Науковий вісник НЛТУ України
Scientific Bulletin of UNFU
http://nv.nltu.edu.ua
https://doi.org/10.15421/40270928
Article received 21.11.2017 р.
Article accepted 28.11.2017 р.
УДК 004.94
ISSN 1994-7836 (print)
ISSN 2519-2477 (online)
@ ✉ Correspondence author
M. M. Mysyk
mmysyk@i.ua

С. Б. Поберейко[1], А. А. Яковенко[1], М. М. Мисик[1], Є. П. Кунинець[2]
[1] *Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна*
[2] *Концерн "ЕНО Меблі ЛТД", м. Мукачево, Україна*

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ТЕОРЕТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ГРАНИЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

Метою дослідження є виявлення механічних теорій міцності та математичних моделей визначення граничного напруженого стану анізотропних матеріалів, придатних для адекватного опису пружної області деформування деревини хвойних і листяних порід в умовах двовісного, плоского та об'ємного механічних навантажень. Актуальність такого дослідження зумовлена тим, що на сьогодні немає єдиної методики апроксимації результатів експериментальних досліджень короткочасної міцності композитних матеріалів зі складним напруженим станом. У математичній постановці задачі одна і та ж поверхня короткочасної міцності може задовільно описуватися кількома критеріями. Для досягнення поставленої мети проведено класифікацію та зроблено порівняльний аналіз відомих механічних теорій короткочасної міцності анізотропних матеріалів та основних положень загальної теорії квадрик. Зокрема, проаналізовано критерії міцності Ашкеназі, Мізеса, Маріна-Ху, Прагера, Норіса-Мак-Кінена, Хілла, Цай-Хілла, Цай-Ву, Хоффмана, Норріса, Фішера, Захарова, Малмейстра та Гольденблата-Копнова. За результатами такого аналізу встановлено, що умови міцності для матеріалів зі слабкою асиметрією меж міцності у напрямках структурної симетрії є непридатними для опису поверхонь міцності матеріалів зі сильною асиметрією меж міцності. Виявлено, що двовісний та плоский напружено-деформівні стани у тангентально-радіальній площині структурної симетрії деревини листяних порід задовільно описується критерієм Ашкенази, а деревини хвойних порід – критерієм Гольденблата-Копнова.
Ключові слова: анізотропний критерій міцності; напружено-деформівний стан; тензор напружень.

Вступ. Через біологічне походження деревина має складну неоднорідну будову і тому належить до класу анізотропних матеріалів, характерною особливістю яких є асиметрія характеристик міцності у напрямках структурної симетрії. Така особливість істотно утруднює прогнозування міцності деревини у процесах її гідротермічного оброблення (Redman, 2017) та для розрахунку дерев'яних конструкцій і виробів (Iraola & Cabrero, 2016; Guindos & Guaita, 2012). Понад це, відомі на сьогодні теорії та математичні моделі визначення допустимих полів напружень у композитних матеріалах не дають змоги кількісно оцінити межі пружної, в'язкопружної, в'язко-пружно-пластичної областей деформування в умовах складних механічних та температурно-вологісних навантажень. Тому для оцінки та прогнозування міцності деревини та виробів з неї актуальними є задачі побудови нових математичних моделей та вибору таких критеріїв міцності, які адекватно відображали б особливості деформативності промислово значущих порід деревини.

У першому наближенні оцінити різноманітність і застосовуваність критеріїв міцності анізотропних матеріалів можна за частотою використання різних критеріїв у наукових публікаціях. Найбільш згадуваними є критерії Прагера, Ву, Цай-Ву та Хоффмана, решта критеріїв мають істотно менше застосування (рис.).

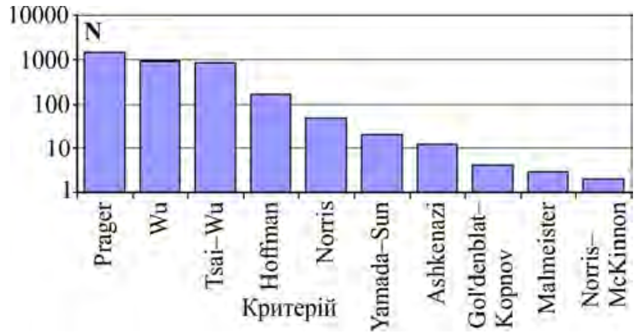

Рис. Частість N застосування критеріїв міцності у наукових публікаціях у 2012-2017 рр. (за результатами Google Scholar на 11.11.2017)

Інформація про авторів:

