УДК 514.18

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ У ТЕРМІНАХ ФУНКЦІЙ УЗАГАЛЬНЕНОГО ТРИВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТУ

Малкіна В.М., д.т.н.
Строкань О.В., к.т.н.
Таврійський державний агротехнологічний університет
Тел/факс (0619) 42-20-32

***Анотація* - у статті запропонований спосіб побудови моделей векторних полів зі спеціальними диференціальними властивостями. Такі поля будуються на базі нових об'єктів – узагальнених тривекторів, завдяки спеціальним властивостям аналітичних функцій узагальненого тривекторного аргументу.**

***Ключові слова* – апроксимація, векторне поле, ортонормований базис, крайові умови.**

Постановка проблеми. При вирішенні задачі апроксимації векторних полів при умові, що саме апроксимуюче поле є розв'язком деякого диференціального рівняння шляхом побудови спеціального ряду за ортонормованим базисом виникає проблема побудови повного базисного набору елементарних векторних полів, які задовольняють цьому диференціальному рівнянню. Тому існує проблема розробки способу побудови повного ортонормованого набору векторних функцій із заданими диференціальними властивостями.

Аналіз останніх досліджень. У роботі [1] було введено новий геометричний об'єкт - узагальнений тривектор. Узагальнений тривектор – це чотиривимірний об'єкт, який представляє собою об'єднання трьох звичайних векторів $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2, \bar{r}_3$, що виходять з однієї точки, і деякого скаляра. Для узагальнених тривекторів введено спеціальні операції [1] – сума узагальнених тривекторів, узагальнено-тривекторний добуток, скалярний добуток, множення на скаляр, та досліджено властивості цих операції. Був побудований простір $\overline{\mathfrak{R}}$ узагальнених тривекторів. У статті [2] було доведено, що узагальнений тривектор можна представити у вигляді

$$\overline{R} = x\overline{I} + y\overline{J} + z\overline{K} + t\overline{1}, \qquad (1)$$

де $\overline{I}, \overline{J}, \overline{K}, \overline{1}$ – спеціальний базис простору $\overline{\Re}$, що є ортонормованим з точки зору скалярного добутку, тобто

$$\left(\overline{I} \cdot \overline{I}\right) = \left(\overline{J} \cdot \overline{J}\right) = \left(\overline{K} \cdot \overline{K}\right) = 1$$
$$\left(\overline{I} \cdot \overline{J}\right) = \left(\overline{J} \cdot \overline{K}\right) = \left(\overline{K} \cdot \overline{I}\right) = 0$$
$$\left(\overline{I} \cdot \overline{1}\right) = \overline{I},\ \left(\overline{J} \cdot \overline{1}\right) = \overline{J},\ \left(\overline{K} \cdot \overline{1}\right) = \overline{K},\ \left(\overline{1} \cdot \overline{1}\right) = \overline{1}.$$

У статті [3] вводилися поняття аналітичної функції від узагальненого тривекторного аргументу $f\left(\overline{R}\right)$, інтеграла від функції узагальненого тривекторного аргументу (1).

Постановка завдання. Розробити спосіб побудови моделей векторних полів на базі аналітичних функцій узагальненого тривекторного аргументу, які мають спеціальні диференціальні властивості.

Основна частина. Розглянемо функцію $f(R)$, яка є аналітичною функцією від тривекторного аргументу $\overline{R} = x\overline{I} + y\overline{J} + z\overline{K}$ і має вигляд

$$f(R) = u(x,y,z)\overline{I} + v(x,y,z)\overline{J} + w(x,y,z)\overline{K} + \varphi(x,y,z)\overline{1} = \overline{K} + k, \qquad (2)$$

де $\overline{K}$ – тривекторна частина узагальненого тривектора $f(R)$,
k – скалярна частина узагальненого тривектора $f(R)$.

Розглянемо тривекторну частина $\overline{K}$ функції (2). Як було доведено в [1], $\overline{K}$ можна представити у вигляді

$$\overline{K} = f_0\left(\overline{I} + \overline{J} + \overline{K}\right) + f_1\left(\overline{I} + \overline{J} - \overline{K}\right) + f_2\left(-\overline{I} + \overline{J} - \overline{K}\right) +$$
$$+ f_3\left(-\overline{I} - \overline{J} + \overline{K}\right) = \overline{K}_0 + \overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \overline{K}_3, \qquad (3)$$

де $f_0 = f(x+y+z)$;
$f_1 = f(x-y-z)$;
$f_2 = f(-x+y-z)$;
$f_3 = f(-x-y+z)$.

