УДК 514.18

# МЕТОД ПОДАННЯ АПРОКСИМУЮЧОЇ ФУНКЦІЇ

**Пихтєєва І.В., к.т.н.**
**Мацулевич О.Є., к.т.н.**
**Щербина В.М., к.т.н.**
*Таврійський державний агротехнологічний університет,*
*Тел.: (0619) 42-68-62*

***Анотація*** **– робота присвячена розвитку методу найменших квадратів для випадку подання аппроксимирующих функцій, побудованої, на основі згладжених дискретних характеристик, дискретно представленої кривої (ДПК).**

***Ключові слова*** **– дискретно представлена крива (ДПК), метод найменшихквадратів,згладженідискретні характеристики**

*Постановка задачі.* Для заданої на рівномірній сітці плоскої ДПК, значення ординат якої обтяжені випадковими похибками, розподіленими за нормальним законом з нульовим середнім і одиничною дисперсією, побудувати апроксимуючий точковий ряд, що враховує згладжений значення різниці вихідної ДПК, сума квадратів відхилення якого від точок ДПК згідно з критерієм методу найменших квадратів (МНК) мінімальна.

*Аналіз останніх досліджень.* Особливістю дискретного методу найменших квадратів (ДМНК) є те, що, в процесі моделювання, в якості визначальних параметрів, можуть виступати не тільки ординати моделюючої ДПК, а й значення розділених (кінцевих) різниць заданого порядку. При цьомуреалізуються два підходи:

- Апроксимація за критерієм МНК з урахуванням апроксимуючої функції, коли визначальніп араметри вибираються на підставі властивостей цієї функції;
- Апроксимація без урахування апроксимуючої функції, коли визначальні параметри спираються на диференціальні властивості апроксимуючої функції (множина розділених або кінцевих різниць) без фіксації закону їх зміни.

Вочевидь, що, при реальному моделюванні, більш поширеною є схема з ваговими коефіцієнтами. Вибір значень таких коефіцієнтів визначається умовами експерименту.

Введення вагових коефіцієнтів видозмінює обчислювальні алгоритми і впливає на результат моделювання.

Загальний алгоритм ДМНК

Спочатку розглянемо точкову апроксимацію на основі безперервного МНК. Нехай, заданий на рівномірній сітці з кроком $h= x_i+1 - x_i$ , точковий ряд ($x_i$, $y_i$), $i = \overline{0_i; n}$ деякої ДПК, який не має точок з однаковими абсцисами. Потрібно апроксимувати його за критерієм МНК деякою функцією $y=f(x)$. Неодмінною умовою є лінійність параметрів цієї функції. Рішення завдання полягає в наступному:

**Алгоритм 1.** Точкова апроксимація за критерієм МНК.

1. Вибирається вид апроксимуючої функції. Найчастіше це алгебраїчний поліном, рідше - тригонометричний, експоненціальне поліном або інші функції, наприклад, їх комбінації, лінійні щодо своїх коефіцієнтів (параметрів).

2. Записується умова МНК

$$F=\sum (y_i - f(x_i))2= min$$

3.Функції F диференціюється за параметрами $a_0, a_1, ...., a_к$, $k<n$,та дорівнюється до нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0}=0;\frac{\partial F}{\partial a_1}=0;...;\frac{\partial F}{\partial a_k}=0$$

4. Вирішується отримана система нормальних рівнянь і визначаються значення параметрів$a_j$, $j = \overline{0; k}$ . Матрицясистеми є симетричною і тому рішеннязавждиіснує.

5.Отриманізначеннякоефіцієнтівпідставляються у функцію $f(x)$ і визначаються відхилення $\Delta_i$ заданихточоквідрозрахункових

$$\Delta_i = y_i - f(x_i)$$

6. Розраховується значення критерію $F$.

Для підвищення точності апроксимації, тобто зменшення значення F, необхідно збільшити число параметрів. Цей процес зменшення F (збільшення числа параметрів) - сходиться і при числі параметрів, що дорівнює числу точок, F = 0, відбувається інтерпретація заданого ряду функцією $y = f(x)$. У численній літературі по МНК і його додатків наведено безліч розв'язаних прикладів за алгоритмом 1.

Розглянемо сутність ДМНК. Його алгоритм полягає в наступному.

**Алгоритм 2.** Дискретна апроксимація за критерієм МНК.

1. Вибіраются залежність між координатами моделює ДПК і визначальними її параметрами.

$$q = q(y_o, y_1, y_2,...,y_n, m_o, m_1,...,m_к)$$

Якщо в якості параметрів виступають ординати точок, що визначають аппроксимуючу ДПК, то розглянута залежність має вигляд різностного співвідношення..