Поберейко Софія Богданівна, асистент кафедри інформаційних технологій. **Email:** Sofi_23@i.ua
Яковенко Андрій Андрійович, аспірант кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій. **Email:** yakovenkoandriy@gmail.com
Мисик Михайло Михайлович, канд. техн. наук, доцент кафедри автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій. **Email:** mmysyk@i.ua
Кунинець Євген Павлович, канд. техн. наук, генеральний директор. **Email:** ye.p.kunynec@gmail.com
Цитування за ДСТУ: Поберейко С. Б., Яковенко А. А., Мисик М. М., Кунинець Є. П. Порівняльний аналіз результатів теоретичних досліджень граничного напруженого стану анізотропних матеріалів. Науковий вісник НЛТУ України. 2017. Вип. 27(9). С. 128–132.
Citation APA: Pobereyko, S. B., Yakovenko, A. A., Mysyk, M. M., & Kunynets, Ye. P. (2017). The Comparative Analysis of Theoretical Studies Results of the Boundary Stress State of Anisotropic Materials. *Scientific Bulletin of UNFU, 27*(9), 128–132. https://doi.org/10.15421/40270928

Для вибору критеріїв міцності деревини доцільно провести класифікацію наявних механічних теорій міцності для анізотропних композитних матеріалів з урахуванням того, що деревина хвойних порід належить до матеріалів зі сильною асиметрією характеристик міцності, а листяних – як до матеріалів зі сильною, так і слабкою асиметріями. Тому потрібно сформувати дві групи теорій, одна з яких складалася б із критеріїв міцності матеріалів зі слабкою асиметрією, а інша – з критеріїв для визначення міцності матеріалів зі сильною асиметрією характеристик міцності. Для дослідження поставленої мети проведемо аналіз механічних теорій міцності та основних положень загальної теорії квадрик (Elman, Karpenko & Merkurjev, 2008; Mishchenko, Solovyev & Fomenko, 1985). Такий підхід обґрунтовується тим, що лише кілька критеріїв записують у формі поліномів третього чи вищого порядку (Asteris, 2010; 2013), а більшість широко застосовуваних критеріїв міцності визначається поліноміальними рівняннями другого степеня (Van der Put, 2005; 2015), які є об'єктом дослідження теорії квадрик (Mishchenko, Solovyev & Fomenko, 1985).

Критерії та математичні моделі міцності для матеріалів зі слабкою асиметрією меж міцності. У просторі напружень ці критерії записують у вигляді таких рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{iijj}\sigma_{ii}\sigma_{jj} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1, j\neq i}^{3} B_{ijij}\sigma_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{3} C_{ii}\sigma_{ii} - 1 = 0, \quad (1)$$

де: $$A_{iijj} = A_{jjii};\ B_{ijij} = B_{jiji}, \quad (2)$$

де: $A_{iijj}, B_{ijij}, C_{ii}$ – сталі міцності; $\sigma_{ii}, \sigma_{jj}, \sigma_{ij}$ – компоненти тензора допустимих напружень.

З огляду на основні положення теорії квадрик (Mishchenko, Solovyev & Fomenko, 1985), тип і симетрія поверхонь, які описуються рівнянням (1), визначаються значеннями коефіцієнтів $A_{iijj}, B_{ijij}, C_{ii}$. Якщо $C_{ii} = 0$, то гіперповерхні (1) є симетричними відносно початку декартової системи координат: точки перетину гіперповерхні (1) із прямою, що проходить через початок координат, розміщені на однакових відстанях від початку координат. Якщо $C_{ii} = 0$, то точки перетину гіперповерхні (1) з будь-якою віссю системи координат, з будь-якою головною віссю напружень, є симетричними відносно початку координат. Якщо (σ_{ij}) є розв'язками рівняння (1), у якому третій доданок суми лівої частини дорівнює нулеві, то ($-\sigma_{ij}$) також є розв'язками цього рівняння.

Отже, поліноміальні рівняння другого степеня квадратичної форми

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{iijj}\sigma_{ii}\sigma_{jj} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1, j\neq i}^{3} B_{ijij}\sigma_{ij}^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

є визначенням критеріїв міцності композитів, коефіцієнти асиметрії яких дорівнюють одиниці. З огляду на результати досліджень (Bozhydarnyk, Sulym, 1999) до цих критеріїв належать:

- критерій фон Мізеса (Yatsenko, 1988; Aicher, Klöck, 2001)

$$A_{1111}\sigma_{11}^2 + A_{2222}\sigma_{22}^2 + A_{3333}\sigma_{33}^2 + 2A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2A_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2A_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + 4A_{1212}\sigma_{12}^2 + 4A_{1313}\sigma_{13}^2 + 4A_{2323}\sigma_{23}^2 - 1 = 0, \quad (4)$$

де: $A_{iiii} = \dfrac{1}{\sigma_{ip}^2}$; $A_{iijj} = \dfrac{1}{\sigma_{ip}^2} + \dfrac{1}{\sigma_{jp}^2} - \dfrac{1}{\tau_{ij,45}}, i \neq j$; $A_{ijij} = \dfrac{1}{\tau_{ij}^2}, i \neq j$. (5)

Відомо (Aicher & Klöck, 2001), що цей критерій досить точно описує емпіричні дані випробувань на міцність орієнтовано стружкових плит. Окрім цього, в цій роботі теоретично обґрунтовано необхідність застосування для оцінки міцності деревини і деревинних матеріалів саме квадратичних, а не лінійних критеріїв.

