt} = pe^{pt}$, які є водночас власними і для оператора зсуву: $U^s e^{pt} = e^{p(t+s)} = e^{ps} \cdot e^{pt}$, то ці факти навели на думку – узагальнити їх, керуючись відомим фактом, що перетвір (образ) Фур'є (чи Лапласа) є звичайним добутком як функцій перетворів (образів) компонентів згортки. Це т. зв. основна теорема про згортку (ОТЗ). Вона є підставою для побудови алгебри перетворювачів, позаяк згортка описує низкове (послідовне, каскадне) сполучення перетворювачів. І тоді подання мереж як послідовно-паралельних сполучень інваріантних перетворювачів не виходить за межі цієї алгебри і є також "рідним" для подання стаціонарних в імовірнісному сенсі сигналів, тому їх (сигнали та перетворювачі) було об'єднано в один клас – інваріантний (за сталістю їхніх характеристик, лат. invarians – сталий, незмінний), який став зразком для означення інших *T*-класів, як класів варіантності характеристик сигналів та перетворювачів, тип якої стисло виражає оператор зсуву за законом зміни в часі цих характеристик, а в разі інваріантного класу – незмінності, сталості (інваріантності) їх.

Отже, звідси випливає вже, що потрібне узагальнення має мати у своїй основі зазначене і опиратись на відповідній згортці вигляду

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)\tilde{T}^s g(t)\sigma(dt), \quad (2)$$

замість виразу (1). Тобто інваріантний клас стає тепер одним із *T*-класів як "вироджений" і як зразок тлумачення сенсу їх, коли гіпергрупа стає групою звичайних зсувів. Таку можливість відкрило запровадження оператора узагальненого зсуву (ОУЗ) за допомогою ідеї Ж. Дельсарта. Для розроблення потрібного математичного апарату використано, окрім ідеї Дельсарта, дещо доповнену формальну теорію ОУЗ результатами застосувань її до певних чисто математичних задач у працях колишнього харків'янина Б. Левітана [14] та киянина Ю. Березанського [1].

Зокрема, у монографії [8] використано можливість застосування цієї ідеї до розв'язків задачі для оператора Штурма-Ліувілля L_t на півосі: коли розв'язки її знаходять методом Рімана, і тоді для відповідного ОУЗ отримують вираз

$$T_t^s = \frac{1}{2}[U_t^s + \tilde{U}_t^s + \int_{t-s}^{t+s} d_u \omega(t,s;u)]$$

та при цьому справедливе відтак узагальнення формули Тейлора-Дельсарта $T_t^s = \phi_k L_t^k = \phi(s, L_t)$, де $\phi(t,\lambda) = \sum_{k \in N} \lambda_k \phi_k(t)$ – власні функції оператора L_t [8]. Це, окрім усього, наводить на думку, що серед тріади: 1) ортонормованй базис простору сигналів, як їхніх математичних образів; 2) порідний оператор базису та 3) ОУЗ – вирішальним є саме ОУЗ; бо він забезпечує конструкцією згортки, яка є зовнішнім щодо функцій простору множенням, побудову алгебри, як засобу аналізу у часовій області, коли послідовному (каскадному сполученню перетворювачів відповідає саме згортка їхніх часових характеристиках (імпульсних реакцій, як кажуть прикладники).

Власне запровадження поняття *T*-класів стало підставою виокремлення типів часової зміни властивостей сигналів і перетворювачів та обґрунтування математичних засобів аналізу їх на зміну дихотомічного поділу на стаціонарні та нестаціонарні. Специфіку, що її вносить т. зв. дискретний час – мова комп'ютерів і порівняння з випадком континуального (неперервного) часу, проаналізовано в монографії [8], зокрема так недолюблювану математиками, а рідну для фізиків і техніків т. зв. "ортонормованість на дельта-функцію", просто перетлумачено в термінах математично коректної теорії оснащених гільбертових просторів [11]. А беручи до уваги, що Ateb-функції творять обширну множину ортонормованих функцій та існує значне напрацювання з використання їх для захисту поліграфічних документів [16], бачимо потребу і доцільність використання алгебричного трактування ідеї *T*-класів стосовно Ateb-функцій як елементів базисів просторів сигналів для спеціальних комунікаційних задач, продовжуючи традицію праць [7, 13, 17, 22].

