УДК 539.3

О.К. Гревцев
О.В. Геращенко, канд. техн. наук

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПОЛОГО ДИСКА ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Отримане точне розв'язання диференціальних рівнянь теорії пружності для полого диска змінної товщини при осесиметричному навантаженні на його внутрішні і зовнішні криволінійні поверхні.

Формули для напружень отримані вперше і дозволяють визначити їх величину у будь-якій точці розглянутого тіла обертання. При цьому бічна поверхня та поверхня полості диска може мати будь-який профіль.

Вступ. Відомо [1,2], що в літературі не наведено точних методів розв'язання задачі теорії пружності для тіл обертання змінної товщини. Зокрема дисків. Наприклад, для тонкого диска змінної товщини, що обертається, припускають, що напруга є плоскою, граничними кмовами на криволінійній бічній поверхні нехтують в силу малої товщини [3]. Для полого диска змінної товщини з осесиметричним навантаженням немає аналітичного методу розв'язання з точки зору теорії пружності.

Основна частина. У пропонованій роботі розглядається точне розв'язання задачі теорії пружності для полого диска змінної товщини симетричного відносно площин $z=0$ і $r=0$, навантаженого рівномірно розподіленим тиском на його внутрішній та зовнішній криволінійнех поверхнях без спрощених гіпотез, що використовуються в плоскій задачі, крім загальних гіпотез лінійної теорії пружності дляґ осесиметричної деформації.

Розглянемо аксіальне тіло обертання, зокрема полий диск, чверть якого показана на рис. 1.

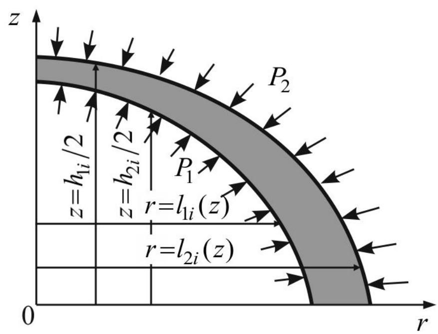

Рис. 1

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах (r,z) мають вигляд [1]:

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{e_{,1}}{1-2\nu} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\theta_{,1} = 0; \quad \Delta u_3 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{e_{,3}}{1-2\nu} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\theta_{,3} = 0 \qquad (1)$$

і напруженнях

$$\sigma_{11,1}+\sigma_{13,1}+\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{r}=0;\quad \sigma_{13,1}+\sigma_{33,3}+\frac{\sigma_{13}}{r}=0\,. \qquad (2)$$

У наведених рівняннях індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою r або z, u_1, u_3 - компоненти відповідно радіального і осьового переміщень, Δu - оператор Лапласа від переміщень u_i $(i=1,3)$, $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$ - компоненти відповідно радіальних, окружних, осьових і дотичних напружень.

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [1]:

$$\sigma_{ij}=2G(e_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}e\delta_{ij}-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\theta\delta_{ij}=0, \qquad i,j=1,2,3 \qquad (3)$$

при відомих залежностях між деформаціями і переміщеннями:

$$e_{11}=u_{1,1};\quad e_{22}=\frac{1}{r}u_1;\quad e_{33}=u_{3,3};\quad 2e_{13}=u_{1,3}+u_{3,1}. \qquad (4)$$

Тут δ_{ij} - символ Кронекера; α і ν - коефіцієнти теплового лінійного розширення і Пуасона; $e=e_{11}+e_{22}+e_{33}$ - об'ємне розширення; $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль зсуву; E - модуль пружності.

Розв'язок системи рівнянь (1) у вигляді:

$$u_1(r,z)=\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\psi_{,1}+\frac{1}{r}(A_5z-A_3)\right]+r(A_4z-\frac{1}{2}A_6);$$

$$u_3(r,z)=\frac{1+\nu}{1-\nu}(\psi_{,3}-A_5\ln r)-A_4(\frac{\nu}{1-\nu}z^2+\frac{r^2}{2})-\frac{\nu}{1-\nu}zA_6+A_7, \qquad (5)$$

де A_i - довільні сталі інтегрування, а $\psi(r,z)$ - функція, яку треба знайти.