- критерій Маріна-Ху (Yatsenko, 1988)

$$A_{1111}\sigma_{11}^2 + A_{2222}\sigma_{22}^2 + A_{3333}\sigma_{33}^2 + A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + A_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + A_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} - 1 = 0, \quad (6)$$

де: $$A_{iiii} = \frac{1}{\sigma_{ip}^2};\ A_{iijj} = -\frac{1}{\sigma_{ip}\sigma_{jp}},\ i \neq j; \quad (7)$$

- критерій Норіса-Мак-Кінена (Yatsenko, 1988)

$$A_{1111}\sigma_{11}^2 + A_{2222}\sigma_{22}^2 + A_{3333}\sigma_{33}^2 + A_{1212}\sigma_{12}^2 + A_{1313}\sigma_{13}^2 + A_{2323}\sigma_{23}^2 - 1 = 0, \quad (8)$$

де: $$A_{iiii} = \frac{1}{\sigma_{ip}^2};\ A_{ijij} = \frac{1}{\tau_{ij}^2},\ i \neq j; \quad (9)$$

- критерій Хілла (Yatsenko, 1988)

$$A_{1111}\sigma_{11}^2 + A_{2222}\sigma_{22}^2 + A_{3333}\sigma_{33}^2 + A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + A_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + A_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + A_{1212}\sigma_{12}^2 + A_{1313}\sigma_{13}^2 + A_{2323}\sigma_{22}\sigma_{33} - 1 = 0, \quad (10)$$

де: $$A_{iiii} = \frac{1}{\sigma_{ip}^2};\ A_{ijij} = \frac{1}{\tau_{ij}^2},\ i \neq j; \quad (11)$$

$$A_{iijj} = -\left(\frac{1}{\sigma_{ip}^2} + \frac{1}{\sigma_{jp}^2} - \frac{1}{\sigma_{kp}^2}\right),\ k \neq i,\ k \neq j \text{ і } i \neq j;$$

- критерій Фішера (Gol'denblat, Bazhanov & Kopnov, 1977)

$$A_{1111}\sigma_{11}^2 + A_{2222}\sigma_{22}^2 + A_{1212}\sigma_{12}^2 + A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} - 1 = 0, \quad (12)$$

де $$A_{iiii} = \frac{1}{\sigma_{ip}^2};\ A_{ijij} = \frac{1}{\tau_{ij}^2},\ i \neq j;$$

$$A_{iijj} = -\frac{E_{11}(1+\mu_{21}) + E_{22}(1+\mu_{12})}{2\sqrt{E_{11}E_{22}(1+\mu_{12})(1+\mu_{21})}\sigma_{1p}\sigma_{2p}},\ i \neq j. \quad (13)$$

У формулах (5)–(13) використано такі позначення: σ_{ip} – межі міцності розтягу анізотропного матеріалу в головних напрямках; τ_{ij} і $\tau_{ij,45}$ – межі міцності зсуву в основних і діагональних напрямках для анізотропного матеріалу; E_{11} і E_{22} – модулі пружності матеріалу в напрямках анізотропії; μ_{12} та μ_{21} – коефіцієнти Пуассона.

До класу критеріїв (5)–(13) належать також критерії міцності, які описуються поліноміальними рівняннями шостого та четвертого степенів. Це критерії Прагера та Ашкеназі. Дійсно, якщо будь-яка точка $R(\sigma_{11};\sigma_{22};\sigma_{33};\sigma_{12};\sigma_{13};\sigma_{23})$ є точкою гіперповерхні Ашкеназі (Ashkenazi, 1978):

$$A_{1111}\sigma_{11}^2 + A_{2222}\sigma_{22}^2 + A_{3333}\sigma_{33}^2 + 2A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2A_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2A_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + 4A_{1212}\sigma_{12}^2 + 4A_{1313}\sigma_{13}^2 + 4A_{2323}\sigma_{23}^2 - \left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2\right)^{1/2} = 0, \quad (14)$$

то точка $Q(-\sigma_{11}; -\sigma_{22}; -\sigma_{33}; -\sigma_{12}; -\sigma_{13}; -\sigma_{23})$ також належить цій поверхні, бо ліва частина рівняння (14) є парною функцією компонентів напружень σ_{ij}.