Кожний із тривекторів $\overline{K}_0, \overline{K}_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3$ задає деяке потенціальне векторне поле.

Розглянемо, приміром, поле, визначене тривектором $\overline{K}_2$.

$$\overline{K}_2 = f_2\left(-\overline{I} + \overline{J} - \overline{K}\right) = f\left(-x + y - z\right)\left(-\overline{I} + \overline{J} - \overline{K}\right). \qquad (4)$$

Функція $f\left(-x+y-z\right)$ постійна в точках площини $-x+y-z=C \quad \left(C=const\right)$. Тривектор $-\overline{I}+\overline{J}-\overline{K}=\overline{L}_1$ «перпендикулярний» цієї площини (в змісті скалярного добутку), тобто спрямований по «нормалі» до неї.

Побудуємо у просторі нову ортогональну узагальнено-тривекторну систему координат $\overline{I}, \overline{J}, \overline{K}$. Одну з координатних осей направимо уздовж тривектора $\overline{L}_1$. Дві інші осі направимо «паралельно» площині $-x+y-z=C$. У цій системі координат поле, визначене тривектором (4) прийме вигляд

$$\overline{K}_2 = \widetilde{u}_1\widetilde{L}_1 + \widetilde{v}_1\widetilde{L}_2 + \widetilde{w}_1\widetilde{L}_3, \qquad (5)$$

де $\widetilde{u}$ не залежить від y, z, $\widetilde{v}=0, \widetilde{w}=0$.

Розглянемо ротор поля $\overline{K}_2$

$$rot\overline{K}_2 = \left\{\frac{\partial\widetilde{w}}{\partial y} - \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial z}; \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial\widetilde{w}}{\partial x}; \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y}\right\} = \{0,0,0\}.$$

Таким чином, поле $\overline{K}_2$ є потенційним.

За аналогією, дійдемо висновку, що і поля $\overline{K}_0, \overline{K}_1, \overline{K}_3$ потенційні, а значить і суперпозиція полів $\overline{K}_0, \overline{K}_1, \overline{K}_2, \overline{K}_3$ так само є потенційним полем.

Таким чином, тривекторна частина деякої аналітичної узагальнено-тривекторної функції від тривекторного аргументу задає деяке потенціальне поле.

Проведемо аналіз соленоідальних полів, для цього розглянемо деяку функцію

$$f = u(x,y,z)\bar{I} + v(x,y,z)\bar{J} + w(x,y,z)\bar{K}, \qquad (6)$$

що утворює потенціальне поле. Побудуємо функцію

$$\tilde{f} = u(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\bar{I} + v(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\bar{J} + w(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\bar{K}, \qquad (7)$$

де $\tilde{x} = y - z$;
$\tilde{y} = z - x$;
$\tilde{z} = x - y$. (8)

Функція (7) задає соленоідальне поле, тобто поле, дивергенція якого дорівнює нулю.

Дійсно, функція (6) задає потенціальне поле, тому $rot(f) = 0$.

Отже,

$$u_y = v_x, \quad v_z = w_y, \quad w_x = u_z. \qquad (9)$$

Визначимо дивергенцію поля (7), а саме

$$div(\tilde{f}) = u_{\tilde{x}} + v_{\tilde{y}} + w_{\tilde{z}} = \left(u_x x_{\tilde{x}} + u_y y_{\tilde{x}} + u_z z_{\tilde{x}}\right) + \left(v_x x_{\tilde{y}} + v_y y_{\tilde{y}} + v_z z_{\tilde{y}}\right) + \left(w_x x_{\tilde{z}} + w_y y_{\tilde{z}} + w_z z_{\tilde{z}}\right) = \left(-u_y + u_z\right) + \left(v_x - v_z\right) + \left(-w_x + w_y\right) = 0. \qquad (10)$$

Таким чином доведено, що функція $\tilde{f}$ породжує соленоідальне поле.

Якщо у виразу (2) здійснити заміну (8), то тривекторна частина функції $f(R)$ буде описувати соленоідальне поле.

