

УДК 621.7

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОШКОДЖУВАНОСТІ МАТЕРІАЛУ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

**Г.І. Львов<sup>1</sup>**

д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри Динаміки та міцності машин

**В.О. О कोरोков<sup>1</sup>**

аспірант кафедри Динаміки та міцності машин

<sup>1</sup>*Національний Технічний Університет «Харківський Політехнічний Інститут»*

Стаття присвячена моделюванню ефекту Баушингера і пошкоджуваності матеріалу, які виникають внаслідок пружно-пластичного деформування матеріалу. Представлені результати проведених серій тестів на циклічне розтягування-стискання плоских зразків, виготовлених з алюмінієвого сплаву Д16. За результатами експериментальних даних була розроблена математична модель пластичності, в яку вводиться параметр пошкоджуваності згідно з концепцією ефективних напружень.

**Ключові слова:** ефект Баушингера, пошкоджуваність матеріалу, експеримент на розтягування-стискання, нелінійне кінематичне зміщення.

**Вступ.** Проблема моделювання пружно-пластичної поведінки матеріалу під час циклічного деформування є вирішальною для оцінки ресурсу при малоцикловій втомлюваності, а також для прогнозування поля залишкових напружень для таких технологічних операцій як автофретування. Існує велика кількість математичних моделей пружно-пластичної поведінки матеріалу, в основі яких лежить концепція поверхні навантаження, яка розділяється пружною і пластичною зонами. Основна різниця між цими моделями полягає у законах зміцнення, які описують зміщення і зміну розмірів поверхні пластичності під час пружно-пластичного деформування.

Класичною моделлю пластичності, яка здатна описувати зміщення і розширення поверхні пластичності є комбінація моделей лінійного ізотропного [1] та лінійного кінематичного [2] зміцнень. Однак, такі моделі не дозволяють в повній мірі врахувати ефект Баушингера, а також взагалі не враховують нелінійної поведінки матеріалу при циклічному складному навантаженні. Різними авторами були розроблені модифікації як для законів зміцнення при кінематичному або ізотропному зміцненнях, так і в виразах, що описують поведінку поверхні пластичності при складному навантаженні. Багатоповерхнева модель Мроза [3] полягає у дискретизації нелінійної кривої деформування лінійними ділянками, що є узагальненням лінійної моделі Прагера [2]. Двоповерхнева модель Попова і Дафаліаса [4] передбачає точніше описування кривої деформування під час одноосного розтягування-стискання.

Згідно з такою моделлю пластичне деформування проходить між двома граничними поверхнями і модуль пластичності представляється неперервною функцією накопленої пластичної деформації. Іншим способом описування нелінійної кривої деформування є модель Армстронга і Фредріка [5], яка передбачає доповнення лінійної моделі Прагера складником, який відображає історію пластичного деформування, що дозволяє по різному моделювати пластичність при розтягуванні та стисканні. Пізніше ця модель була удосконалена Шабошем [6], який для кращого збігу з експериментальними даними запропонував записувати цю модель у вигляді суми.

Точне визначення форми поверхні пластичності, а також її зміна у процесі деформування грає важливе значення у моделюванні пружно-пластичної поведінки матеріалу при циклічному складному навантаженні. Велика кількість сучасних моделей пластичності визначається критерієм пластичності фон Мізеса. Класична модель передбачає, що поверхня пластичності рівномірно, ізотропно розширюється та змінює положення свого центру, де за характеру розширення та зміщення відповідають закони зміцнення. Однак, експериментальні спостереження [7,8] показують, що окрім рівномірного розширення і зміщення, поверхня пластичності також може нерівномірно, анізотропно змінювати свої розміри. Були розроблені декілька моделей пластичності [9,10,11], які враховують анізотропне змінення розміру поверхні пластичності та мають велику кількість констант, які треба визначати з декількох експериментів. Бальтов та Савчук [12] запропонували зручну модифікацію критерію фон Мізеса, згідно з якою поверхня пластичності є еліпсом на девіаторній площині, який змінює свої розміри під час пластичного деформування. В залежності від експериментальних даних модель Бальтова і Савчука може бути удосконалена і більш точніше враховувати зміну форми поверхні пластичності при циклічному складному навантаженні.