Далі по переміщенням (5) за законом Гука (3) визначаємо напруження

$$\sigma_{13}=\frac{E}{1-\nu}\psi_{,13};\quad \sigma_{33}=-\frac{E}{1-\nu}(r\psi_{,1})_{,1};$$

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu}\left[-\frac{1}{r}\psi_{,1}-\psi_{,33}-\frac{1}{r^2}(A_5z-A_3)+A_4z+\frac{1}{2}A_6\right];$$

$$\sigma_{22}=\frac{E}{1-\nu}\left[-\psi_{,11}-\psi_{,33}+\frac{1}{r^2}(A_5z-A_3)+A_4z+\frac{1}{2}A_6\right]. \qquad (6)$$

Вирази (5) і (6) є точним розв'язанням рівнянь рівноваги (1) і (2), оскільки після підстановки останні утворюють тотожності.

Граничні умови для напружень при осесиметричній деформації полого диска змінної товщини такі:

$\sigma_{13}=0$ при $r=l_{1i}(z)$, $\sigma_{13}=0$ при $r=l_{2i}(z)$,

$$\sigma_{13}=0 \text{ при } z=\frac{h_{1i}(r)}{2},\ \sigma_{13}=0 \text{ при } z=\frac{h_{2i}(r)}{2}, \tag{7}$$

$$\sigma_{11}=-P_{2i} \text{ при } r=l_{2i}(z),\ \sigma_{11}=P_{1i} \text{ при } r=l_{1i}(z), \tag{8}$$

$$\sigma_{33}=-P_{2i} \text{ при } z=\frac{h_{2i}(r)}{2},\ \sigma_{33}=P_{1i} \text{ при } z=\frac{h_{1i}(r)}{2}, \tag{9}$$

де $l_{1i}(z), l_{2i}(z)$ - рівняння профілю внутрішньої та зовнішньої поверхонь диску; $\frac{h_{1i}(r)}{2}$, $\frac{h_{2i}(r)}{2}$ - внутрішня довжина полості і зовнішня довжина диска; i – фіксоване значення будь-якої точки тіла диска в перетині осям Оr та Оz і розташованої від неї на цю величину.

Для виконання граничних умов візьмемо частинну похідну по r від функції переміщень $\psi(r,z)$ у вигляді:

$$\psi,_1(r,z)=\varphi(z)\frac{1}{r}\left(r^2-l,_1^2(z)\right)\left(r^2-l,_2^2(z)\right), \tag{10}$$

де $\varphi(z)$ - довільна функція, яку необхідно визначити з граничних умов.

Диференціюючи похідну по z і підставляючи у дотичну напругу σ_{13} з (6) знаходимо:

$$\sigma_{13i}=\frac{E}{1-\nu}\psi,_{13}=\frac{E}{1-\nu}\varphi,_3\frac{1}{r}\left(r^2-l_{1i}^2(z)\right)\left(r^2-l_{2i}^2(z)\right), \tag{11}$$

при цьому

$$\varphi_{13}(z)\Big|_{z=\frac{h_{1i}(r)}{2}}=0;\quad \varphi_{13}(z)\Big|_{z=\frac{h_{2i}(r)}{2}}=0 \tag{12}$$

і граничні умови (7) виконуються.

Підставляючи похідні (10) в осьову напругу σ_{33} з (6), знаходимо

$$\sigma_{33i}=-\frac{E}{1-\nu}\varphi(z)\left[4r^2-2\left(l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)\right)\right]. \tag{13}$$

Граничні умови (9) буде задовільнено, якщо

$$\varphi(z)\Big|_{z=\frac{h_{1i}(r)}{2}}=-P_{1i};\quad \varphi(z)\Big|_{z=\frac{h_{2i}(r)}{2}}=P_{2i}. \tag{14}$$

Для визначення радіальної напруги з (6) знаходимо функцію $\psi(r,z)$, для чого інтегруємо похідну (10) по r

$$\psi(r,z)=\varphi(z)\int\limits_{l_{1i}(z)}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-l_{1i}^2(z)\right)\left(r^2-l_{2i}^2(z)\right)dr+f(z), \tag{15}$$

де $f(z)$ - довільна функція інтегрування.

