УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд.техн.наук
А.А. Козак
О.С. Черненко

ДОСЛІДЖЕННЯ ДВОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ МАСИВІВ З ОТВОРАМИ

Шляхом співставлення з чисельно-аналітичним розв'язком задачі про імпульсне навантаження масиву з циліндричним отвором показана працездатність чисельного алгоритму, що базується на переході в частотну область. За допомогою такого підходу в поєднанні з методом граничних елементів досліджена динамічна реакція пружного масиву, послабленого двома отворами, один з яких піддається дії раптово прикладеного тиску.

В даній статті вивчаються особливості дослідження НДС лінійно пружних масивів при імпульсному навантаженні, яке подається початковим відрізком ряду Фур'є. Наближений розв'язок задачі розшукується у вигляді суперпозиції гармонічних коливань, тому перш за все необхідно шляхом порівняння з відомим розв'язком встановити залежність точності результатів від кількості утриманих гармонік. Для побудови еталонного розв'язку розглянемо в стані плоскої деформації задачу про розповсюдження від кругової порожнини радіусу R осесиметричних пружних хвиль, що спричинені прикладеним до контуру отвору тиском, залежність якого від часу має вигляд трапецеїдального імпульсу:

$$q(t)=q_0 f(t)=q_0\begin{cases} 0, & t<0 \ \textit{або} \ t\geq T_q, \\ \dfrac{t}{t_1}, & 0\leq t<t_1, \\ 1, & t_1\leq t<t_2, \\ \dfrac{T_q-t}{T_q-t_2}, & t_2\leq t<T_q. \end{cases} \tag{1}$$

Оскільки мають місце тільки радіальні переміщення $u_r(r,t)$, то рівняння руху в полярній системі координат (r,θ), полюс якої співпадає із центром отвору, записується наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{1}{C_1^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \tag{2}$$

© Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко О.С.

де $C_1=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ – швидкість поздовжньої пружної хвилі, λ і μ – константи Ламе, ρ – густина матеріалу.

Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{rr}=\begin{cases}-q(t), r=R,\\ 0,\ \ r\to\infty,\end{cases} \tag{3}$$

де $\sigma_{rr}=(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda\dfrac{u_r}{r}$ – радіальні напруження.

Тангенціальні напруження визначаються виразом

$$\sigma_{\theta\theta}=\lambda\frac{\partial u_r}{\partial r}+(\lambda+2\mu)\frac{u_r}{r}\,. \tag{4}$$

Для зручності введемо безрозмірні параметри

$$\bar r=\frac{r}{R},\ \bar t=\frac{C_1 t}{R},\ \bar u_r=\frac{(\lambda+2\mu)}{q_0 R}u_r,\ \bar\sigma_{rr}=\frac{\sigma_{rr}}{q_0},\ \bar\sigma_{\theta\theta}=\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}\,, \tag{5}$$

з урахуванням яких співвідношення (2)-(4) набувають вигляду

$$\frac{\partial^2\bar u_r}{\partial\bar r^2}+\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar u_r}{\partial\bar r}-\frac{\bar u_r}{\bar r^2}=\frac{\partial^2\bar u_r}{\partial\bar t^2}\,, \tag{6}$$

$$\bar\sigma_{rr}=\begin{cases}-f(\bar t), \bar r=1,\\ 0,\ \ \bar r\to\infty,\end{cases} \tag{7}$$

$$\bar\sigma_{rr}=\frac{\partial\bar u_r}{\partial\bar r}+\kappa\frac{\bar u_r}{\bar r},\ \ \bar\sigma_{\theta\theta}=\kappa\frac{\partial\bar u_r}{\partial\bar r}+\frac{\bar u_r}{\bar r}, \tag{8}$$

де $\kappa=\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}=\dfrac{\nu}{1-\nu}$, ν – коефіцієнт Пуассона.

Крім того помітимо, що функцію $f(\bar t)$, яка описує залежність тиску від часу, можна шляхом тотожних перетворень подати наступним чином:

$$f(\bar t)=\begin{cases}\dfrac{\bar t}{\bar t_1}, & 0\le\bar t<\bar t_1,\\[2mm] \dfrac{\bar t}{\bar t_1}-\dfrac{(\bar t-\bar t_1)}{\bar t_1}, & \bar t_1\le\bar t<\bar t_2,\\[2mm] \dfrac{\bar t}{\bar t_1}-\dfrac{(\bar t-\bar t_1)}{\bar t_1}-\dfrac{(\bar t-\bar t_2)}{\bar T_q-\bar t_2}, & \bar t_2\le\bar t<\bar T_q,\\[2mm] \dfrac{\bar t}{\bar t_1}-\dfrac{(\bar t-\bar t_1)}{\bar t_1}-\dfrac{(\bar t-\bar t_2)}{\bar T_q-\bar t_2}+\dfrac{(\bar t-\bar T_q)}{\bar T_q-\bar t_2}, & \bar t\ge\bar T_q.\end{cases} \tag{9}$$