Ще одним феноменом, який виникає при пружно-пластичному деформуванні є пошкоджуваність матеріалу, яка проявляється у зниженні модуля пружності під час деформування. Є деякі дослідження [13,14] цього феномену, які показують зниження модуля пружності на стадії розвантаження під час проведення експериментів на розтягування для різних металів. Деякі фізичні пояснення цього феномену, які пов'язані зі зміною щільності дислокацій під час збільшення пластичної деформації представлені у статті [15]. У роботах [16,17] за допомогою континуальної механіки пошкоджуваності моделюється руйнування просторових тіл в умовах тривалих статичних і циклічних навантажень. У даній роботі пропонується моделювати зменшення модуля пружності скалярним

параметром пошкоджуваності, який вводиться згідно з концепцією ефективних напружень.

У даній статті представлені результати експерименту на циклічне розтягування-стискання зразків, виготовлених з алюмінієвого сплаву Д16. Результати експерименту показали, що при розтягуванні зразків у першому циклі матеріал показує майже лінійну поведінку при пластичності. Однак, при подальших циклах розтягування-стискання криві деформування значно нелінійні. Виявилось, що модель нелінійного кінематичного зміцнення Шабоса у поєднанні з моделлю нелінійного ізотропного зміцнення не досить точно прогнозують нелінійний відгук при циклічному деформуванні для даного матеріалу. Тому запропоновано нову модель пластичності, яка полягає в удосконаленні моделі нелінійного кінематичного зміцнення Шабоса шляхом введення додаткових функцій попередньо накопиченої пластичної деформації, а також модифікацією критерію пластичності фон Мізеса.

**Визначальні співвідношення теорії пластичності с урахуванням пошкоджуваності.** Для таких задач, як автофретування звичай застосовується критерій Мізеса з поверхнею пластичності, яка розширюється і зміщується в процесі деформування. Однак, експерименти для багатьох матеріалів, які використовуються для виготовлення товстостінних компонентів конструкцій показують зменшення розміру поверхні текучості в напрямку деформування [18,19], демонструючи глибокий ефект Баушингера (розмір поверхні пластичності в напрямку деформування менше ніж  $2\sigma_y$ , як це передбачено у моделі лінійного кінематичного зміцнення). Цей факт може враховуватися модифікованим критерієм Мізеса відповідно до моделі Бальтова і Савчука [12]:

$$f = \sqrt{N_{ijkl}(S_{ij} - X_{ij})(S_{kl} - X_{kl})} - R - \sigma_y = 0, \quad (1)$$

де  $S_{ij}$  - девіатор тензору напружень;  $R$  - функція ізотропного зміцнення;  $X_{kl}$  - тензор додаткових напружень;  $\sigma_y$  - межа текучості;  $N_{ijkl}$  - тензор четвертого рангу, що є сумою тензорів  $I_{ijkl}$  і  $A_{ijkl}$ , які визначаються наступним чином:

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj} - \frac{3}{2}\delta_{ij}\delta_{kl})m, \quad (2)$$

$$A_{ijkl} = A_0\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{kl}^p, \quad (3)$$

де  $A_0$  - параметр матеріалу;  $\varepsilon_{ij}^p$  - тензор пластичних деформацій.

Згідно з такою моделлю поверхня пластичності у процесі деформування може зміщуватись та анізотропно змінювати свої розміри. У просторі головних напружень поверхня представляє собою еліптичні циліндри, тому слідом поверхні на девіаторній площині є еліпси, які в залежності від знаку коефіцієнта  $A_0$  можуть скорочуватись або подовжуватись у напрямку деформування. Для визначення коефіцієнту  $A_0$  необхідно записати критерій пластичності (1) для одноосного напруженого стану. У випадку, коли поверхня пластичності зміщується і змінює свої розміри тільки у напрямку деформування, тобто не враховуючи ізотропне розширення, критерій пластичності (1) для простого розтягування запишеться у наступному вигляді:

$$\sigma = \frac{\sigma_y}{\sqrt{A_0 \varepsilon_p^2 + 1}} + X, \quad (4)$$

де  $\sigma$  і  $\varepsilon_p$  - напруження і повздовжня пластична деформація при розтягуванні.

У моделі Бальтова і Савчука коефіцієнт  $A_0$  визначається як константа в процесі деформування. Для узгодження з експериментальними результатами пропонується визначити коефіцієнт  $A_0$  у вигляді функції накопиченої пластичної деформації  $p$ .

$$A_0 = \frac{2}{3p^2} \left[ \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_y - H} \right)^2 - 1 \right], \quad (5)$$

де  $H$  - функція накопиченої пластичної деформації, яку зручно представити в вигляді суми функцій:

$$H = \sum_{k=1}^n H^k, \quad (6)$$

$$H^k = G^k [1 - \exp(-b^k p)], \quad (7)$$

де  $G^k$  і  $b^k$  - параметри матеріалу;  $p$  - накопичена пластична деформація, приріст якої визначається наступним чином:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}. \quad (8)$$

Приріст окремої компоненти  $H^k$  має вигляд:

$$\dot{H}^k = b^k (G^k - H^k) \dot{p}. \quad (9)$$

Після підстановки виразу для коефіцієнту  $A_0$  у (1) критерій пластичності для простого розтягування запишеться у наступному вигляді:

$$\sigma = \sigma_y - H + X. \quad (10)$$

Таким чином, функція  $H$  призначена для моделювання ефекту Баушингера, а саме зменшення межі текучості під час пластичного деформування.