Використовуючи похідну (10) і двічі диференціюючи функцію (15) по z, а потім підставляючи у формулу (6), отримаємо:

$$\sigma_{11i}=\frac{E}{1-\nu}\left\{-\varphi(z)\frac{1}{r^2}\left(r^2-l_{1i}^2(z)\right)\left(r^2-l_{2i}^2(z)\right)-\right.$$

$$-\varphi_{,33}(z)\int\limits_{l_{1i}(z)}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-l_{1i}^2(z)\right)\left(r^2-l_{2i}^2(z)\right)dr-$$

$$\left.-f_{,33}(r)-\frac{1}{r^2}(A_5z-A_3)+A_4z+\frac{1}{2}A_6\right\}. \qquad (16)$$

Якщо виконані граничні умови (8), то знайдемо рівняння для визначення функцій $\varphi_{,33}(z)$ і $f_{,33}(r)$

$$-\varphi_{,33}(z)=\frac{1-\nu}{E\beta}\cdot\frac{P_{1i}+P_{2i}}{l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)}+\frac{A_5z-A_3}{l_{2i}^2(z)\cdot l_{1i}^2(z)\beta}, \qquad (17)$$

де

$$\beta=\frac{l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)}{l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)}\ln\frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)}-\frac{l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)}{4} \qquad (18)$$

та

$$-f_{,33}(r)=-P_{1i}+\frac{1}{l_{1i}(z)}\cdot(A_5z-A_3)-(A_4z+\frac{1}{2}A_6). \qquad (19)$$

Підстановка похідної (19) у формулу (16) дає:

$$\sigma_{11i}=-P_{1i}+\frac{E}{1-\nu}\left\{-\varphi(z)\frac{1}{r^2}\left(r^2-l_{1i}^2(z)\right)\left(r^2-l_{2i}^2(z)\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_{,33}(z)\int\limits_{l_{1i}(z)}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-l_{1i}^2(z)\right)\left(r^2-l_{2i}^2(z)\right)dr+\frac{(A_5z-A_3)}{l_{1i}^2(z)(1-\frac{l_{1i}^2(z)}{r^2})}\right\}. \qquad (20)$$

Аналогічно для окружного напруження будемо мати:

$$\sigma_{22i}=-P_{1i}+\frac{E}{1-\nu}\left\{-\varphi(z)\left[3r^2\left(l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)\right)-\frac{l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z)}{r}\right]-\right.$$

$$\left.-\varphi_{,33}(z)\int\limits_{l_{1i}(z)}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-l_{1i}^2(z)\right)\left(r^2-l_{2i}^2(z)\right)dr+\frac{(A_5z-A_3)}{l_{1i}^2(z)(1+\frac{l_{1i}^2(z)}{r^2})}\right\}. \qquad (21)$$

Далі інтегруючи рівняння (17), отримаємо:

$$\varphi_{,3}(z)=\frac{1-\nu}{E}\cdot\frac{P_{1i}+P_{2i}}{\left(l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)\right)\beta}z+\frac{A_5 z}{l_{2i}^2(z)\cdot l_{1i}^2(z)\beta}\cdot\frac{z^2}{2}-\frac{A_3}{l_{2i}^2(z)\cdot l_{1i}^2(z)\beta}\cdot z+C_1 \quad (22)$$

та

$$\varphi(z)=\frac{1-\nu}{E}\cdot\frac{P_{1i}+P_{2i}}{\left(l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)\right)\beta}\frac{z^2}{2}+\frac{A_5}{l_{2i}^2(z)\cdot l_{1i}^2(z)\beta}\cdot\frac{z^3}{6}-\frac{A_3}{l_{2i}^2(z)\cdot l_{1i}^2(z)\beta}\cdot\frac{z^2}{2}+C_1 z+C_2, \quad (23)$$

де A_3, A_5, C_1, C_2 - довільні сталі інтегрування.