Тепер стає зрозуміло, що достатньо знайти пружну реакцію від навантаження, яке змінюється за лінійними законом $f(\bar{t})=\bar{t}/\bar{t}_1$ на всьому часовому інтервалі $\bar{t}\geq 0$, після чого результат можна отримати як суперпозицію такого розв'язку і ще одного або декількох розв'язків, отриманих із першого шляхом множення на деякий коефіцієнт та зсуву на деяку величину $\bar{t}_1$, або $\bar{t}_2$, або $\bar{T}_q$ в залежності від того, якій ділянці трапецеїдального імпульсу відповідає розглядуваний момент часу.

До рівняння (6) застосуємо перетворення Лапласа за часом. За нульових початкових умов отримаємо

$$\frac{d^2\bar{u}_r^L(\bar{r},s)}{d\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{d\bar{u}_r^L(\bar{r},s)}{d\bar{r}}-\left(\frac{1}{\bar{r}^2}+s^2\right)\bar{u}_r^L(\bar{r},s)=0\,, \tag{10}$$

де s – параметр перетворення, а верхній індекс L означає лапласове зображення відповідної величини.

В свою чергу, перетворення граничних умов (7) з урахуванням припущення про лінійний характер навантаження дає

$$\bar{\sigma}_{rr}^L=\frac{\partial\bar{u}_r^L}{\partial\bar{r}}+\kappa\frac{\bar{u}_r^L}{\bar{r}}=\begin{cases}-(\bar{t}_1 s^2)^{-1}, \bar{r}=1,\\ 0,\quad \bar{r}\to\infty\,.\end{cases} \tag{11}$$

Розв'язок рівняння (10), який задовольняє граничні умови (11), згідно [1] має вигляд

$$\bar{u}_r^L(\bar{r},s)=\frac{K_1(s\bar{r})}{\bar{t}_1 s^3\left[K_0(s)+(1-\kappa)\dfrac{K_1(s)}{s}\right]}=\frac{Z_0^L(\bar{r},s)}{\bar{t}_1 N^L(s)}\,, \tag{12}$$

де K_n – модифіковані функції Бесселя другого роду (циліндричні функції Макдональда) порядку n,

$$Z_0^L(\bar{r},s)=\frac{e^s K_1(s\bar{r})}{s^3},\quad N^L(s)=e^s\left[K_0(s)+(1-\kappa)\frac{K_1(s)}{s}\right].$$

Як зазначено в [2], відновлення оригіналу $\bar{u}_r(\bar{r},\bar{t})$, тобто обернення виразу (12), шляхом безпосереднього обчислення відповідного контурного інтеграла є дуже трудомісткою задачею. Тому в згаданій роботі запропоновано скористатись тим, що оригінали окремих компонентів, які входять до складу правої частини виразу (12), є відомими [3], або їх неважко отримати, використовуючи властивості перетворення Лапласа:

$$Z_0(\bar{r},\bar{t})=L^{-1}\left\{Z_0^L(\bar{r},s)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{e^s K_1(s\bar{r})}{s^3}\right\}=$$

$$=H(\bar{t}-\bar{r}+1)\left\{\frac{\left[(\bar{t}+1)^2+2\bar{r}^2\right]\sqrt{(\bar{t}+1)^2-\bar{r}^2}}{6\bar{r}}-\frac{(\bar{t}+1)\bar{r}}{2}\ln\frac{\bar{t}+1+\sqrt{(\bar{t}+1)^2-\bar{r}^2}}{\bar{r}}\right\}, \quad (13)$$

$$N(t)=L^{-1}\left\{N^L(s)\right\}=L^{-1}\left\{e^s\left[K_0(s)+(1-\kappa)\frac{K_1(s)}{s}\right]\right\}=$$

$$=H(\bar{t})\left[\frac{1}{\sqrt{\bar{t}+1)^2-1^2}}+(1-\kappa)\sqrt{\bar{t}+1)^2-1^2}\right], \quad (14)$$

де $H(t)$ – одинична ступінчаста функція (функція Хевісайда).