Звідси, оскільки точки R і Q гіперповерхні (14) є симетричними відносно початку декартової системи координат у просторі напружень, то вони належать прямій RQ, яка проходить через початок цієї системи. Але тоді, згідно із загальною теорією квадрик, поверхня (14) є умовою міцності для анізотропних симетричних за міцністю композитних матеріалів.

Тут у рівнянні (14) символами $A_{iijj}, A_{ijij}, A_{iiii}$ позначено компоненти тензора міцності:

$$A_{iiii}=\frac{1}{\sigma_{ip}}\,;\ A_{ijij}=\frac{1}{4\tau_{ij}}\,;\ A_{iijj}=\frac{1}{\sigma_{ip}}+\frac{1}{\sigma_{jp}}-\frac{1}{\tau_{ij,45}}\,. \qquad (15)$$

Обґрунтування приналежності критерію Прагера до механічних теорій міцності для анізотропних композитних матеріалів з коефіцієнтом асиметрії меж міцності, що дорівнює одиниці – аналогічне.

Отже, використання критеріїв Ашкеназі, Мізеса, Маріна-Ху, Прагера, Норріса-Мак-Кінена, Хілла та Фішера для визначення допустимих напружень у деревині хвойних порід є недоцільним. Аналогічні висновки зроблено у роботі (Mascia & Simoni, 2013), де встановлено, що серед експериментально перевірених критеріїв Хілла, Цай-Хілла, Цай-Ву, Хоффмана та Норріса, найпридатнішим для оцінки міцності деревини тропічних хвойних порід (*Pinus elliotti* тр *Goupia glabra*) є критерій Хоффмана. Але такий висновок не дає підстав без додаткової експериментальної перевірки розповсюджувати цей критерій на всі інші хвойні породи. Разом з тим, відомі результати, коли теорія Цай-Хілла може задовільно описувати граничний напружений стан деревини ялини в умовах чистого зсуву (Liu, 2002), а критерій Цай-Ву – криву міцності ялини у разі двовісного навантаження, але з різними значеннями коефіцієнтів взаємодії для першого і третього квадрантів та другого і четвертого (Cabrero, Gebremedhin & Elorza, 2009). Окрім цього, критерій Цай-Ву виявився придатним для оцінки міцності модифікованої полімерами деревини хвойних порід (Kyzioł, 2017) та прогнозування граничного напружено-деформівного стану деревини твердих порід у процесі сушіння (Redman, 2017). Відомі також результати експериментальної верифікації критеріїв міцності (Garab & Szalaj, 2010), де зроблено висновок, що з-поміж критеріїв фон Мізеса, Цай-Ву та Ашкеназі, останній найточніше прогнозує міцність деревини ялини (*Picea abies* [L.] Karst.).

Критерії та математичні моделі для матеріалів зі сильною асиметрією меж міцності. Оскільки, згідно із загальною теорією квадрик, рівняння (1) описує несиметричні гіперповерхні за умови $C_{ii} \neq 0$, то, очевидно, що анізотропні асиметричні за міцністю композитні матеріали, до класу яких належить деревина хвойних порід, описуються критеріями, заданими рівняннями, які з використанням певних математичних перетворень зводяться до рівняння (1), у якому сталі A_{iijj}, B_{ijij} та C_{ii} є відмінними від нуля. Одним із таких критеріїв є критерій Захарова (Yatsenko, 1988)

$$\begin{aligned}&A_{11}\sigma_{11}+A_{22}\sigma_{22}+A_{33}\sigma_{33}+A_{1111}\sigma_{11}^2+A_{2222}\sigma_{22}^2+A_{3333}\sigma_{33}^2+\\&+2A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22}+2A_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33}+2A_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33}+\\&+4A_{1212}\sigma_{12}^2+4A_{1313}\sigma_{13}^2+4A_{2323}\sigma_{23}^2-1=0\,,\end{aligned} \qquad (16)$$

де:
$$A_{ii}=\frac{1}{\sigma_{ip}}-\frac{1}{\sigma_{ic}}\,;\ A_{iiii}=\frac{1}{\sigma_{ip}\sigma_{ic}}\,;\ A_{ijij}=\frac{1}{4\tau_{ij}^2}\,; \qquad (17)$$

$$\begin{aligned}A_{iijj}=\frac{1}{2}\Bigg\{&\frac{1}{\sigma_{ip}\sigma_{ic}}+\frac{1}{\sigma_{jp}\sigma_{jc}}+\frac{(-1)^{i+j+1}}{\tau_{ij,45}}\times\\&\times\left(\frac{1}{\sigma_{ip}}-\frac{1}{\sigma_{ic}}-\frac{1}{\sigma_{jp}}+\frac{1}{\sigma_{jc}}\right)-\frac{1}{\tau_{ih,45}^2}\Bigg\},\end{aligned} \qquad (17^*)$$

σ_{ic} – межа міцності стиску анізотропного матеріалу в і-му напрямку анізотропії.