Скористаймося граничними умовами (12), виконання яких дає:

$$A_5=\frac{8C_1}{h_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}\cdot l_{2i}^2(z)\cdot l_{1i}^2(z)\beta,$$

$$A_3=\frac{1-\nu}{E}(P_{1i}+P_{2i})\cdot\frac{l_{2i}^2(z)\cdot l_{1i}^2(z)}{l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)}+\frac{2\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)}{h_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}\cdot l_{2i}^2(z)\cdot l_{1i}^2(z)\beta C_1. \quad (24)$$

Після підстановки A_3, A_5 у вираз (23), отримаємо:

$$-\varphi(z)=\frac{4z^3}{3h_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)C_1}-\frac{\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)z^2}{h_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)C_1}+C_1 z+C_2, \quad (25)$$

Задовільняючи граничні умови (9), знаходимо:

$$C_1=-\frac{1-\nu}{E}\cdot(P_{1i}+P_{2i})\frac{12h_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}, \quad (26)$$

$$C_2=-\frac{1-\nu}{E}\cdot P_{1i}\left\{1-\frac{2h_{2i}^3(r)-3h_{2i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}{2h_{1i}^3(r)-3h_{1i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}\right\}-$$

$$-\frac{1-\nu}{E}\cdot P_{2i}\left\{1-\frac{2h_{1i}^3(r)-3h_{1i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}{2h_{2i}^3(r)-3h_{2i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}\right\}. \quad (27)$$

Після підстановки (25) у (13), з урахуванням (26) та (27), отримаємо вираз для осьового напруження σ_{33i} :

$$\sigma_{33i}=4r^2-2\left(l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)\right)\left\{P_{1i}\left[1-\frac{16z^3-12z\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+12zh_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2h_{2i}^3(r)-3h_{2i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}{2h_{1i}^3(r)-3h_{1i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}\right]-$$

$$-P_{2i}\left[1+\frac{16z^3-12z\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+12zh_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2h_{1i}^3(r)-3h_{1i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}{2h_{2i}^3(r)-3h_{2i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}\right]\right\}. \qquad (28)$$

Знаходимо дотичне напруження σ_{13i} з (11), враховуючи вирази (22) і (26):

$$\sigma_{13i}=(P_{1i}+P_{2i})\frac{1}{r}\left(r-l_{1i}(z)\right)\left(r-l_{2i}(z)\right)\times$$

$$\times\frac{12\left[4z^2-2z\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+h_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)\right]}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}. \qquad (29)$$

Підставляючи функції $\varphi(z)$ і $\varphi_{,33}(z)$ з (25) і (17), враховуючи вирази (18), (24), (26) і (27), знаходимо радіальні напруження σ_{11i} з рівняння (20):

$$\sigma_{11i}=P_{1i}+\left[\left[\left\{P_{1i}\left(1-\frac{16z^3-12z\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+12zh_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2h_{2i}^3(r)-3h_{2i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}{2h_{1i}^3(r)-3h_{1i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}\right)-$$

$$-P_{2i}\left(1+\frac{16z^3-12z\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+12zh_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2h_{1i}^3(r)-3h_{1i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}{2h_{2i}^3(r)-3h_{2i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}\right)\right\}\left[r^3-r\left(l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)\right)+\frac{l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z)}{r}\right]-$$

$$-\left(P_{1i}+P_{2i}\right)\frac{24z-6\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}\times$$

$$\times\left[r^4+l_{1i}^4(z)-2r^2\left(l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)\right)+2l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z)\left(1+\ln\frac{r}{l_{1i}(z)}\right)\right]-$$

$$-\left(P_{1i}+P_{2i}\right)\left[\frac{24}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{z\left(r^2+l_{1i}^2(z)\right)\left[4l_{1i}^2(z)\ln\frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)}-\left(l_{2i}^4(z)-l_{1i}^4(z)\right)\right]}{r^2\left(l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)\right)}\right]-\left(P_{1i}+P_{2i}\right)\frac{r^2+l_{1i}^2(z)}{l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)}\cdot\frac{l_{2i}^2(z)}{r^2}+$$

$$+\left(P_{1i}+P_{2i}\right)\frac{6\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}\times$$

$$\left.\left.\times\frac{\left(r^2+l_{1i}^2(z)\right)\left[4l_{1i}^2(z)\ln\frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)}-\left(l_{2i}^4(z)-l_{1i}^4(z)\right)\right]}{r^2\left(l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)\right)}\right]\right]. \qquad (30)$$