Тепер, якщо переписати співвідношення (12) у вигляді

$$\bar{u}_r^L(\bar{r},s)N^L(\bar{r},s)=\frac{1}{\bar{t}_1}Z_0^L(\bar{r},s)$$

і скористатись теоремою про згортку оригіналів, отримаємо рівняння Вольтерра першого роду відносно $u_r(r,t)$:

$$\int_0^{\bar{t}}\bar{u}_r(\bar{r},\tau)N(\bar{t}-\tau)d\tau=\frac{1}{\bar{t}_1}Z_0(\bar{r},\bar{t}). \quad (15)$$

Для розв'язання рівняння (15) необхідно розбити часовий інтервал на окремі ділянки і прийняти гіпотезу про характер зміни шуканої функції в межах кожної з них, після чого можна скористатись кроковою процедурою послідовного визначення $\bar{u}_r(\bar{r},\bar{t}_k)$ в задані моменти часу. У тому випадку, коли часовий інтервал поділено на N рівних ділянок величиною $\Delta\bar{t}$, і використовується лінійна апроксимація переміщень, тобто на k-й ділянці

$$\bar{u}_r(\bar{r},\bar{t})=\bar{u}_r(\bar{r},\bar{t}_{k-1})\left(1-\frac{\bar{t}}{\Delta\bar{t}}\right)+\bar{u}_r(\bar{r},\bar{t}_k)\frac{\bar{t}}{\Delta\bar{t}},$$

маємо

$$\bar{u}_r(\bar{r},\bar{t}_1)=\frac{Z_0(\bar{r},\bar{t}_1)}{\bar{t}_1W_1},$$

$$\bar{u}_r(\bar{r},\bar{t}_j)=\frac{\frac{1}{\bar{t}_1}Z_0(\bar{r},\bar{t}_j)-\sum_{k=1}^{j-1}\bar{u}_r(\bar{r},\bar{t}_k)\left(W_{j-k+1}+V_{j-k}\right)}{W_1}, \quad j=2,3,\ldots,N, \quad (16)$$

де

$$W_k=\int_0^{\Delta\bar{t}}\frac{\tau}{\Delta\bar{t}}N(k\Delta\bar{t}-\tau)d\tau, \quad V_k=\int_0^{\Delta\bar{t}}\left(1-\frac{\tau}{\Delta\bar{t}}\right)N(k\Delta\bar{t}-\tau)d\tau. \quad (17)$$

Оскільки інтеграли (17) можуть бути обчислені точно, то і нормовані переміщення за формулою (16) можна знайти з будь-якою точністю.

Диференціювання виразу (15) по $\overline{r}$ із подальшою підстановкою у (8) дозволяє отримати інтегральне рівняння відносно напружень

$$\int_0^{\overline{t}} \overline{\sigma}_{\theta\theta}(\overline{r},\tau) N(\overline{t}-\tau) d\tau = \frac{1}{\overline{t}_1} Z_1(\overline{r},\overline{t}), \tag{18}$$

де

$$Z_1(\overline{r},t) = \kappa \frac{\partial Z_0(\overline{r},t)}{\partial \overline{r}} + \frac{Z_0(\overline{r},t)}{\overline{r}},$$

$$\frac{\partial Z_0(\overline{r},\overline{t})}{\partial \overline{r}} = H(\overline{t}-\overline{r}+1)\left\{ -\frac{\left[(\overline{t}+1)^2-\overline{r}^2\right]^2+3\overline{r}^4}{6\overline{r}^2\sqrt{(\overline{t}+1)^2-\overline{r}^2}} + \right.$$

$$+\frac{\overline{t}+1}{2}\left[\frac{\overline{r}^2}{\left(\overline{t}+1+\sqrt{(\overline{t}+1)^2-\overline{r}^2}\right)\sqrt{(\overline{t}+1)^2-\overline{r}^2}}+1\right]-$$

$$\left. -\frac{\overline{t}+1}{2}\left[-\ln\frac{\overline{t}+1+\sqrt{(\overline{t}+1)^2-\overline{r}^2}}{\overline{r}}\right]\right\}. \tag{19}$$

Чисельна крокова процедура послідовного визначення $\overline{\sigma}_{\theta\theta}(\overline{r},\overline{t}_k)$ в задані моменти часу є аналогічною до процедури визначення переміщень:

$$\overline{\sigma}_{\theta\theta}(\overline{r},\overline{t}_1) = \frac{Z_1(\overline{r},\overline{t}_1)}{\overline{t}_1 W_1},$$

$$\overline{\sigma}_{\theta\theta}(\overline{r},\overline{t}_j) = \frac{\frac{1}{\overline{t}_1} Z_1(\overline{r},\overline{t}_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \overline{\sigma}_{\theta\theta}(\overline{r},\overline{t}_k)\left(W_{j-k+1}+V_{j-k}\right)}{W_1}, \quad j=2,3,\ldots,N. \tag{20}$$

Отже, за допомогою співвідношень (16) та (20) можна побудувати еталонні розв'язки задачі про динамічний НДС пружного простору з круговою циліндричною порожниною, до границі якої прикладений тиск, що змінюється із часом за законом трапецеїдального імпульсу (1).