Під час проведення експерименту на розтягування-стискання такі матеріали, як алюмінієві сплави показують майже лінійну поведінку під час розтягування, але в той же час крива розвантаження і подальшого стискання значно нелінійна. Таким чином, закони зміцнення під час розтягування і стискання значно різняться. Тому зручно використовувати модель нелінійного кінематичного зміцнення, запропоновану Армстронгом [5]. Згідно такої моделі приріст тензору додаткових напружень записується у наступному вигляді:

$$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} Q \gamma \dot{\epsilon}_{ij}^p - \gamma X_{ij} \dot{p}, \quad (11)$$

де перша частина виразу відповідає лінійному кінематичному зміцненню, а друга частина за рахунок накопиченої пластичної деформації  $p$  відображає історію пластичного деформування. Для кращого узгодження з експериментальними даними Шабошем було запропоновано визначати тензор додаткових напружень у вигляді суми компонентів [6]:

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ij}^k. \quad (12)$$

Експериментальні результати з проведених тестів на розтягування-стискання алюмінієвих зразків показують, що криві стискання після попереднього розтягування до певного рівня пластичної деформації, а також криві наступних циклів навантаження відрізняються між собою і залежать від попередньої накопиченої пластичної деформації, тому для більш точного описання кривої деформування з декількома циклами розтягування-стискання пропонується вдосконалити модель нелінійного кінематичного зміцнення шляхом заміни констант  $Q$  і  $\gamma$  на функції попередньо накопиченої пластичної деформації  $\hat{p}$ . Тоді окрема компонента виразу (12) запишеться наступним чином:

$$X_{ij}^k = \frac{2}{3} \hat{Q}^k \hat{\gamma}^k \dot{\epsilon}_{ij}^p - \hat{\gamma}^k X_{ij}^k \dot{p}, \quad (13)$$

де функції попередньо накопиченої пластичної деформації  $\hat{q}^k$  і  $\hat{\gamma}^k$  пропонується обирати наступним чином:

$$\hat{Q}^k = Q^k + \zeta^k \left( 1 - \exp(-\eta^k \hat{p}) \right), \quad (14)$$

$$\hat{\gamma}^k = \gamma^k + \xi^k \left( 1 - \exp(-\mu^k \hat{p}) \right). \quad (15)$$

Для узгодження закону пластичності з урахуванням зменшення межі текучості зручно включити у тензор додаткових напружень  $X_{ij}$  функцію  $H$  у тензорному вигляді:

$$X_{ij} = X'_{ij} + H'_{ij} \quad (16)$$

або

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^n X'_{ij}{}^k + \sum_{l=1}^m H'_{ij}{}^l. \quad (17)$$

Згідно з (7) і (9) та відповідістю до тензора додаткових напружень, приріст окремого компонента  $H'_{ij}{}^l$  повинен бути представлений у наступному вигляді:

$$\dot{H}'_{ij}{}^l = \frac{2}{3} G^l b^l \dot{\varepsilon}_{ij}^p - b^l H'_{ij}{}^l \dot{p}. \quad (18)$$

В кінцевому вигляді приріст тензору додаткових напружень записується наступним чином:

$$\dot{X}_{ij} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{2}{3} \hat{Q}^k \hat{\gamma}^k \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \hat{\gamma}^k X'_{ij}{}^k \dot{p} \right] + \sum_{l=1}^m \left[ \frac{2}{3} G^l b^l \dot{\varepsilon}_{ij}^p - b^l H'_{ij}{}^l \dot{p} \right]. \quad (19)$$

Зменшення модуля пружності під час пружно-пластичного деформування пропонується моделювати за допомогою введення параметру пошкоджуваності наступним чином:

$$D = 1 - \frac{E_L}{E_U}, \quad (20)$$

де  $E_L$  - модуль пружності під час першого пружного розтягування;  $E_U$  - модуль пружності під час розвантаження;

Експериментальні дослідження показують, що параметр пошкоджуваності залежить від накопиченої пластичної деформації, тому для математичного моделювання зручно вибрати наступну залежність:

$$D = \sum_{k=1}^n Q_D^k (1 - \exp(-\gamma_D^k p)), \quad (21)$$

де  $Q_D^k$  і  $\gamma_D^k$  - параметри матеріалу.