2. Призначается, які з параметрів є визначальними, і, потім, визначаються значення $y_i$ кожної з точок апроксимуючого ряду в залежності від цих (k + 1) параметрів:

$$y_i = y_i(y_o,y_1,...,y_n,m_o,m_1,...,m_к); \quad i=\overline{0,m}, \ i=\overline{0,k}$$

3. Записується умова ДМНК

$$F=\sum_{i=0}^{n}\left(y_i-y_i\right)^2=min$$

4. Діфференцується по кожному з параметрів і складається система нормальних рівнянь.

$$\frac{\partial F}{\partial m_0}=0\ , \quad \frac{\partial F}{\partial m_1}=0\ ,\ldots,\frac{\partial F}{\partial m_k}=0$$

5. Вирішується система нормальних рівнянь і визначаються значення керуючих параметрів $m_o,m_1,...,m_к$. Як і в алгоритмі 1 матриця системи є симетричною, тому рішення завжди існує.

6. Отримані значення параметрів $m_o,m_1,...,m_к$ підставляються в:

$$y_i = y_i(y_o,y_1,...,y_n,m_o,m_1,...,m_к),$$

і визначаютьсяординатиточокапроксимуючого ряду.

7. Розраховуютьсявідхилення $\Delta_i$

$$\Delta_i = y_i - \overline{y}_i,$$

і значення критерія $F$.

*Основна частина*

Розглянемо на рівномірній сітці з кроком $h$ деяку плоску ДПК $\{x_i, y_i\}$, $i = l; n$, на взаємне розташування точок якої не накладається ніяких обмежень (відсутність осциляції, опуклість і т.п.). Загальний алгоритм дискретного методу найменших квадратів [1] полягає в наступному:

Записуємо умову дискретного МНК:

$$\sum_{i=l}^{n}\left(y_i - \overline{y_i}\right)^2 = min, i = \overline{l;n}; \tag{1}$$

де $\overline{y_i}$ - ордината точки апроксимуючої ДПК в і-ом вузлі.

Визначається ордината $\overline{y_i}$ в залежності від визначальних апроксимуючу ДПК параметрів.

1. Отримані в п.2 вираження підставляються в (1) і отримане рівняння диференціюється за параметрами. В результаті рішення отриманої таким чином системи нормальних рівнянь визначаються шукані значення параметрів.
2. Отримані значення параметрів підставляються в вираження п.2, визначаються значення $\overline{y_i}$, їх відхилення $\Delta_i = y_i - \overline{y_i}$ та сума $\sum_{i=l}^{n}\Delta_l^2$.

Особливість пропонованої роботи полягає в новому способі формування $\overline{y_i}$, який полягає в наступному:

1. Запишемо ординати точок апроксимуючої кривої через параметр $y_0$ і послідовний ряд згладжених значень перших кінцевих різниць $\delta_i^1$, $i - l;\ n - l$, для вихідної ДПК

$$\begin{aligned}
&\overline{y_1} = \overline{y_0} + \overline{\delta}_1^1 \cdot h;\\
&\overline{y_2} = \overline{y_1} + \overline{\delta}_2^1 \cdot h = \overline{y_0} + (\overline{\delta}_1^1 + \overline{\delta}_2^1) \cdot h\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overline{y_n} = \overline{y_0} + (\overline{\delta}_1^1 + \overline{\delta}_2^1 + \ldots + \delta_{n+1}^1) \cdot h
\end{aligned} \tag{2}$$

Тут $\overline{\delta}_1^1, \overline{\delta}_2^1, \ldots \overline{\delta}_n^1$ – отримані згладжуванням значення $\delta_i^1 = \left(y_i - y_{i-1}\right)/h,$ розрахованих точок для вихідної ДПК за одним із відомих методів (наприклад, ковзної середньої [2] або диф-смуги [3]).

Цільова функція - критерій МНК має вигляд

$$\begin{aligned}&\left(y_1 - \overline{y}_0 - \overline{\delta}_1^1 \cdot h\right)^2 + \left[y_2 - \overline{y}_0 - \left(\overline{\delta}_1^1 + \overline{\delta}_2^1\right)\cdot h\right]^2 + \\ &+ \left[y_3 - \overline{y}_0 - \left(\overline{\delta}_1^1 + \overline{\delta}_2^1 + \overline{\delta}_3^1\right)\cdot h\right]^2 + \ldots + \\ &+ \left[y_n - \overline{y}_0 - \left(\overline{\delta}_1^1 + \overline{\delta}_2^1 + \ldots + \overline{\delta}_n^1\right)\cdot h\right]^2 = min\end{aligned} \tag{3}$$

Диференціюємоїї за параметром $\overline{y}_0$. Остаточно маємо:

$$\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right) - \overline{y}_0 \cdot n - \left[n\cdot\overline{\delta}_1^1 + (n-1)\,\overline{\delta}_2^1 + \ldots + 2\,\delta_{n-1}^1 + \overline{\delta}_n^1\right]\cdot h = 0 \tag{4}$$

Звідси визначається значення шуканого параметру

$$\overline{y}_0 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=l}^{n} y_1 - \left(n\cdot\overline{\delta}_1^1 + (n-1)\,\overline{\delta}_2^1 + \ldots + \overline{\delta}_n^1\right)\cdot h\right] \tag{5}$$

Підставляємо значення $\overline{y}_0$ в систему (2), визначаємо ординати $\overline{y}_i$, шуканого точкового ряду апроксимуючої ДПК, їх відхилення від точок заданого ряду та суму $\sum_{i=l}^{n} \Delta_l^2$.