Розв'яжемо тепер цю задачу за допомогою розвинення навантаження в ряд Фур'є. Для цього будемо вважати навантаження періодичною функцією з періодом $4T_q$, причому на проміжку $0 \le t \le T_q$ навантаження являє собою трапецеїдальний імпульс, заданий виразом (1), тоді як при $T_q < t \le 4T_q$ величина навантаження дорівнює нулю.

Комплексні амплітуди складових навантаження знаходимо шляхом інтегрування

$$q_0 = \frac{1}{2T_q}\int_0^{T_q} q(t)dt\,, \quad q_k^* = \frac{1}{2T_q}\int_0^{T_q} q(t)e^{-i\omega_k t}dt\,, \quad k=1,2,\ldots$$

де $\omega_k = \dfrac{k\pi}{2T_q}$ - частота коливань.

Тоді, оскільки розв'язок задачі про вимушені гармонічні коливання є відомим:

$$u_0(r) = \frac{q_0 R^2}{2\mu r}\,, \quad \sigma_{\theta,0}(r) = \frac{q_0 R^2}{r^2}\,, \tag{21}$$

$$u_k^*(r) = \frac{q_k^*}{\mu}\frac{H_1^{(1)}(\varphi_k r)}{\varphi_k\left\{\left[2\dfrac{H_1^{(1)}(\varphi_k R)}{\varphi_k R} - H_0^{(1)}(\varphi_k R)\right] - \dfrac{\lambda}{\mu}H_0^{(1)}(\varphi_k R)\right\}}\,, \; k=1,2,\ldots,$$

$$\sigma_{\theta,k}^*(r) = \frac{q_k^*}{\mu}\frac{\lambda H_0^{(1)}(\varphi_k r) + 2\mu H_1^{(1)}(\varphi_k r)}{\varphi_k r\left\{\left[2\dfrac{H_1^{(1)}(\varphi_k R)}{\varphi_k R} - H_0^{(1)}(\varphi_k R)\right] - \dfrac{\lambda}{\mu}H_0^{(1)}(\varphi_k R)\right\}}\,, \tag{22}$$

де $H_m^{(1)}$ - функція Ганкеля 1-го роду порядку m, $\varphi_k = \dfrac{\omega_k}{C_1}$, то наближену реакцію на імпульсне навантаження знаходимо, використовуючи наступні співвідношення:

$$u_r(r) = \frac{1}{2}u_0(r) + \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{K} u_k^*(r)e^{i\omega_k t}\right\}, \tag{23}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{1}{2}\sigma_{\theta,0}(r) + \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{K} \sigma_{\theta,k}^*(r)e^{i\omega_k t}\right\}. \tag{24}$$

На рис. 1 наведені графіки нормованих значень величин $u_r^{норм.} = \dfrac{u_r(R)\mu}{q_0 R}$ (криві 3 і 4) та $\sigma_{\theta\theta}^{норм.} = \dfrac{\sigma_{\theta\theta}(R)}{q_0}$ (криві 1 і 2), обчислених в точках границі отвору. Графіки 1 і 3 побудовані за допомогою чисельно-аналітичного підходу, тобто з викристанням співвідношень відповідно (20) та (16). Для побудови графіків 2 і 4 застосовані наближені співвідношення (24) та (23) відповідно, причому при розрахунках було використано вісім перших членів ряду $(K=7)$. Навантаження у вигляді трапецеїдального імпульсу мало параметри $\overline{t_1} = 4.44$, $\overline{t_2} = 15.56$, $\overline{T_q} = 20$, тоді як пружне середовище характеризувалось коефіцієнтом Пуассона ν=0.25 (λ=μ), модулем зсуву μ=80000 *МПа* та густиною ρ=7850 *кг/м*^{3}.