Приріст окремого компонента суми (21) виглядає наступним чином:

$$\dot{D}^k = b_D^k (Q_D^k - D) \dot{p}. \quad (22)$$

Таким чином, згідно з концепцією ефективних напружень тензор напружень Коші з урахуванням пошкоджуваності матеріалу запишеться у наступному вигляді:

$$\sigma_{ij} = (1 - D) E_{ijkl} \epsilon_{kl}^e. \quad (23)$$

**Експериментальні результати та ідентифікація параметрів для моделі пластичності.** З метою визначення констант для запропонованої моделі пластичності було проведено експеримент на розтягування-стискання плоских зразків, вироблених з алюмінієвого сплаву Д16. У статтях [20,21] ідентифікація параметрів базується на підходах мінімізації цільової функції, в основі якої лежить різниця між експериментальними та прогнозованими даними. Для ідентифікації параметрів матеріалу для запропонованої моделі пластичності з урахуванням пошкоджуваності матеріалу пропонується наступна цільова функція [22]:

$$F = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{f_i^*(x_i^*) - \check{f}_i(x_i^*; c)}{f_i^*(x_i^*)} \right]^2}, \quad (24)$$

де  $f_i^*$  і  $x_i^*$  - експериментально отримана функція і її аргумент;  $\check{f}_i$  - значення розрахованої функції, згідно обраної математичної моделі;  $c$  - набір параметрів матеріалу;  $n$  - кількість експериментально отриманих точок.

На рис. 1 показані експериментально виміряні межі текучості в залежності від накопленої пластичної деформації, тобто межа текучості вимірювалася під час кожного циклу розтягування-стискання. Згідно з запропонованою моделлю зменшення розмірів поверхні пластичності моделюється за допомогою функції  $H$ , яка залежить від накопиченої пластичної деформації  $p$  та має параметри матеріалу  $G^k$  і  $b^k$ , які можуть бути визначені за допомогою мінімізації цільової функції (24).

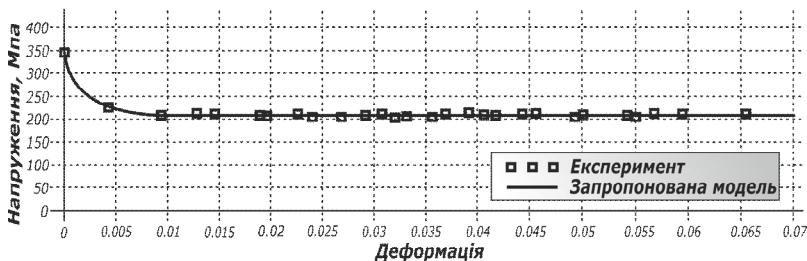


Рис.1. Зменшення межі текучості під час пластичного деформування

Після мінімізації функції (24) були отримані значення параметрів  $G^1$  і  $b^1$ , які представлені у таблиці 1. Як видно з рис. 1, для точного моделювання було достатньо одного компоненту з суми, якою представлена функція  $H$ .

Далі необхідно визначити параметри матеріалу для моделі нелінійного кінематичного зміцнення, яка представлена виразом (19), де частина параметрів вже визначена згідно з узгодженням з функцією  $H$ .

Таблиця 1

Ідентифіковані параметри матеріалу

$G^1$	$b^1$	$Q^1$	$Q^2$	$\gamma^1$	$\gamma^2$	$\zeta^1$	$\eta^1$
140 МПа	385	20 МПа	218 МПа	2125	7	60 МПа	71
$\xi^1$	$\mu^1$	$\zeta^2$	$\eta^2$	$\xi^2$	$\mu^2$	$Q_D^1$	$\gamma_D^1$
-1390	85	-175 МПа	18	2	9	0.224	95

Решта параметрів повинна бути визначена з експерименту на циклічне розтягування-стискання. Для випадку одноосного розтягування-стискання вираз (19) запишеться наступним чином:

$$\dot{X} = \sum_{k=1}^n \left[ \hat{\gamma}^k \hat{Q}^k \dot{\varepsilon}^p - \hat{\gamma}^k X'^k \dot{p} \right] + b^1 G^1 \dot{\varepsilon}^p - b^1 H^1 \dot{p}. \quad (25)$$