Більш достовірний результат можна отримати, якщо аналогічно (2) записати співвідношення з точністю до нескінченно малих другого порядку у вигляді:

$$\begin{aligned}&\overline{y}_3 = \overline{y}_1 + y_2' \cdot 2h; \\ &\overline{y}_4 = \overline{y}_2 + y_3' \cdot 2h; \\ &\overline{y}_5 = \overline{y}_1 + (y_2' + y_4')\cdot 2h; \\ &\overline{y}_6 = \overline{y}_2 + (y_3' + y_5')\cdot 2h; \quad \text{и т.д.}\end{aligned} \tag{6}$$

де параметрами виступають $\overline{y}_1$ та $\overline{y}_2$, а замість різниці виступають згладжені згідно [3] за допомогою диф-смуги значення перших похідних вихідних ДПК.

В цьому випадку критерії МНК залежать від двох параметрів, визначених з системи двох нормальних рівнянь, отриманих диференціюванням функції критерію по $\overline{y}_1$ та $\overline{y}_2$.

За необхідністю уникнути осциляції апроксимуючої ДПК слід враховувати значення других різниць $\overline{\delta}_i^2 = \overline{y}_{i-1} - 2\overline{y}_i + \overline{y}_{i+1}$; $i = 2;\ n - l$, ординат її точок. Тоді

$$\begin{aligned}
&\overline{y}_3 = 2\overline{y}_2 - \overline{y}_1 + \overline{\delta}_2^2;\\
&\overline{y}_4 = 3\overline{y}_2 - 2\overline{y}_1 + 2\overline{\delta}_2^2 + \overline{\delta}_3^2;\\
&\overline{y}_5 = 4\overline{y}_2 - 3\overline{y}_1 + 3\overline{\delta}_2^2 + 2\overline{\delta}_3^2 + \overline{\delta}_4^2; \quad \text{и т.д.}
\end{aligned} \tag{7}$$

Тут параметрами виступають $\overline{y}_1$ та $\overline{y}_2$; другі різниці отримані згладжуванням аналогічних значень для вихідної ДПК.

Вочевидь, що продемонстровані уявлення апроксимуючої ДПК через різниці $\overline{\delta}_2^2$; $\overline{\delta}_3^2$; … $\overline{\delta}_{n-1}^2$ або похідні можна продовжити для старших їх порядків.

Розглянуті уявлення мають узагальнюючий характер і включають як окремий випадок відомі апроксимуючі функції.

Зокрема, для прямої лінії $\overline{\delta}_i^1 = \text{ñîn}st$, функція (3) залежить від двох параметрів $\left(\overline{y}_0 u\delta^1\right)$, визначених з системи двох нормальних рівнянь, отриманих диференціюванням функції-критерію за $\overline{y}_0 u\delta^1$. У цьому випадку виходить єдина МНК-пряма.

Цю ж пряму лінію можна отримати застосовуючи систему (7) при $\overline{\delta}_i^2 = \text{ñîn}st = 0$.

Якщо $\overline{\delta}_i^2 = \text{ñîn}st = \delta^2$, то функція критерію стає залежною від трьох параметрів $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ та $\delta^2$, які визначаютьМНК-параболу другого порядку. Слід зауважити, що отримані в цих випадках значення критерію будуть гіршими, ніж отримані за допомогою систем (2) або (7), де згладжені значення краще відповідають геометрії вихідної ДПК.

*Висновки.*

Особливість пропонованої методики полягає в використанні нового способу формування $\overline{y}_i$.

Викладений метод дозволяє будувати не тільки МНК криві загального вигляду (системи (2) або (7) або алгебраїчні криві), а й трансцендентні апроксимуючі криві (тригонометричні, показові функції і т.п.).

*Література*

1. *Найдыш В.М.* Дискретный метод наименьших квадратов //Прикл.геом. и инж.графика /В.М.Найдыш, И.В.Пыхтеева -К., 1997, вып..62, с.19-22.
2. *Румшинский Л.З.* Математическая обработка результатов эксперимента / Л.З.Румшинский.-М.:Наука, 1971.- 192с.
3. *Верещага В.М.* Дискретно-параметричний метод геометричного моделювання кривих ліній та поверхонь / В.М.Верещага. - Автореф. дис…докт.техн.наук.-К.: КДТУ-БА, 1996.-32с.

## МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АППРОКСИМУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

И.В. Пыхтеева, А.Е. Мацулевич, В.М. Щербина,

***Анотація*** **- работа посвящена развитию метода наименьших квадратов для случая представления аппроксимирующих функций, полученой, на основе сглаженных дискретных характеристик, дискретно представленной кривой (ДПК). Аппроксимация.**

## METHOD OF REPRESENTATION APPROXIMATION OF FUNCTION

I.Pyhteeva, A. Matsulevich, V. Sherbina

***Summary***

**The work is devoted to development of a method of the least squares for a case of representation of approximating functions, half-scientific, on the basis of the smoothed discrete characteristics, discretely submitted curve (DSC).**