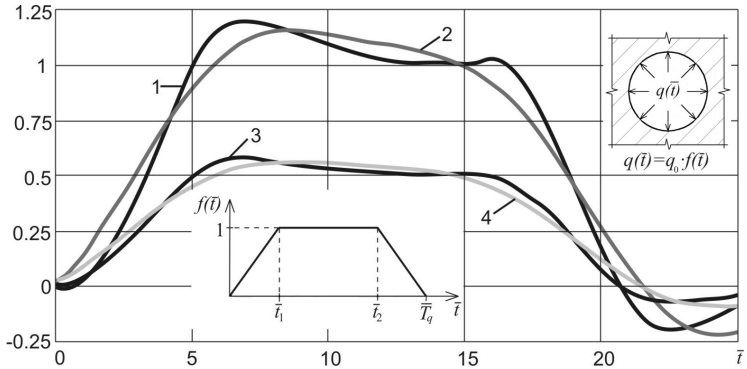


Рис. 1

Як свідчать дані розрахунків за формулами (16) та (20), і радіальні переміщення, і тангенціальні напруження досягають на границі найбільших значень при $\bar{t}=7$, а найменших – при $\bar{t}=22.5$. В околі $\bar{t}=15$ обидва параметри практично не відрізняються від своїх значень при статичному навантаженні. Крім того, слід відмітити, що граничні напруження мають локальний максимум при $\bar{t}=15.95$.

Бачимо, що при використанні в другому підході восьми членів ряду Фур'є (графіки 2 і 4) отримуємо досить приблизну картину динамічного НДС. Детальніше співставлення нормованих радіальних переміщень, отриманих за двома підходами, міститься в табл. 1.

Таблиця 1

$\bar{t}$	Еталонне значення $u_r^{норм.}$	Наближені значення за формулою (23)					
		$K=7$		$K=11$		$K=15$	
		$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %	$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %	$u_r^{норм.}$	Відносна похибка, %
7	0.574	0.543	5.4	0.585	1.9	0.577	0.5
15	0.502	0.483	3.8	0.518	3.2	0.505	0.6
22.5	-0.0725	-0.0568	21.7	-0.0793	9.4	-0.0749	3.3

Результати обчислення і порівняння нормованих тангенціальних напружень наведені в таблиці 2.

Як бачимо, при збільшенні кількості членів ряду Фур'є наближений розв'язок прямує, хоча і досить повільно, до еталонного. Зазначимо, що вже при 12 членах ряду ($K=11$) розбіжність максимальних значень параметрів НДС не перевищує 2%, а відповідні графіки візуально майже не

відрізняються між собою. Отже, за наявності надійного інструменту для визначення переміщень і напружень при вимушених гармонічних коливаннях такий підхід може успішно застосовуватись при дослідженні реакції двовимірних пружних об'єктів, послаблених різного роду отворами.

Таблиця 2

$\bar{t}$	Еталонне значення $\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Наближені значення за формулою (24)					
		$K = 7$		$K = 11$		$K = 15$	
		$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %	$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %	$\sigma_{\theta\theta}^{норм.}$	Відносна похибка, %
7	1.198	1.109	7.4	1.213	1.3	1.205	0.6
15	1.005	0.990	1.5	1.055	5.0	1.016	1.1
15.95	1.020	0.917	10.1	1.020	0.1	1.011	0.9
22.5	-0.193	-0.130	32.9	-0.120	3.4	-0.198	2.6

За допомогою цього підходу розв'яжемо задачу про динамічний НДС пружного простору, послабленого двома циліндричними отворами круглого перерізу (рис. 2), границя одного з яких зазнає дії тиску, що змінюється із часом за законом, заданим виразом (1).

Ефективним засобом дослідження гармонічних вимушених коливань пружних об'єктів, що займають нескінченну область, є метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), який дозволяє знайти амплітуди переміщень і напружень на границі, не піддаючи дискретизації саму розрахункову область.

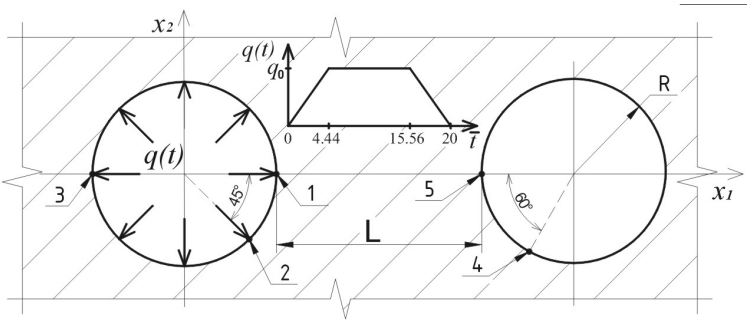


Рис. 2

В якості алгоритмічної основи обчислювального процесу будемо використовувати граничний аналог формули Соміліани для переміщень:

$$\frac{1}{2}u_j^*(\vec{x},\omega)=\int_\Gamma \tau_k^*(\vec{y},\omega)U_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)d\Gamma_y-\int_\Gamma u_k^*(\vec{y},\omega)T_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)d\Gamma_y,\ j,k=1,2, \quad (25)$$