Аналогічно для окружного напруження будемо мати:

$$\sigma_{22i}=P_{1i}+\left[\left[\left\{P_{1i}\left(1-\frac{16z^3-12z\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+12zh_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2h_{2i}^3(r)-3h_{2i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}{2h_{1i}^3(r)-3h_{1i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}\right)-$$

$$-P_{2i}\left(1+\frac{16z^3-12z\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+12zh_{1i}(r)\cdot h_{2i}(r)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2h_{1i}^3(r)-3h_{1i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}^2(r)h_{2i}(r)}{2h_{2i}^3(r)-3h_{2i}^2(r)\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)+6h_{1i}(r)h_{2i}^2(r)}\right)\right\}\left[3r^2-\left(l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)\right)+\frac{l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z)}{r^2}\right]-$$

$$-\left(P_{1i}+P_{2i}\right)\frac{24z-6\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}\times$$

$$\times\left[r^4+l_{1i}^4(z)-2r^2\left(l_{1i}^2(z)+l_{2i}^2(z)\right)+2l_{1i}^2(z)l_{2i}^2(z)\left(1+\ln\frac{r}{l_{1i}(z)}\right)\right]-$$

$$-\left(P_{1i}+P_{2i}\right)\left[\frac{24}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{z\left(r^2+l_{1i}^2(z)\right)\left[4l_{1i}^2(z)\ln\frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)}-\left(l_{2i}^4(z)-l_{1i}^4(z)\right)\right]}{r^2\left(l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)\right)}\right]-\left(P_{1i}+P_{2i}\right)\frac{r^2+l_{1i}^2(z)}{l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)}\cdot\frac{l_{2i}^2(z)}{r^2}+$$

$$+\left(P_{1i}+P_{2i}\right)\frac{6\left(h_{1i}(r)+h_{2i}(r)\right)}{2\left(h_{2i}^3(r)-h_{1i}^3(r)\right)-3\left(h_{2i}^2(r)-h_{1i}^2(r)\right)+6\left(h_{2i}(r)-h_{1i}(r)\right)}\times$$

$$\left.\left.\times\frac{\left(r^2+l_{1i}^2(z)\right)\left[4l_{1i}^2(z)\ln\frac{l_{2i}(z)}{l_{1i}(z)}-\left(l_{2i}^4(z)-l_{1i}^4(z)\right)\right]}{r^2\left(l_{2i}^2(z)-l_{1i}^2(z)\right)}\right]\right]. \qquad (31)$$

Отже запропонований у статті метод розв’язання осесиметричної задачі теорії пружності, на думку авторів, може знайти застосування при конструюванні аппаратів, які знаходяться під дією гідростатичного тиску на великій глибині. Зокрема, при відсутності внутрішнього тиску $(P_{1i}=0)$ та оптимізації внутрішнього та зовнішнього профілей полого диска змінної товщини, можна отримати таку конструкцію аппарата, яка витримає гідростатичне навантаження на будь-якій глибині. При цьому немає потреби урівноваження зовнішнього тиску внутрішнім. Останнє дуже важливо, оскільки знімає питання кесонної хвороби екіпажу підводного аппарта при різкому винуренні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Тимошенко С.П.*, *Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
2. *Тимошенко С.П.* Курс теории упругости. – К.: Наукова думка, 1972. – 501 с.
3. *Ван Цзи-де*. Прикладная теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.

Стаття надійшла до редакції 21.02.2013 р.

Гревцев А.К., Геращенко О.В.

ПРО ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ДИСКА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Получено точное решение диференциальных уравнений теории упругости для полого диска переменной толщины при осесимметричном нагружении его внутренних и внешних криволинейных поверхностей.
Формули для напряжений получены впервые и позволяют определить их величину в любой точке рассматриваемого тела обертання. При этом боковая поверхность и поверхность полости диска может иметь произвольный профиль.

Grevtsev O.K., Gerashchenko O.V.

ONE OF THE METHODS OF SOLUTION OF AXIALLY SYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR HOLLOW DISK WITH VARIABLE THICKNESS

It was recieved an exact solution of differential equations of the theory of elasticity for hollow disk with variable thickness under axially symmetric loading of its internal and external curvilinear surfaces. Formulas of stress were recieved for a first time. These formulas allow to determine stress value at any point of the examined body of revolution. Meanwhile the side face and surface of disk cavity may have an arbitrary section.