Рівняння (17) не має однозначної геометричної інтерпретації. Форма поверхні (16) допустимих напружень для матеріалу зі заданими механічними характеристиками встановлюється на основі аналізу компонентів тензора міцності (17). У часткових випадках складного напруженого стану ця задача вирішується порівняно просто. Так, наприклад, щоб визначити криву міцності для матеріалу із двовісним напруженим станом $(\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23})$, виходять із умов, за яких крива (16) є дійсним еліпсом

$$\Delta \neq 0;\ \delta > 0;\ \Delta S < 0\,, \qquad (18)$$

де:
$$\Delta=\begin{vmatrix}A_{1111} & A_{1122} & 0{,}5A_{11}\\ A_{1122} & A_{2222} & 0{,}5A_{22}\\ 0{,}5A_{11} & 0{,}5A_{22} & -1\end{vmatrix};\ \delta=A_{1111}A_{2222}-A_{1122}^2\,; \qquad (19)$$

$S=A_{1111}+A_{2222}$.

Адже, еліпс – це єдина гладка, замкнута та випукла крива зі сімейства кривих, які описуються рівнянням (16), яке у нашому випадку має вигляд

$$A_{11}\sigma_{11}+A_{22}\sigma_{22}+A_{1111}\sigma_{11}^2+A_{2222}\sigma_{22}^2+2A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22}-1=0\,. \qquad (20)$$

Коефіцієнти рівняння (20) можна ідентифікувати експериментально, випробовуючи досліджуваний матеріал на міцність (Galicki & Czech, (2013). За формулами (18) та результатами експериментальних вимірювань значень величин $\sigma_{ip}, \sigma_{ic}, \tau_{ii}, \tau_{ii,45}$ визначають значення компонент $A_{ii}, A_{iiii}, A_{iijj}$ та проводять їх подальший аналіз. Якщо виявиться, що значення $A_{ii}, A_{iiii}, A_{iijj}$ не задовольняють умови (18), то роблять висновок, що критерій міцності (20) не придатний для розрахунку допустимих напружень у досліджуваному матеріалі. У протилежному випадку (20) використовується для подальшого вирішення поставленої задачі міцності.

Важливе практичне значення для моделювання міцності деревини хвойних порід має критерій Гольденблата-Копнова. У розгорнутій формі запису в основній системі координат він має вигляд (Goldenblat, Bazhanov & Kopnov, 1977)

$$\begin{aligned}&\Pi_{11}\sigma_{11}+\Pi_{22}\sigma_{22}+\Pi_{33}\sigma_{33}+\big(\Pi_{1111}\sigma_{11}^2+\Pi_{2222}\sigma_{22}^2+\Pi_{3333}\sigma_{33}^2+\\&+\Pi_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22}+2\Pi_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33}+2\Pi_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33}+\\&+4\Pi_{1212}\sigma_{12}^2+4\Pi_{1313}\sigma_{13}^2+4\Pi_{2323}\sigma_{23}^2\big)^{1/2}-1=0\,,\end{aligned} \qquad (21)$$

де: Π_{ij}, Π_{ijkm} – компоненти тензорів міцності, які визначаються за формулами:

$$\Pi_{ii}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{ip}}-\frac{1}{\sigma_{ic}}\right);\ \Pi_{ijij}=\frac{1}{4\tau_{ij}^2}\,;\ \Pi_{iiii}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_{ip}}+\frac{1}{\sigma_{ic}}\right)^2;\ (22)$$

$$\Pi_{iijj}=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{\sigma_{ip}}+\frac{1}{\sigma_{ic}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sigma_{jp}}+\frac{1}{\sigma_{jc}}\right)^2-\left(\frac{1}{\tau_{ij,45}}+\frac{1}{\overline{\tau_{ij,45}}}\right)^2\right], \qquad (22^*)$$

де $\overline{\tau_{ij,45}}$ – межі міцності матеріалу за від'ємного чистого зсуву. Покажемо, що критерій (21) справді описує граничний напружений стан анізотропних асиметричних за міцністю композитних матеріалів. Для цього квадратний корінь у лівій частині рівняння (21) перенесемо у праву частину і отриманий результат піднесемо до квадрата. Тоді матимемо

$$\begin{aligned}&\Pi_{11}^2\sigma_{11}^2+\Pi_{22}^2\sigma_{22}^2+\Pi_{33}^2\sigma_{33}^2+2\Pi_{11}\Pi_{22}\sigma_{11}\sigma_{22}+2\Pi_{11}\Pi_{33}\sigma_{11}\sigma_{33}+\\&+2\Pi_{22}\Pi_{33}\sigma_{22}\sigma_{33}-2\Pi_{11}\sigma_{11}-2\Pi_{22}\sigma_{22}-2\Pi_{33}\sigma_{33}+1=0\,.\end{aligned} \qquad (23)$$