Потрібно зазначити, що при циклічному деформуванні приріст компоненти пластичної деформації  $\dot{\varepsilon}^p$  змінює знак, у той же час приріст накопиченої пластичної деформації  $\dot{p}$  є завжди позитивний. Параметри матеріалу  $\hat{Q}^k$  і  $\hat{\gamma}^k$  є функціями попередньо накопиченої пластичної деформації, які у випадку розтягнення у першому циклі розтягнення-стискання є константами  $\hat{Q}^k = Q^k$  і  $\hat{\gamma}^k = \gamma^k$ , так як до першого циклу ще не було пластичного деформування. Для цього випадку інтегрування виразу (25) з початковими умовами  $X'^k(0) = 0, k = \overline{1, n}$  і  $H^1(0) = 0$  дає наступний вираз:

$$X = \sum_{k=1}^n Q^k \left[ 1 - \exp(-\gamma^k p) \right] + G^1 \left[ 1 - \exp(-b^1 p) \right], \quad (26)$$

а інтегрування виразу (9) з початковими умовами  $H^1(0) = 0$  - наступний:

$$H^1 = G^1 \left[ 1 - \exp(-b^1 p) \right]. \quad (27)$$



Згідно з модифікованим критерієм пластичності (1) напруження для одноосного розтягнення визначається виразом (10). З урахуванням (26) і (27) напруження буде визначатись наступним чином:

$$\sigma = \sigma_y + \sum_{k=1}^n Q^k \left[ 1 - \exp(-\gamma^k p) \right]. \quad (28)$$

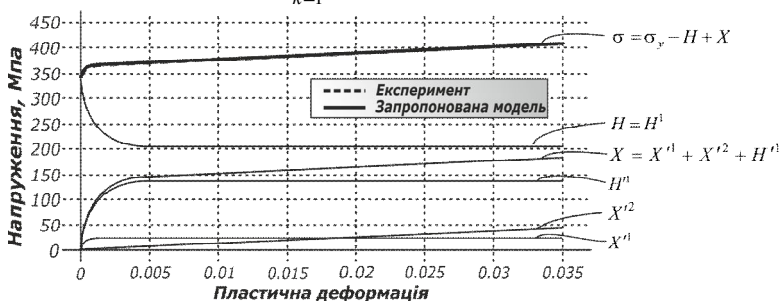


Рис. 2. Діаграма деформування

Для визначення невідомих параметрів матеріалу  $Q^k$  і  $\gamma^k$  була мінімізована цільова функція.

На рис. 2 показана експериментальна діаграма розтягнення у координатах напруження – пластична деформація, а також отримана за допомогою мінімізації розрахункова. Видно, що достатньо двох компонентів з суми, якою представлена функція  $X'$ .

Для визначення решти параметрів матеріалу для нелінійного кінематичного зміцнення потрібно використати експериментальні діаграми розтягнення-стиснення, отримані після проведення декількох циклів розтягнення-стиснення. На рисунку 3 показані криві розтягнення та стиснення в залежності від попередньо накопиченої пластичної деформації  $\bar{p}$  після проведення тесту на циклічне розтягнення-стиснення. Криві побудовані у координатах напруження – пластична деформація, де відлік напруження починається від межі текучості.

Видно, що кожна наступна крива розтягнення чи стиснення збільшує амплітуду напружень по мірі накопичення пластичної деформації під час циклічного деформування. Цей ефект неможливо змоделювати за допомогою стандартної моделі нелінійного кінематичного зміцнення, тому було запропоновано ввести додаткові функції попередньо накопиченої пластичної деформації у вигляді (14) і (15), де невідомими параметрами матеріалу є  $\zeta^k, \eta^k, \xi^k$  і  $\mu^k$ , де  $k = \overline{1,2}$ . Для випадку циклічного деформування інтегрування виразу (25) з початковими

умовами  $X'^k(\bar{p}) = \widehat{X}'^k, k = \overline{1,2}$  і  $H^1(\bar{p}) = \widehat{H}^1$ , де  $\bar{p}$ ,  $\widehat{X}'^k$  і  $\widehat{H}^1$  - накопичені у попередніх циклах пластична деформація і компоненти тензору додаткових напружень при одноосному розтягуванні-стисканні, дає наступний вираз:

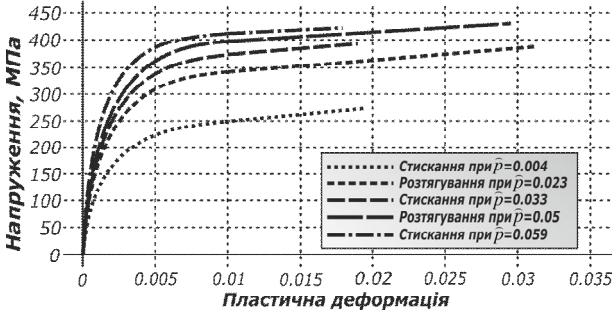


Рис.3. Криві розтягування і стискання при різних рівнях накопиченої пластичної деформації

$$X = \sum_{k=1}^2 (\widehat{Q}^k + \widehat{X}'^k) [1 - \exp(-\widehat{\gamma}^k p)] + (G^1 + \widehat{H}^1) [1 - \exp(-b^1 p)], \quad (29)$$

а інтегрування виразу (9) з початковими умовами  $H^1(\bar{p}) = \widehat{H}^1$  - наступний:

$$H^1 = (G^1 - \widehat{H}^1) [1 - \exp(-b^1 p)]. \quad (30)$$

Одноосне напруження  $\sigma$ , починаючи відлік від межі текучості, для розтягування-стискання з урахуванням попередньо накопиченої пластичної деформації запишеться згідно з критерієм пластичності (1) у наступному вигляді:

$$\sigma = \sum_{k=1}^2 (\widehat{Q}^k + \widehat{X}'^k) [1 - \exp(-\widehat{\gamma}^k p)] + (\widehat{H}^1 + \widehat{H}^1) [1 - \exp(-b^1 p)] \quad (31)$$

Далі, параметри матеріалу  $\widehat{Q}^k$  і  $\widehat{\gamma}^k$ , які залежать від попередньо накопиченої пластичної деформації були знайдені шляхом мінімізації цільової функції (24) для кожного окремого циклу розтягування-стискання. Параметри  $\zeta^k, \eta^k, \xi^k$  і  $\mu^k$ , де  $k = \overline{1,2}$ , також було отримано шляхом мінімізації цільової функції (24) і представлені у табл. 1.

Іншим важливим феноменом, який не може бути проігнорований у моделюванні таких операцій як автофретування є зменшення модуля пружності під час пружно-пластичного деформування. Тому для дослідження цього феномену були виміряні модулі пружності під час етапів розвантаження у експерименті на циклічне розтягування-стискання. Згідно

запропонованої моделі феномен зменшення модуля пружності моделюється параметром пошкоджуваності у відповідності до виразу (20). У свою чергу залежність введеного параметра пошкоджуваності від накопиченої пластичної деформації моделюється виразом (21), де невідомими параметрами матеріалу є  $D_D^k$  і  $\gamma_D^k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Пошук параметрів матеріалу здійснювався шляхом мінімізації цільової функції:

На рисунку 4 зображена експериментальна залежність параметру пошкоджуваності від накопиченої пластичної деформації, а також математично змодельована. Видно, що для доброго узгодження з експериментальними даними достатньо одного компонента із суми, якою представлений параметр пошкоджуваності.

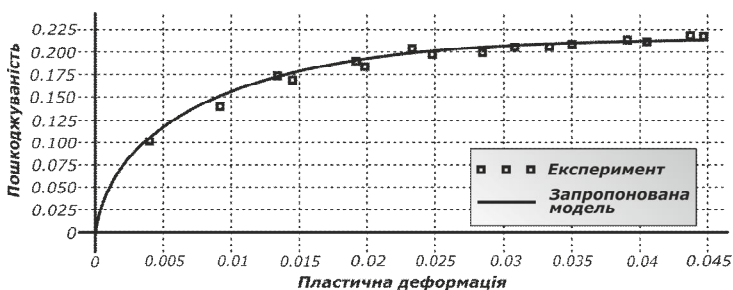


Рис.4. Залежність параметру пошкоджуваності від накопиченої пластичної деформації

**Висновки.** У статті проаналізована модель пластичності, яка урахує такі феномени як ефект Баушингера та пошкоджуваність матеріалу під час пружно-пластичного деформування. Для кращого узгодження з експериментальними даними запропоновано удосконалення моделі нелінійного кінематичного зміцнення шляхом введення додаткових функцій попередньо накопиченої пластичної деформації. Застосовано модифікований критерій пластичності Мізеса, у який введено функцію зменшення межі текучості під час пластичного деформування і який моделює зміщення і анізотропне змінення розмірів поверхні пластичності.