де $u_j^*(\vec{x},\omega)$ – j-а компонента комплексної амплітуди коливань з круговою частотою ω; $\vec{x}\{x_1,x_2\},\vec{y}\{y_1,y_2\}\in\Gamma$; Γ – границя області V; $\tau_j(\vec{y},\omega)=\lambda n_j(\vec{y})\frac{\partial u_m(\vec{y},\omega)}{\partial x_m}+\mu\left(\frac{\partial u_j(\vec{y},\omega)}{\partial y_k}+\frac{\partial u_k(\vec{y},\omega)}{\partial y_j}\right)n_k(\vec{y})$ – компоненти комплексної амплітуди напружень на площинці з нормаллю $\vec{n}\{n_1,n_2\}$; $U_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)$ – фундаментальний розв'язок задачі (амплітуди переміщень в пружному двовимірному просторі від дії зосередженої одиничної сили, яка прикладена в точці $\vec{x}$ в напрямку осі Ox_j) [4]:

$$U_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)=\frac{i}{4\mu}\left[\delta_{jk}U_0(r,\omega)+r_{,j}\,r_{,k}\,U_2(r,\omega)\right]; \quad (26)$$

$$U_0(r,\omega)=H_0^{(1)}(k_1r)-\frac{H_1^{(1)}(k_2r)}{k_2r}+\alpha\frac{H_1^{(1)}(k_1r)}{k_1r};$$

$$U_2(r,\omega)=H_2^{(1)}(k_2r)-\alpha H_2^{(1)}(k_1r);$$

$$k_j=\frac{\omega}{C_j};\quad C_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}};\quad C_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}};\quad \alpha=\frac{C_2^2}{C_1^2};\quad r_{,j}=\frac{\partial r}{\partial y_j}=\frac{y_j-x_j}{r};$$

$r=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$ – відстань між точками $\vec{x}$ і $\vec{y}$; $T_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)$ – узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили [5]:

$$T_{kj}(\vec{x},\vec{y},\omega)=\lambda n_j(\vec{y})\frac{\partial U_{km}(\vec{x},\vec{y},\omega)}{\partial y_m}+\mu\left(\frac{\partial U_{km}(\vec{x},\vec{y},\omega)}{\partial y_j}+\frac{\partial U_{kj}(\vec{x},\vec{y},\omega)}{\partial y_m}\right)n_m(\vec{y}).$$

Чисельна процедура розв'язання системи ГІР (25) базується на представленні границі розрахункової області сукупністю граничних елементів (ГЕ), в межах кожного з яких задані точки колокації, а невідомі змінюються за призначеним законом. Після цього алгебраїзація системи ГІР зводиться до обчислення відповідних інтегралів при послідовному суміщенні т. $\vec{x}$ з кожним колокаційним вузлом. Ситуація ускладнюється, коли інтегрування проводиться по тому самому елементу, на якому розташована т. $\vec{x}$. В цьому випадку відстань між точками $\vec{x}$ і $\vec{y}$ може стати нескінченно малою, а підінтегральні вирази набути нескінченно великих значень, що робить неможливим безпосереднє обчислення діагональних коефіцієнтів алгебраїчного аналога системи. Для подолання вказаної пе-

решкоди функції Ханкеля, що входять до складу ядер ГІР, наближено замінюються початковими відрізками ряду Маклорена. При цьому компоненти ядер набувають вигляду сум, перший доданок яких виявляється рівним компоненті відповідного статичного потенціалу, тоді як інші доданки при $r = 0$ мають скінченні значення:

$$U_0(r,\omega)=\frac{i(1+\alpha)}{\pi}\ln(r)+i\left[\frac{(1+\alpha)}{2}-\left(\frac{k_2 r}{4}\right)^2(3+\alpha^2)\right]-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\alpha}{2}+\gamma(1+\alpha)+\alpha\ln\left(\frac{k_1}{2}\right)+\ln\left(\frac{k_2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2\left[\gamma(3+\alpha^2)-\frac{11+5\alpha^2}{4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha^2\ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right)+3\ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right)\right]\right\}+O\left(r^4\right),$$

$$U_2(r,\omega)=-\frac{i(1-\alpha)}{\pi}+\frac{i(1-\alpha^2)}{2}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2\left[\left(\gamma-\frac{3}{4}\right)(1-\alpha^2)-\alpha^2\ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right)+\ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right)\right]+O\left(r^4\right).$$

Оскільки інтегрування ядер статичної задачі труднощів не викликає, то проблему алгебраїзації системи ГІР можна вважати вирішеною.