Свого часу (1938 р.) Ж. Дельсарт у піонерській праці [24], показав можливість розроблення ефективного апарату аналізу в термінах функцій, відмінних від гармонік, опираючись на узагальнене трактування ряду Тейлора, і для того запровадив надзвичайно продуктивне поняття оператора узагальненого зсуву та гіпергрупи. А також, як приклад, розглянув змодифіковане рівняння Беселя з порідним оператором $L_t = B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2p+1}{t}\frac{d}{dt}$ – заступником у цьому разі диференціювання та власними функціями $j_p(t\lambda) = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{(t\lambda)^p} I_p(t\lambda)$, де $I_p(\cdot)$ – функція Беселя p-го порядку за $|p| > 1/2$, та рівнянням на власні значення $B_t I_p(t\lambda) = (i\lambda)^2 j_p(t\lambda) = -\lambda^2 j_p(t\lambda)$. Тому ОУЗ на підставі розкладу $j_p(t\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k-1)\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{it\lambda}{2}\right)^{2k}$ визначає вираз

$$T_t^s f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)t^{2k}}{\Gamma(k-1)\Gamma(k+p+1)} B_t^k f(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1/2)} \int_0^{\pi} f(t^2 + s^2 - 2ts\cos\phi)\sin^{2p}\phi d\phi, .$$

А відповідне інтегральне перетворення та зворотне його в цьому разі є перетворенням Ганкеля

$$Hf(t) = \int f(t)\sqrt{t\lambda} I_p(t\lambda)dt = F(\lambda), \quad H^{-1}F(\lambda) = \int F(\lambda)\sqrt{t\lambda} I_p(t\lambda)d\lambda = f(t).$$

Позаяк власні функції порідного оператора дійсні, то згортка в цьому разі

$$(g * f)(t) = \int g(s) T_t^s f(t) ds.$$

А з використанням відомої в теорії функцій Беселя формули Ломмеля для функцій з обмеженим частотою зрізу Λ носієм спектра Ганкеля отримано т. зв. теорему відліків – підставу дискретизації неперервних сигналів

$$f_\Lambda(t) = \sum_{k \in N} f(t_k) \frac{2 t_k I_p(\Lambda t)}{\Lambda I_{p-1}(\Lambda t_k)(t^2 - t_k^2)},$$

де t_k – корені рівняння $I_p(\Lambda t_k) = 0$. Подробиці описано в монографії [8].

4. Алгебра Ateb-перетворень. Ateb-функції, які використовуються для подальших досліджень, вперше згадують у праці шведського математика Е. Лундберга 1879 р., де він називає їх гіперкутометричними функціями або сучасною мовою – гіпертригонометричними чи узагальненими тригонометричними функціями [26]. Майже через сто років ці самі функції, ще без назви Ateb-функції, означено у класичній праці Р. Розенберга 1963 р. [27]. Дещо пізніше П.М. Сеник узагальнив та дослідив функціональні властивості Ateb-функцій [20]. Введені періодичні та гіперболічні Ateb-функції застосовують для побудови розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь. П.М. Сеник застосовував розв'язки Ateb-функцій для дослідження стаціонарних коливань в істотно нелінійних системах, які взаємодіють з джерелом енергії.

У 70-ті роки учень П.М. Сеника А.М. Возний вперше розклав періодичні та гіперболічні Ateb-функції в ряди Тейлора в околі початкового значення аргументу. У 80-90-х роках XX ст. розвиток теорії Ateb-функцій продовжив Б.І. Сокіл [21]. Він довів ортонормованість періодичних Ateb-функцій. Це дало змогу дослідити одночастотні нелінійні коливання одновимірних тіл у резонансному та нерезонансному випадках. Було досліджено поздовжні та крутильні коливання нелінійно-пружних валів, стержнів, закріплених різними способами.