Як бачимо, отримане рівняння, а отже, і рівняння (21) є поліноміальним рівнянням другого степеня. За структурою воно тотожне рівнянню (1). Звідси, згідно із загальною теорією квадрик (Elman, Karpenko & Merkurjev, 2008; Mishchenko, Solovyev & Fomenko, 1985), якщо компоненти тензора міцності Π_{11}, Π_{22} і Π_{33} є відмінними від нуля, то (21) дійсно описує несиметричні в основній системі координат гіперповерхні другого порядку, що й потрібно було довести.

Поліноміальними рівняннями другого та вищих степенів описуються критерії міцності Малмейстра

$$\sum_{i,k} L_{ik}\sigma_{ik} + \sum_{i,k,n,m} L_{iknm}\sigma_{ik}\sigma_{nm} + \sum_{i,k,n,m,p,q} L_{iknmpq}\sigma_{ik}\sigma_{nm}\sigma_{pq} \cdots - 1 = 0, \quad (24)$$

де $L_{ik}, L_{iknm}, L_{iknmpq}$ – компоненти тензорів міцності другого, четвертого та вищих рангів, які визначають поверхню граничного напруженого стану матеріалу у шестивимірному просторі напружень.

Вигляд рівняння (24) є залежним від степеня полінома його лівої частини. Чим вищий степінь, тим складніша практична реалізація критерію Малмейстра. Адже, зі зростанням степеня збільшується кількість коефіцієнтів (компонентів тензорів міцності) при компонентах тензора напружень. Рівняння (24) з поліномом першого степеня має шість коефіцієнтів, а другого, третього та четвертого степенів – 42, 258 та 1554 коефіцієнти відповідно (Bozhydarnyk & Sulym, 1999). Тому, оскільки на сьогодні задача експериментального визначення такої значної кількості коефіцієнтів (меж міцності) є громіздкою, і практично невирішеною для жодного з відомих композитних матеріалів, то цей критерій виключимо з подальшого розгляду.

Отже, можливими критеріями для визначення поверхонь міцності деревини хвойних порід є критерії Захарова та Гольденблата-Копнова. Такий висновок збігається з висновками роботи (Osswald & Osswald, 2017), де запропонований удосконалений критерій Гольденблата-Копнова, за твердженням авторів, придатний для прогнозування міцності будь-яких анізотропних матеріалів. Спробу розробити новий універсальний критерій міцності деревини зроблено також у роботах (Galicki & Czech, 2013; Galicki, 2013), де пропонують відійти від стандартних тензорних моделей та (Guindos, 2012; 2014), у яких для цього пропонують застосовувати так звану "теорію середніх напружень".

Висновки

1. На сьогодні не існує єдиної математичної моделі та загальноприйнятої теорії, методи яких давали б змогу адекватно оцінити межі пружної, в'язкопружної та в'язко-пружно-пластичної областей деформування анізотропних композитних матеріалів біологічного походження за умов складних механічних і температурно-вологісних навантажень.
2. Умови міцності для матеріалів зі слабкою асиметрією меж міцності у напрямках структурної симетрії є непридатними для опису поверхонь міцності матеріалів зі сильною асиметрією меж міцності.
3. Двовісний та плоский напружено-деформівні стани у тангентально-радіальній площині структурної симетрії деревини листяних порід задовільно описується критерієм Ашкеназі, а деревини хвойних порід – критерієм Гольденблата-Копнова;
4. Перспективним напрямком подальших досліджень є ідентифікація універсального критерію міцності, придатного, на відміну від стандартних тензорно-поліноміальних критеріїв, адекватно прогнозувати поверхню пластичності та область в'язко пружного деформування анізотропних матеріалів.

Перелік використаних джерел

Aicher, S., & Klöck, W. (2001). Linear versus quadratic failure criteria for inplane loaded wood based panels. *Otto-Graff-Journal, 12*, 187–199. Retrieved from: http://www.mpa.uni-stuttgart.de/publikationen/otto_graf_journal/ogj_2001/beitrag_aicher_kloeck.pdf

Ashkenazi, Ye. K. (1978). *Anizotropiya drevesiny i drevesnykh materialov* [Anisotropy of wood and wood-based materials]. Moscow: Lesnaya promyshlennost. [in Russian].