При чисельному розв'язанні задачі границя кожного отвору апроксимувалась за допомогою 24 ізопараметричних квадратичних елементів. Розв'язок тестової задачі про розповсюдження гармонічних хвиль від кругового отвору показав, що при такій густині сітки похибка чисельного визначення радіальних переміщень в порівнянні із точним значеннями, заданими виразом (21), не перевищує 0.6 % в широкому діапазоні частот. Відстань L між контурами дорівнювала радіусу отворів. Характеристики середовища (коефіцієнт Пуассона ν, модуль зсуву μ та густина ρ) були такими самими, як і в задачі про розповсюдження пружних осесиметричних хвиль від одиничної порожнини.

На рис. 3 наведені графіки залежності від часу нормованих радіальних переміщень у точках навантаженого (криві 1, 2, 3) і ненавантаженого (криві 4, 5) контурів. Номери точок на рис. 2 відповідають номерам кривих на рис. 3. Переміщення обчислені з використанням виразу (23) при $K = 11$.

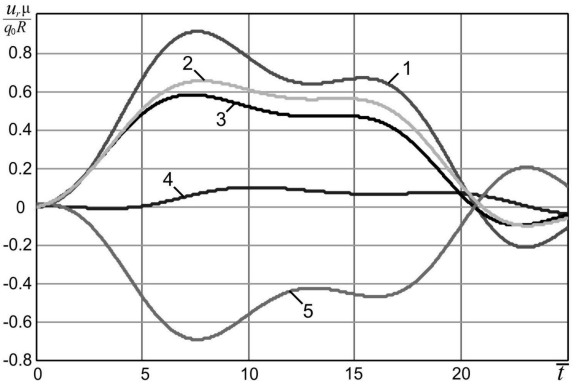


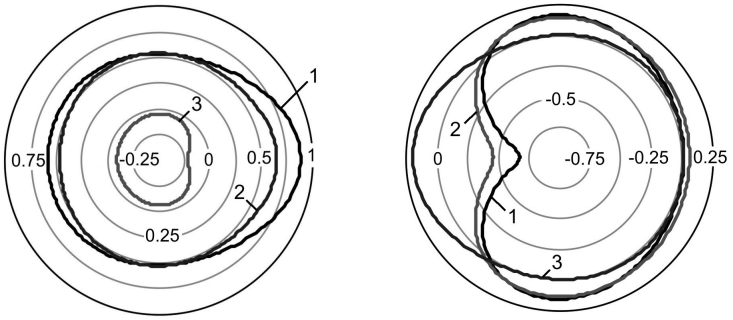
Рис. 3

Як бачимо, переміщення у всіх точках мають локальні максимуми і мінімуми приблизно в одні й ті самі моменти безрозмірного часу: $\bar{t}_1 = 7$, $\bar{t}_2 = 15.4$ і $\bar{t}_3 = 22.6$. Значення нормованих радіальних переміщень $u_r^{норм.} = u_r \mu / (q_0 R)$ у вказані моменти часу, а також при статичному прикладенні тиску q_0 містяться в таблиці 3. Для порівняння в останньому стовпчику таблиці наведені результати обчислення за формулою (16) переміщень на границі простору з одним циліндричним отвором.

Таблиця 3

Момент часу	Нормовані радіальні переміщення $u_r^{норм.}$ в точках границі					
	т. 1	т. 2	т. 3	т. 4	т. 5	Один отвір
$\bar{t}_1$	0.898	0.643	0.579	0.051	-0.682	0.574
$\bar{t}_2$	0.666	0.552	0.462	0.064	-0.464	0.502
$\bar{t}_3$	-0.206	-0.096	-0.098	0.015	0.195	-0.073
Статичне навантаж.	0.686	0.549	0.480	0.059	-0.481	0.500

Розподіл радіальних переміщень вздовж границі навантаженого отвору в моменти часу $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ і $\bar{t}_3$ показаний на рисунку 4,*а* (криві 1, 2, 3 відповідно). На рисунку 4,*б* наведений розподіл переміщень на границі ненавантаженого отвору.



а *б*

Рис. 4

На рис. 5 приведені графіки залежності від часу нормованих тангенціальних напружень $\sigma_{ss}^{норм.} = \sigma_{ss} / q_0$ в тих самих п'яти точках границі (рис. 2). Величини нормованих напружень в характерні моменти часу, а також при статичному прикладенні тиску містяться в табл. 4. Знову для порівняння в останньому стовпчику таблиці наведені результати обчислення за формулою (17) напружень на границі простору з одним отвором. Зазначимо, що всі чисельні результати були отримані з використанням виразу (24) при $K = 11$.