Також у статті представлені результати серії тестів на циклічне розтягування-стискання, проведених з метою виявлення ефекту Баушингера та пошкоджуваності матеріалу, а також отримання точних кривих стискання. Для цього були застосовані плоскі зразки з алюмінієвого сплаву Д16, які розтягувалися і стискалися з різними рівнями пластичної деформації.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hill, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. — 1950. — Oxford, 451c.
2. Mroz Z. On the description of anisotropic work hardening. — *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. —1964. —Vol.15. —P. 163—175
3. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. — *Journal of Applied Mechanics*. —1956. —Vol.23. —P. 493—496
4. Dafalias Y. F., Popov E. P. Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. — *Journal of Applied Mechanics*.—1976. —Vol.43. —P. 645—650
5. Armstrong P. J., Frederick C. O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. — G.E.G.B. Report RD/B/N.—1966. —P. 731—747
6. Chaboche J. L. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. — *International Journal of Plasticity*. —1986. —Vol.2. —P.149—188
7. Helling D. E., Miller A. K. The Incorporation of Yield Surface Distortion into a Unified Constitutive Model, Part I: Equation Development. — *Acta Mechanica*. —1987. — Vol. 69. —P.9—23
8. Rokhgireh H., Nayebi A. A new yield surface distortion model based on Baltov and Sawczuk's model. —2013. —Vol.224. —P.1457—1469.
9. Ortiz M., Popov E.P. Directional hardening rules for metal plasticity. — *Journal of Engineering Mechanics*. —1983. —Vol.109. —P.1042—1057.
10. Eisenberg M.A., Yen C.F. The role of a loading surface in viscoplasticity theory. — *Acta Mechanica*. —1987. —Vol. 69. —P.77—96.
11. Rees D.W.A. An examination of yield surface distortion and translation. — *Acta Mechanica*. —1984. —Vol. 52. —P.15—40.
12. Baltov A., Sawczuk A. A rule of anisotropic hardening. - *Acta Mechanica*. -1965. - Vol. 1. -P.81-92.
13. Parker A. P., Troiano E., Underwood J. H., Mossey C. Characterization of steels using a revised kinematic hardening model incorporating Bauschinger effect. — *Journal of Pressure Vessel Technology*. —2003. — Vol. 125. —P. 277-281.
14. Aliakbari K., Farhangdoost K. The Investigation of Modeling Material Behavior in Autofrettagged Tubes Made from Aluminium Alloys. — *International Journal of Engineering*. —2014. —Vol. 27. —P. 803-810.
15. Puskar A. A Correlation among Elastic Modulus Defect, Plastic Strain and Fatigue Life of Metals. — *Material Science Forum*. —1993. — P.455—460.
16. Баженов В., Гуляр О., Пискунов С. Моделивання континуального руйнування просторових тіл в умовах тривалого статичного і циклічного навантаження. — *Вісник ТНТУ*. — 2013. — Том 72. — № 4. — С.108-117.
17. Пискунов С.О., Гуляр О.І., Мицюк С.В. Огляд співвідношень континуальної механіки руйнування для опису процесів повзучості і втоми. — *Опір матеріалів і теорія споруд*. — - 2013. - Вип. 91. - С. 32-41.
18. Khan A.S., Chen X., Abdel-Karim M. Cyclic multiaxial and shear finite deformation response of OFHC: Part I, experimental results. — *International Journal of Plasticity*. —2007. —Vol. 23. —P.1285—1306.
19. Kurtyka T., Zyczkowski M. Evolution equations for distortional plastic hardening. — *International Journal of Plasticity*. —1996. —Vol. 12. —P.191—213.
20. Badnava H., Pezeshki S. M., Fallah K. Determination of combined hardening material parameters under strain controlled cyclic loading by using the genetic algorithm method. — *Journal of Mechanical Science and Technology*. —2012. —Vol.26. —P.3067-3072.
21. Franulovic M., Basan R., Krizan B. Kinematic Hardening Parameters Identification with Respect to Objective Function. —*International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*. —2014. — Vol. 8. —N. 4. —P. 677-681.
22. Szeliga D., Gawad J., Pietrzyk M., Parameter Identification of Material Model Based on the Inverse Analysis. —*International Journal of Applying Mathematics and Computational Science*. —2004. — Vol 14. —P.549-556.