Asteris, P. G. (2010). A simple heuristic algorithm to determine the set of closed surfaces of the cubic tensor polynomial. *Open Applied Mathematics Journal*, *4*, 1–5. Retrieved from: http://users.aspete.gr/asteris/Fulltext/1TOAMJ[1].pdf

Asteris, P. G. (2013). Unified yield surface for the nonlinear analysis of brittle anisotropic materials. *Nonlinear Sci Lett A*, *4*(2), 46–56. Retrieved from: https://www.researchgate.net/profile/Panagiotis_Asteris/publication/259573865_Unified_Yield_Surface_for_the_Nonlinear_Analysis_of_Brittle_Anisotropic_Materials/links/0c96052ca9bed7a4ff000000.pdf

Bozhydarnyk, V. V., & Sulym, H. T. (1999). *Elementy teoriyi plastychnosti ta mitsnosti* [Elements of the theory of plasticity and strength]. Lviv: Svit. [in Ukrainian].

Cabrero, J. M., Gebremedhin, K. G., & Elorza, J. (2009). Evaluation of failure criteria in wood members. In *2009 Reno, Nevada, June 21-June 24,* (pp. 1–3). American Society of Agricultural and Biological Engineers. Retrieved from: http://dadun.unav.edu/bitstream/10171/7407/1/WCTE2010 %20failure.pdf

Elman, R. S., Karpenko, N., & Merkurjev, A. (2008). *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, (Vol. 56). American Mathematical Soc.

Galicki, J. (2013). A new approach to formulate the general strength theories for anisotropic discontinuous materials. Part B: General form of polynomial to describe the strength of anisotropic discontinuous materials. *Applied Mathematical Modelling*, *37*(3), 828–850. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.03.003

Galicki, J., & Czech, M. (2013). A new approach to formulate the general strength theories for anisotropic discontinuous materials. Part A: The experimental base for a new approach to formulate the general strength theories for anisotropic materials on the basis of wood. *Applied Mathematical Modelling*, *37*(3), 815–827. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.03.004

Garab, J., & Szalaj, J. (2010). Comparison of anisotropic strength criteria in the biaxial stress state. *Drewno: prace naukowe, doniesienia, komunikaty*, *53*, 51–66. Retrieved from: http://yadda.icm.edu.pl/yadda/element/bwmeta1.element.baztech-article-BAT8-0017-0021/c/httpwww_bg_utp_edu_plartd20nr20183drewnovol2053nr183 j_garabj_szalai.pdf

Goldenblat, I. I., Bazhanov, V. L., & Kopnov, V. A. (1977). Dlitelnaya prochnost v mashinostroyenii [Long-term strength in mechanical engineering]. Moscow: Mashinostroyeniye. [in Russian].

Guindos, P. (2014). Comparison of different failure approaches in knotty wood. *Drewno. Prace Naukowe. Doniesienia. Komunikaty*, *57*(193), 123–128. https://doi.org/10.12841/wood.1644-3985.065.03

Guindos, P., & Guaita, M. (2012). The phenomenological fracture criteria and the stress integration volumes in heterogeneous models of wood. In *World Conference on Timber Engineering, New Zealand* (Vol. 5, pp. 629–633). http://www.timberdesign.org.nz/files/00336 %20Pablo%20Guindos.pdf

Iraola, B., & Cabrero, J. M. (2016). An algorithm to model wood accounting for different tension and compression elastic and failure behaviors. *Engineering Structures*, *117*, 332–343. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.03.021

Kyzioł, L. (2017). Description of strength of wood composite in compound state of load. *Journal of KONES Powertrain and Transport*, *24*(3), 32–38. https://doi.org/10.5604/01.3001.0010.3066

Liu, J. Y. (2002). Analysis of off-axis tension test of wood specimens. *Wood and Fiber Science*, *34*(2), 205–211. Retrieved from: https://wfs.swst.org/index.php/wfs/article/viewFile/1905/1905
Mascia, N. T., & Simoni, R. A. (2013). Analysis of failure criteria applied to wood. *Engineering Failure Analysis*, *35*, 703–712. https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.07.001
Mishchenko, A.S., Solovyev, Y.P., & Fomenko, A.T. (1985). *Problems in differential geometry and topology*. Translated from the Russian by Oleg Efimov. Moscow: Mir Publishers.
Osswald, P. V., & Osswald, T. A. (2017). A strength tensor based failure criterion with stress interactions. Polym. Compos. https://doi.org/10.1002/pc.24275
Redman, A. L. (2017). *Modelling of vacuum drying of Australian hardwood species* (Doctoral dissertation, Queensland University of Technology). https://doi.org/10.5204/thesis.eprints.110505
Van der Put, T. A. C. M. (2005). The tensor polynomial failure criterion for wood. *Delft Wood Science Foundation, Delft*. Retrieved from: https://www.researchgate.net/profile/T_A_C_M_Put/publication/263734321_A2005_Tensorpolynomial_failure_criterion_for_wood/links/0c96053bc4c90d9e89000000.pdf
Van der Put, T. A. C. M. (2015). Exact failure criterion of wood: Theory extension and synthesis of all series A publications. *Delft Wood Science Foundation Publication Series, 1, 201–205*. Retrieved from: http://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:1c453f6 e-dc03-4c3 e-b2d2-fd87635c954 d/datastream/OBJ/view
Yatsenko, V. F. (1988). *Prochnost kompozytsyonnykh materyalov* [Strength of composite materials]. Kyiv: Vyshcha shkola. [in Russian].