У монографії [17] М.А. Назаркевич розглядала застосування Ateb-функцій до захисту зображень. У цій праці показано, що застосування Ateb-функцій можна розширити у всі області, де застосовуються звичайні тригонометричні функції, цим самим збільшивши інструментарій дослідження. Зокрема, відомо, що будь-яку періодичну досить гладку функцію можна розкласти в ряд за базисом ортонормованих функцій. Оскільки в [22] доведено, що періодичні Ateb-функції є ортонормованими, для них за аналогією з наведеним вище, можемо побудувати розклад в ряд.

Розглянемо періодичну відносно змінної g на проміжку $[-\Pi(m,n),\ \Pi(m,n)]$ функцію $f(g)$. Вважаємо, що функція $f(g)$ неперервна і не має екстремумів на заданому інтервалі. Тоді ряд Фур'є для такої функції збігається на всьому проміжку $[-\Pi(m,n),\ \Pi(m,n)]$, і буде збіжним ряд на основі *Ateb*-функцій. Розклад у ряд для функції $f(g)$ матиме вигляд

$$f(g) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k ca \frac{k\pi g}{\Pi(m,n)} + b_k sa \frac{k\pi g}{\Pi(m,n)},$$

де: $$a_k = \frac{1}{\Pi(m,n)} \int f(g) ca(k\Pi(m,n)g) dg, \quad b_k = \frac{1}{\Pi(m,n)} \int f(g) sa(k\Pi(m,n)g) dg.$$

На цій основі можна побудувати алгебру Ateb-перетворень у вигляді $A = \langle \Lambda, \Omega \rangle$, де Λ – множина операторів Ateb-перетворення, Ω – сигнатура алгебри A. Множина операцій Ω містить "додавання" та "множення". Відношення додавання є звичайним додаванням функцій (коректність випливає з адитивності додавання), а множенням – слугує згортка.

Висновки. Системний аналіз, як потужний інструмент наукових досліджень, дав змогу виділити новий підхід до вивчення узагальнених гармонічних сигналів та на цій основі використати теорію операторів узагальненого зсуву. Використання цієї теорії гарантувало далекосяжні узагальнення фундаментальних понять та принципів, пов'язаних з ними. Зокрема, відомо [14], що теорія операторів узагальненого зсуву має вагоме застосування до гармонічного аналізу. Оскільки Ateb-функції узагальнюють тригонометричні функції, то їх можна застосувати до гармонічного аналізу, тому таке поєднання відкрило можливість отримати принципово нові результати у теорії узагальнених тригонометричних функцій.

Доведено, що оператори Ateb-перетворення утворюють алгебру над векторним простором комплекснозначних функцій, заданих на множині дійсних чисел. Відомо, що формальний апарат алгебр є потужним інструментом для вивчення об'єктів, а також є основою для побудови нових конструкцій. Важливим напрямком подальших досліджень є вивчення властивостей розкладів на основі Ateb-функцій, що випливають із введеного формального апарату та застосування їх для спеціальних задач комунікації.

Література

1. Березанский Ю.М. О теории почти периодических функций относительно сдвига в гиперкомплексных системах / Ю.М. Березанский // Доклады АН СССР. – 1952. – Вып. 81, № 1. – С. 9-12.

2. Браун В.М. Анализ линейных инвариантных во времени систем / В.М. Браун. – М. : Изд-во "Машиностроение", 1966. – 436 с.

3. Возний А.М. Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь / А.М. Возний // Доповіді АН УРСР. – Сер. А. – 1970. – Вип. 9. – С. 971-974.

4. Глушков В.М. Алгебра. Языки. Программирование / В.М. Глушков, Г.Е. Цейтлин, Е.Л. Ющенко. – К. : Изд-во "Наук. думка", 1978. – 319 с.

5. Драґан Я.П. До теорії нестаціонарних випадкових процесів / Я.П. Драґан, Я.О. Дубров, В.М. Михайловський // Доповіді АН УРСР. – 1962. – № 9. – С. 1162-1165.

6. Драґан Я.П. Некоторые общие свойства линейных преобразований / Я.П. Драган, Я.А. Дубров, В.Н. Михайловский // Вопросы передачи информации : сб. науч. тр. – К. : Изд-во АН УРСР. – 1963. – Вип. 2. – С. 5-28.

7. Драган Я.П. Анализ линейных систем и нестационарных процессов / Я.П. Драган, Я.А. Дубров, В.Н. Михайловский // Вопросы передачи информации : сб. науч. тр. – К. : Изд-во АН УРСР. – 1963. – Вип. 2. – С. 29-43.