## REFERENCES

1. Hill, R. *The Mathematical Theory of Plasticity*, 1950, Oxford, 451c.
2. Mroz Z. On the description of anisotropic work hardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1964, Vol.15, P. 163—175.
3. Prager W. A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*, 1956, Vol.23, P. 493—496.
4. Dafalias Y. F., Popov E. P. Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1976, Vol.43, P. 645—650.
5. Armstrong P. J., Frederick C. O. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. G.E.G.B. Report RD/B/N, 1966, P. 731—747.
6. Chaboche J. L. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 1986, Vol.2, P.149—188.
7. Helling D. E., Miller A. K. The Incorporation of Yield Surface Distortion into a Unified Constitutive Model, Part 1: Equation Development. *Acta Mechanica*, 1987, Vol. 69, P.9—23.
8. Rokhgireh H., Nayebi A. A new yield surface distortion model based on Baltov and Sawczuk's model, 2013, Vol.224, P.1457—1469.
9. Ortiz M., Popov E.P. Directional hardening rules for metal plasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, 1983, Vol.109, P.1042—1057.
10. Eisenberg M.A., Yen C.F. The role of a loading surface in viscoplasticity theory. *Acta Mechanica*, 1987, Vol. 69, P.77—96.
11. Rees D.W.A. An examination of yield surface distortion and translation. *Acta Mechanica*, 1984, Vol. 52, P.15—40.
12. Baltov A., Sawczuk A. A rule of anisotropic hardening. *Acta Mechanica*, 1965, Vol.1, P.81—92
13. Parker A. P., Troiano E., Underwood J. H., Mossey C. Characterization of steels using a revised kinematic hardening model incorporating Bauschinger effect. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2003, Vol. 125, P. 277-281.
14. Aliakbari K., Farhangdoost K. The Investigation of Modeling Material Behavior in Autofrettagged Tubes Made from Aluminium Alloys. *International Journal of Engineering*, 2014, Vol. 27, P. 803-810.
15. Puskar A. A Correlation among Elastic Modulus Defect, Plastic Strain and Fatigue Life of Metals. *Material Science Forum*, 1993, P.455—460.
16. Bazhenov V., Gulyar O., Pyskunov S. Modelyuvannya kontynual'nogo rujnuvannya prostorovyh til v umovax tryvalogo statychnogo i cyklichnogo navantazhennya (Modeling of continuum failure of the volumetric solids under long-term static and cyclic load). *Visnyk TNTU*, 2013, Vol 72, № 4, P.108-117.
17. Pyskunov S.O., Gulyar O.I., Mycyuk S.V. Oglyad spivvidnoshen' kontynual'noyi mexaniky rujnuvannya dlya opysu procesiv povzuchosti i vtomy (Review of continuum damage mechanics relations intended for describing of creep and fatigue processes). *Visnyk TNTU*, 2013, Vol 72, № 4, P.108-117.
18. Khan A.S., Chen X., Abdel-Karim M. Cyclic multiaxial and shear finite deformation response of OFHC: Part I, experimental results. *International Journal of Plasticity*, 2007, Vol. 23, P.1285—1306.
19. Kurtyka T., Zyczkowski M. Evolution equations for distortional plastic hardening. *International Journal of Plasticity*, 1996, Vol. 12, P.191—213.
20. Badnava H., Pezeshki S. M., Fallah K. Determination of combined hardening material parameters under strain controlled cyclic loading by using the genetic algorithm method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, Vol.26, P.3067-3072.
21. Franulovic M., Basan R., Krizan B. Kinematic Hardening Parameters Identification with Respect to Objective Function. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*, 2014, Vol. 8, N. 4, P. 677-681.

22. Szeliga D., Gawad J., Pietrzyk M., Parameter Identification of Material Model Based on the Inverse Analysis. International Journal of Applying Mathematics and Computational Science, 2004, Vol 14, P.549-556.

*Lvov G.I., Okorokov V.O.*

#### **MODELING OF MATERIAL DAMAGE AT CYCLIC ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION**

The paper is devoted to modeling of the Bauschinger effect and material damage which occur at elastic-plastic deformation. The series of cyclic tension-compression tests of flat samples made from aluminum alloy D16 were conducted. Based on the experimental data a mathematical model of plasticity is developed. Damage parameter is introduced according to effective stress conception.

**Keywords:** the Bauschinger effect, material damage, tension-compression test, nonlinear kinematic hardening.

*Львов Г.И., Окороков В.А.*

#### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ**

В статье рассматривается моделирование эффекта Баушингера и повреждаемости материала, которые возникают при упругопластическом деформировании. Представлены результаты проведенных серий испытаний на циклическое растяжение-сжатие плоских образцов, изготовленных из алюминиевого сплава Д16. По результатам экспериментальных данных была разработана математическая модель пластичности, в которую вводится параметр повреждаемости согласно концепции эффективных напряжений.

**Ключевые слова:** эффект Баушингера, повреждаемость материала, эксперимент на растяжение-сжатие, нелинейное кинематическое упрочнение.