С. Б. Поберейко[1], А. А. Яковенко[1], М. М. Мысык[1], Е. П. Кунынец[2]
[1] *Национальный лесотехнический университет Украины, г. Львов, Украина*
[2] *Концерн "ЕНО Мебель ЛТД", г. Мукачево, Украина*

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Целью исследования является выявление механических теорий прочности и математических моделей определения предельного напряженного состояния анизотропных материалов, пригодных для адекватного описания упругой области деформирования древесины хвойных и лиственных пород в условиях двухосной, плоской и объемной механических нагрузок. Актуальность исследования обусловлена тем, что на сегодняшний день не существует единой методики аппроксимации результатов экспериментальных исследований кратковременной прочности композитных материалов со сложным напряженным состоянием. В математической постановке задачи одна и та же поверхность кратковременной прочности может удовлетворительно описываться нескольким критериям. Для достижения поставленной цели проведена классификация и сделан сравнительный анализ известных механических теорий кратковременной прочности анизотропных материалов и основных положений общей теории квадрик. В частности, проанализированы критерии прочности Ашкенази, Мизеса, Марина-Ху, Прагера, Норриса-Мак-Кинена, Хилла, Цай-Хилла, Цай-Ву, Хоффмана, Норриса, Фишера, Захарова, Малмейстра и Гольденблата-Копнова. В результате такого анализа установлено, что условия прочности для материалов со слабой асимметрией пределов прочности в направлениях структурной симметрии непригодны для описания поверхностей прочности материалов с сильной асимметрией пределов прочности. Выявлено, что двухосное и плоское напряженно-деформированное состояния в тангентально-радиальной плоскости структурной симметрии древесины лиственных пород удовлетворительно описывается критерием Ашкенази, а древесины хвойных пород – критерием Гольденблата-Копнова.
Ключевые слова: анизотропный критерий прочности; напряженно-деформационное состояние; тензор напряжений.

S. B. Pobereyko[1], A. A. Yakovenko[1], M. M. Mysyk[1], Ye. P. Kunynets[2]
[1] *Ukrainian National Forestry University, Lviv, Ukraine*
[2] *Concern "ENO Mebli Ltd", Mukachevo, Ukraine*

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF THEORETICAL STUDIES RESULTS OF THE BOUNDARY STRESS STATE OF ANISOTROPIC MATERIALS

The purpose of the study is to identify mechanical theories of strength and mathematical models for determining the limiting stress state of anisotropic materials suitable for the adequate description of the elastic range of deformation of softwood and hardwood in biaxial, planar and bulk mechanical loads. The relevance of the study is due to the fact that today there is no unified methodology for approximating the results of experimental studies of the short-term strength of composite materials with a complex stressed state. In the mathematical formulation of the problem, one and the same short-term strength surface can be satisfactorily described by several criteria. To achieve this goal, a classification and a comparative analysis of the known mechanical theories of the short-term strength of anisotropic materials and the main provisions of the general theory of quadrics was made. It has been established that, to date, there is no single generally accepted theory, which methods would adequately assess the limits of elastic, viscoelastic and viscoelastoplastic deformation regions of biological origin anisotropic composite materials under conditions of complex mechanical and temperature-humidity loads. In particular, the strength criteria of Ashkenazi, von Mises, Marin-Hu, Prager, Norris-McKeenen, Hill, Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman, Norris, Fisher, Zakharov, Malmeister, and Goldenblat-Kopnov were analysed. As a result, it has been established that the strength conditions for materials with a weak asymmetry of strength limits in the direction of structural symmetry are unsuitable for describing the strength surfaces of materials with a strong asymmetry of ultimate strength. We have revealed that the biaxial and flat stress-strain state in the tangential-radial plane of structural symmetry of hardwood is satisfactorily described by the Ashkenazi criterion and softwood by the Goldenblatt-Kopnov criterion. A promising direction of further research is the identification of a universal strength criterion, suitable, in contrast to the standard tensor-polynomial criteria, to adequately predict the plasticity surface and the region of viscoelastic deformation of anisotropic materials.
Keywords: anisotropic strength criteria; stress states; strength criterion; strength tensor.