8. Драґан Я.П. Про класи комутативних і некомутативних лінійних перетворень випадкових процесів / Я.П. Драґан // Доповіді АН УРСР. – 1969. – № 5. – С. 400-402.

9. Драган Я.П. Модели сигналов в линейных системах / Я.П. Драган. – К. : Изд-во "Наук. думка", 1972. – 303 с.

10. Драґан Я.П. Структура и представления моделей стохастических сигналов / Я.П. Драґан. – К. : Изд-во "Наук. думка", 1980. – 384 с.

11. Драган Я.П. Принципи лінійності моделі в теорії управління / Я.П. Драган // Автоматика-95 : праці Другої укр. конф. з автомат. керув. – Львів : Вид-во НВЦ "ІТІС", 1995. – Т. 1. – 143 с. – 7-8.

12. Драган Я.П. Системний аналіз стану та обґрунтування основ сучасної теорії стохастичних сигналів: енергетична концепція, математичний субстрат, фізичне тлумачення / Я.П. Драган, Я.С. Сікора, Б.І. Яворський. – Львів : Вид-во НВФ "Українські технології", 2014. – 240 с.

13. Дрогомирецька Х.Т. Інтегрування деяких Ateb-функцій / Х.Т. Дрогомирецька // Вісник Державного університету "Львівська політехніка". – Сер.: Фізико-математичні науки. – Львів : Вид-во ДУ "Львівська політехніка". – 1997. – Вип. 46. – С. 108-110.

14. Лабунец В.Г. Алгебраическая теория сигналов и систем / В.Г. Лабунец. – Красноярск : Изд-во Ун-та, 1984. – 244 с.

15. Левитан Б.М. Операторы обобщенного сдвига и их некоторые применения / Б.М. Левитан. – М. : Изд-во "Физматгиз", 1962. – 324 с.

16. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователей / Л. Льюнг. – М. : Изд-во "Наука", 1991. – 472 с.

17. Назаркевич М.А. Методи підвищення ефективності поліграфічного захисту засобами Ateb-функцій / М.А. Назаркевич. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2011. – 288 с.

18. Пойда В.П. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах / В.П. Пойда. – Минск : Изд-во "Навука і тэхніка", 1978. – 136 с.

19. Пуанкаре А. О науке / А. Пуанкаре. – М. : Изд-во "Наука", 1983. – 560 с.

20. Сеник П.М. Про Ateb-функції / П.М. Сеник // Доповіді АН УРСР. – Сер. А. – 1968. – Вип. 1. – С. 23-27.

21. Скляревич А.Н. Операторные методы в статистической динамике автоматических систем / А.Н. Скляревич. – М. : Изд-во "Наука", 1965. – 460 с.

22. Сокіл Б.І. Нелінійні коливання механічних систем і аналітичні методи їх досліджень : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: спец. 05.02.09 – "Динаміка та міцність машин" / Сокіл Богдан Іванович; НУ "Львівська політехніка". – Львів, 2001. – 36 с.

23. Хармут Х.Ф. Передача информации ортогональными функциями / Х.Ф. Хармут. – М. : Изд-во "Связь", 1975. – 268 с.

24. Хиршман И.И. Преобразование типа свертки / И.И. Хиршман, Д.В. Уиддер. – М. : Изд-во ИИЛ, 1958. – 313 с.

25. Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor / J. Delsarte // Journ. de math. pures et appl. – 1938. – Vol. 17, ser. 9. – Pp. 213-231.

26. Lundberg E. Om hypergoniometriska funktioner af komplexa variabla / E. Lundberg // Stockholm, 1879. English translation: On hypergoniometric functions of complex variables. In Preparation.

27. Rosenberg R. The Ateb(h) – functions and their proporties / R. Rosenberg // Quarterly of Applied Mathematics. – 1963. – Vol. 21, issue 1. – Pp. 37-47.

Надійшла до редакції 07.12.2016 р.