Дійсно,

$$\tilde{f}_0 = f(x+y+z) = f((\tilde{y}-\tilde{z}) + (\tilde{z}-\tilde{x}) + (\tilde{x}-\tilde{y})) = 0;$$
$$\tilde{f}_1 = f(x-y-z) = f((\tilde{y}-\tilde{z}) - (\tilde{z}-\tilde{x}) - (\tilde{x}-\tilde{y})) = f(2(\tilde{y}-\tilde{z}));$$
$$\tilde{f}_2 = f(2(\tilde{z}-\tilde{x})); \; \tilde{f}_3 = f(2(\tilde{x}-\tilde{y})). \qquad (11)$$

Векторна частина функції (2) після заміни (10) має вигляд

$$\begin{aligned}\widetilde{K} &= \widetilde{f}_1\left(\bar{I} - \bar{J} - \overline{K}\right) + \widetilde{f}_2\left(-\bar{I} + \bar{J} - \overline{K}\right) + \widetilde{f}_3\left(-\bar{I} - \bar{J} + \overline{K}\right) = \\ &= \widetilde{K}_1 + \widetilde{K}_2 + \widetilde{K}_3 . \end{aligned} \tag{12}$$

Функції $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \widetilde{f}_3$ постійні на площинах $\widetilde{y} - \widetilde{z} = C_1$, $\widetilde{z} - \widetilde{x} = C_2$, $\widetilde{x} - \widetilde{y} = C_3$ відповідно (C_1, C_2, C_3 – деякі константи). Розглянемо, приміром, $\widetilde{K}_2$.

$$\widetilde{K}_2 = f\left(2\left(\widetilde{z} - \widetilde{x}\right)\right)\left(-\bar{I} + \bar{J} - \overline{K}\right) = \widetilde{f}_2 \widetilde{L}_1 . \tag{13}$$

Тривектор $\overline{T} = -\bar{I} + \overline{K}$ спрямований “перпендикулярно” до площини $\widetilde{z} - \widetilde{x} = C_2$.

Розглянемо скалярний добуток тривектора $\overline{T}$ і тривектора $\widetilde{L}_1 = \left(-\bar{I} + \bar{J} - \overline{K}\right)$.

$$\begin{aligned}\left(\overline{T} \cdot \widetilde{L}_1\right) = \left(-\bar{I} + \bar{J} - \overline{K}\right) \cdot \left(-\bar{I} + \overline{K}\right) = \left(\bar{I} \cdot \bar{I}\right) - \\ - \left(\overline{K} \cdot \overline{K}\right) + \left(\bar{J} \cdot \overline{\Theta}\right) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Отже, тривектори $\widetilde{L}_1 = \left(-\bar{I} + \bar{J} - \overline{K}\right)$ і $\overline{T}$ “перпендикулярні”. Значить $\widetilde{L}_1$ є “паралельним” до площини $\widetilde{z} - \widetilde{x} = C_2$, на якій функція $\widetilde{f}_2$ постійна.

Узагальнюючи викладене, можна сказати, що соленоідальне поле задає функція

$$f\left(\widetilde{R}\right) = \varphi\left(X\right)\left(m\bar{J} + n\overline{K}\right), \tag{14}$$

де X – ось, «перпендикулярна» тривекторам $\bar{J}$ і $\overline{K}$.

Висновки. У статі запропоновано спосіб побудови набору векторних потенціальних і соленоідальних полів на основі аналітичних функцій узагальнено-тривекторного аргументу. Запропонований спосіб дозволяє будувати базисний набор елементарних векторних полів та будувати спеціальні ряди у вигляді розкладання за таким ортонормованим базисом.

Література

1. *Малкіна В.М.* Побудова кільця узагальнених тривекторів / В.М. Малкіна. Праці Тавр. держ. агр.акад. –Мелітополь: ТДАТА, 2001, т.13, вип.4, с.91-94.
2. *Малкіна В.М.* Побудова алгебри тривекторів/ В.М. Малкіна, В.М Найдиш. Прикл. геом. та інж. граф. – К.: КДТУБА, 2001, вип. 68. с. 11-15.
3. *Малкіна В.М.* Дослідження аналітичних функцій узагальнено тривекторного аргументу/В.М. Малкіна. Праці Тавр. держ. агр. академ. Мелітополь, ТДАТА, 2002, т. 16, вип. 4, с. 69-72.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ ОБОЩЕННОГО ТРИВЕКТОРНОГО АРГУМЕНТА

В.М. Малкина, О.В. Строкань

Аннотация **- в статье предложен способ построения моделей векторных полей со специальными дифференциальными свойствами. Такие поля строятся на базе новых объектов – обобщенных тривекторов, благодаря специальным свойствам аналитических функций обобщенного тривекторного аргумента.**

MODELING OF VECTOR FIELDS IN TERMS OF FUNCTIONS OF GENERALIZED 3-VECTOR ARGUMENT

V.Malkina, O. Strokan

Summary

In article the way of construction of models of vector fields with special differential properties is offered. Such fields are under construction on the basis of new objects - generalized 3-vector, due to special properties of analytical functions generalized 3-vector argument.