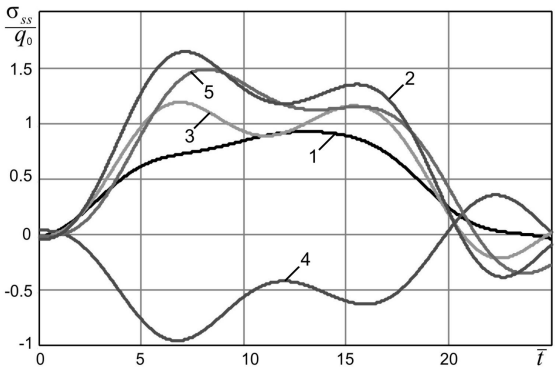


Рис. 5

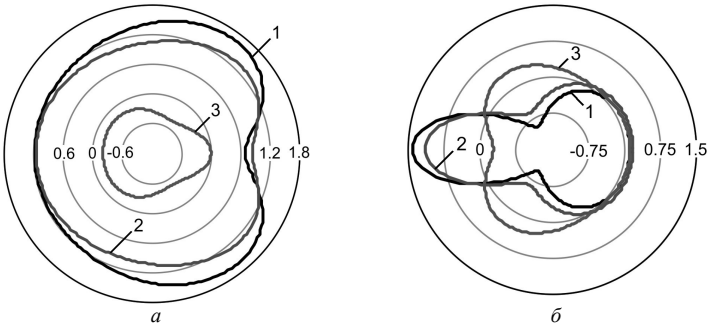
Розподіл тангенціальних напружень в моменти часу $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ і $\bar{t}_3$ (криві 1, 2, 3 відповідно) показаний на рисунках 6,*а* (границя навантаженого отвору) та 6,*б* (границя ненавантаженого отвору).

Максимальні тангенціальні напруження на навантаженому контурі спостерігаються в околі т. 2 в момент часу $\bar{t}_1$, причому їх значення пере-

вищують величини напружень при статичному прикладенні навантаження приблизно на 30%. В околі т. 3 найбільші напруження також мають місце в момент $\bar{t}_1$, але тут перевищення статичного рівня становить приблизно 20%. Водночас, найбільші напруження біля т. 1 виникають в момент $\bar{t}_2$, а їх перевищення порівняно із статичним рівнем становить 13%. Зазначимо також, що досить великі тангенціальні напруження спостерігаються на ненавантаженому контурі в околі т. 5 в моменти $\bar{t}_1$ і $\bar{t}_2$.

Таблиця 4

Момент часу	Нормовані тангенціальні напруження $\sigma_{ss}^{норм.}$ в точках границі					
	т. 1	т. 2	т. 3	т. 4	т. 5	Один отвір
$\bar{t}_1$	0.723	1.638	1.182	-0.957	1.410	1.205
$\bar{t}_2$	0.867	1.343	1.152	-0.620	1.142	1.018
$\bar{t}_3$	0.021	-0.387	-0.218	0.343	-0.280	-0.200
Статичне навантаж.	0.768	1.260	0.985	-0.609	1.111	1.00



а *б*

Рис. 6

Отже, наведені результати свідчать про те, що розроблений підхід може бути застосований для детального дослідження динамічного двовимірного НДС пружних масивів з різного роду отворами при імпульсному навантаженні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
2. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 5. Динамика упругих тел / Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н., Гринченко В.Т. – Киев: Наук. думка, 1986. – 288 с.

3. Справочник по специальнім функциям. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. М.: Наука, 1979. – 830 с.
4. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
5. *Ворона Ю.В, Черненко О.С., Козак А.А.* Дослідження за методом граничних інтегральних рівнянь усталених коливань пластин з послабленнями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 89.– С.158–164.

Стаття надійшла до редакції 17.07.2013 р.

Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко Е.С.,

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ МАССИВОВ С ОТВЕРСТИЯМИ

Путем сопоставления с численно-аналитическим решением задачи про импульсное нагружение массива с цилиндрическим отверстием показана работоспособность численного алгоритма, основанного на переходе в частотную область. С помощью такого подхода в сочетании с методом граничных элементов исследована динамическая реакция упругого массива, ослабленного двумя отверстиями, одно из которых подвергается действию внезапно приложенного давления.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.

TRANSIENT VIBRATIONS ANALYSIS OF 2D ELASTIC SOLIDS WITH HOLES

Efficiency of the transition to the frequency domain is shown on the problem of impulse loading of the array with a cylindrical hole. The analysis of the 2D elastic space with two holes, one of which is exposed suddenly applied pressure, was performed using this approach combined with boundary element method.