Драган Я.П., Дронюк И.М. **Системный анализ негармонических сигналов и систем и Ateb-функции**

Сделан обзор приложений оператора обобщенного сдвига к теории негармонических сигналов. Классическая теория коммуникации и обработки сигналов основывается на формальном аппарате теории гармонических функций. Но для сетей специального назначения важно использовать другие функции. Показано, что в коммуникации широко использовались разложения по функциям Бесселя, а также любая полная ортонормированная система функций может быть использована для разложения в ряды или интегралы, что является обобщениями разложений Фурье. Поэтому предложено в качестве базиса разложения использовать Ateb-функции, как ортонормированную систему. Показано, что так введенные преобразования образуют алгебру.

Ключевые слова: оператор обобщенного сдвига, Ateb-функции, алгебра Ateb-преобразований, сети специальной коммуникации.

Dragan Ya.P., Droniuk I.M. **System Analysis of Non-harmonic Signals and Systems and Ateb-function**

The article reviews the application of the generalized shift operator to the theory of non-harmonic signals. The classical theory of communication and signal processing is based on the formal apparatus of the harmonic functions theory. But for special purpose networks it is important to use other functions. It is shown that for expansions in series or integrals can be used, which is a generalization of the Fourier expansions in communication is widely used for the expansion of the Bessel functions, as well as any complete orthonormal system of functions. Therefore as basis decomposition we suggest using Ateb-functions like orthonormal system. It is shown that Ateb-transformation forms algebra.

Keywords: generalized shift operator, Ateb-functions, Ateb-transformation algebra, special purpose networks.

УДК 007:343.9:351.86:659.2/.4

КІБЕРІНТЕРВЕНЦІЯ ТА КІБЕРБЕЗПЕКА УКРАЇНИ: ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ЇХ ПОДОЛАННЯ

Ю.І. Грицюк[1]

Розглянуто деякі проблеми кіберінтервенції та кібербезпеки України, а також перспективи їх подолання. Наведено пріоритетні засади державної політики у сфері забезпечення кібернетичної безпеки України в умовах проведення військових дій з Росією. На підставі аналізу правових джерел визначено шляхи формування засад сучасної державної політики у сфері забезпечення кібернетичної безпеки України. Деталізовано основні загрози та напрями деструктивної діяльності Російської Федерації в інформаційному просторі України на шкоду національним інтересам держави. Обґрунтовано доцільність розроблення організаційно-правових та методологічних засад щодо забезпечення кібернетичної безпеки України в умовах ведення війни з Росією, а також побудови національної системи кібербезпеки.

Ключові слова: державні інформаційні ресурси, інформаційний суверенітет, вітчизняний інформаційний простір, гібрідна війна, антитерористична операція, інформаційна атака, державна політика у сфері забезпечення кібернетичної безпеки, кібертероризм, кіберзлочинність, вітчизняний сегмент кіберпростору, об'єкти критичної інфраструктури, соціальні мережі, спеціальна інформаційна операція, війська інформаційних операцій, національна система кібербезпеки.

Вступ. За останнє десятиліття значно зросла кількість суспільно небезпечних дій в кіберпросторі України, спрямованих на нанесення шкоди її державним інтересам [4, 6, 8, 25]. Вчинення насильницьких посягань з боку інших суб'єктів на державні, політичні чи економічні інтереси шляхом втручання у процес функціонування їх учасників містить ознаки інтервенції [7, 14, 20, 23]. Оскільки подібні дії здійснюються з використанням комп'ютерних систем і в кіберпросторі держави, то такий вид злочину називається кібернетичною війною[2,3] або кібернетичною інтервенцією (кіберінтервенцією) [29, 30].

Прикладом кіберінтервенції була триденна безперервна кібератака на сайт Президента України В.А. Ющенка, яка розпочалася 30 жовтня 2007 року і нараховувала близько 18 тис. точкових атак, які здійснювалися з території Росії, Казахстану, України, США, Ізраїлю та Великобританії. Проте у Службі безпеки

[1] проф. Ю.І. Грицюк, д-р техн. наук, НУ "Львівська політехніка", E-mail: yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua
[2] Кібер-війна і світ. https://day.kyiv.ua/uk/article/den-planeti/kiber-viyna-i-svit
[3] Російсько-українська кібервійна. https://uk.wikipedia.org/wiki/Російсько-українська_кібервійна