UDC 539.3

OSCILLATIONS OF CLOZED CONICAL SHELLS AT COMPLEX ROTATION

P.P. Lizunov,
Doctor of Technical Science

E.Z. Kriksunov,
Candidate of Technical Science

O.M. Fesan,
Candidate of Technical Science

*Kyiv national university of construction and architecture,
Kyiv, Povitroflotsky ave., 31, Kyiv. 03037*

DOI: 10.32347/2410-2547.2020.105.127-132

This paper presents the relations that determine the oscillations of a system of two closed conical shells connected by a central rigid insert, which rotate at a constant angular velocity around the axis of symmetry of the system, the center of mass of which moves in the central force field.

Key words: oscillations, closed conical shell, rotational motion, forms of oscillations, central force field.

Introduction. When studying the oscillations of rotating mechanical systems, there are situations when the axis of rotation of the system can rotate, which leads to not only portable and relative, but also Coriolis forces of inertia, which change periodically over time. The gyroscopic interaction between the rotational portable motion of the system and the relative elastic oscillations of the elements is a source of excitation of precession oscillations, which can be resonant or unstable. Occurring when changing the axis of orientation of the system gyroscopic moment causes the appearance of alternating stresses, which significantly affect the strength and reliability of structural elements.

Such tasks arise in construction machinery, mechanical engineering, aircraft construction, space engineering and other sectors of the national economy. The main load acting on the elements of such systems are significant centrifugal forces of inertia, which significantly affect the strength characteristics of structures.

The stress-strain state and oscillations of membranes, plates and shells that perform complex motion in the central force field were researched in the works [1 - 10]. In this work, a mathematical modeling of the oscillations of a system of two folded conical shells with a central rigid insert during complex rotation is performed.

1. Consider a system of two closed conical shells connected by a central rigid insert rotating in opposite directions in the central force field with a constant angular velocity ω around the axis of symmetry of the system [4, 6, 10]. The shell element is subjected to a load consisting of gravitational and

inertial forces, but at large values of the angular velocity of the system, the gravitational loads can be neglected. Then the intensity of the inertial load on the shell element is determined by the formula:

$$\vec{q}^{\,I} = -\rho h(\vec{a}^{\,e} + \vec{a}^{\,r} + \vec{a}^{\,c}), \tag{1.1}$$

where ρ - is the density of the shell material; h - its thickness; $\vec{a}^{\,e}, \vec{a}^{\,r}, \vec{a}^{\,c}$ - vectors of portable, relative and Coriolis accelerations of the shell element.

The components of the vector of portable acceleration of the shell element in the direction of the coordinate lines x_1, x_2, x_3 of the curvilinear coordinate system associated with the shell element have the form [10]:

$$\begin{aligned}
a^e_{x_1} &= \omega^2 (R - x_1\cos\alpha)\cos\alpha + 2\omega\omega_0 (R - x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau + \\
&+ \omega_0^2[(R - x_1\cos\alpha)\cos\alpha\cos^2\tau - x_1\sin^2\alpha]; \\
a^e_{x_2} &= \omega_0^2 (R - x_1\cos\alpha)\sin\tau\cos\tau; \\
a^e_{x_3} &= \omega^2 (R - x_1\cos\alpha)\sin\alpha - 2\omega\omega_0 (R - x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau + \\
&+ \omega_0^2\sin\alpha[(R - x_1\cos\alpha)\cos^2\tau + x_1\cos\alpha],
\end{aligned} \tag{1.2}$$

where ω_0 - angular velocity of rotation of the center of mass of the system; $\tau = \omega t + x_2$ - phase coordinate.

The components of the relative acceleration vector $\vec{a}^{\,r}$ in the direction of the coordinate lines x_1, x_2, x_3 are equal, respectively

$$a^r_{x_1} = \ddot{u};\; a^r_{x_2} = \ddot{\upsilon};\; a^r_{x_3} = \ddot{w}, \tag{1.3}$$

where u, υ, w - is the movement of the shell element in the direction of the coordinate lines x_1, x_2, x_3 . The components of the Coriolis acceleration vector in the direction of the coordinate lines x_1, x_2, x_3 have the form: where u, υ, w - moving the shell element in the direction of the coordinate lines $x_1 x_2 x_3$. The components of the Coriolis acceleration vector $\vec{a}^{\,c}$ in the direction of the coordinate lines x_1, x_2, x_3 have the form:

$$\begin{aligned}
a^c_{x_1} &= 2[\dot{w}\omega_0\cos\tau + \dot{\upsilon}(\omega\cos\alpha + \omega_0\sin\alpha\sin\tau)]; \\
a^c_{x_2} &= -2[\dot{w}(\omega\sin\alpha - \omega_0\cos\alpha\sin\tau) + \dot{u}(\omega\cos\alpha + \omega_0\sin\alpha\sin\tau)]; \\
a^c_{x_3} &= 2[\dot{\upsilon}(\omega\sin\alpha - \omega_0\cos\alpha\sin\tau) - \dot{u}\omega_0\cos\tau].
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Adding expressions (1.2), (1.3) and (1.4), we obtain the components of the vector of absolute acceleration in the coordinate system $x_1 x_2 x_3$:

$$\begin{aligned}
a_{x_1} &= \omega^2 (R - x_1\cos\alpha)\cos\alpha + 2\omega\omega_0 (R - x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau + \\
&+ \omega_0^2[(R - x_1\cos\alpha)\cos\alpha\cos^2\tau - x_1\sin^2\alpha] + \ddot{u} + 2[\dot{w}\omega_0\cos\tau + \dot{\upsilon}(\omega\cos\alpha + \omega_0\sin\alpha\sin\tau)],
\end{aligned}$$

$$a_{x_2}=\omega_0^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\tau\cos\tau+\ddot{\upsilon}-2[\dot{w}(\omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau)+$$
$$+\dot{u}(\omega\cos\alpha+\omega_0\sin\alpha\sin\tau)],$$
$$a_{x_3}=\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha-2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha\sin\tau+$$
$$+\omega_0^2\sin\alpha[(R-x_1\cos\alpha)\cos^2\alpha)\cos^2\tau+x_1\cos\alpha]+\ddot{w}+$$
$$+2[\dot{\upsilon}(\omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau)-\dot{u}\omega_0\cos\tau]. \qquad (1.5)$$

In the case where the angular velocity of the shell is much greater than the angular velocity of the center of mass of the system $(\omega>>\omega_0)$, the expressions for the projections of the inertial load acting on the conical shell on the axis of the coordinate system $x_1x_2x_3$, associated with the shell element, will look like:

$$q_{x_1}=-\rho h\{\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha+2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\sin\alpha\sin\tau+$$
$$+\ddot{u}+2[\dot{w}\omega_0\cos\tau+\dot{\upsilon}(\omega\cos\alpha+\omega_0\sin\alpha\sin\tau)]\},$$
$$q_{x_2}=-\rho h\{\ddot{\upsilon}-2[w(\omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau)+\dot{u}(\omega\cos\alpha+\omega_0\sin\alpha\sin\tau)]\},$$
$$q_{x_3}=-\rho h\{\omega^2(R-x_1\cos\alpha)\sin\tau-2\omega\omega_0(R-x_1\cos\alpha)\cos\alpha\sin\tau+$$
$$+\ddot{w}+2[\dot{\upsilon}(\omega\sin\alpha-\omega_0\cos\alpha\sin\tau)-\dot{u}\omega_0\cos\tau]\}. \qquad (1.6)$$

2. Consider the problem of oscillations of a composite conical shell with a central rigid insert rotating at a constant angular velocity ω relative to the axis of natural rotation, making a plane rotation with a constant angular velocity ω_0. In this case, the equations describing the stress-strain state of the shell have the form [4]

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1}{x_1}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{1}{x_1}(u-w\,\mathrm{tg}\alpha)-\nu\frac{\partial w}{\partial x_1}\mathrm{tg}\alpha\right]\right\}+\rho\omega^2x_1\cos^2\alpha=0,$$
$$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\nu}{x_1}\left(\mathrm{tg}\alpha-\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\right]+\frac{1}{x_1}(u-w\,\mathrm{tg}\alpha)\left[\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{1}{x_1}(\mathrm{tg}\alpha-\frac{\partial w}{\partial x_1})\right]\right\}-$$
$$-\rho\omega^2x_1\sin\alpha\cos\alpha=0, \qquad (2.1)$$

where E - is the modulus of elasticity of the shell material; ν - Poisson's ratio.

The equations of oscillations of the shell with respect to the state of elastic equilibrium described by relations (2.1), taking into account expressions (1.6), have the form:

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x_1^2}+\frac{1}{x_1}\left[\frac{\partial\Delta u}{\partial x_1}-\frac{1}{x_1}(\Delta u+\frac{3-\nu}{2\cos\alpha}\frac{\partial\Delta\upsilon}{\partial x_2}-\Delta w\,\mathrm{tg}\alpha)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x_1}\left(\frac{1+\nu}{2\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta\upsilon}{\partial x_1\partial x_2}-\nu\,\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial\Delta w}{\partial x_1}\right)+\frac{1-\nu}{2x_1^2\cos^2\alpha}\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x_2^2}\right\}-$$

$$-\rho\left\{2\omega\omega_0 x_1 \sin\alpha\cos\alpha\sin\tau+\Delta\ddot{u}+2\left[\Delta\dot{w}\omega_0\cos\tau-\Delta\dot{\upsilon}\left(\omega\cos\alpha-\omega_0\sin\alpha\sin\tau\right)\right]\right\}=0,$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\Delta\upsilon}{\partial x_1^2}+\frac{1}{x_1}\left[\frac{1+\nu}{2\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\Delta\upsilon}{\partial x_1}-\frac{1-\nu}{2x_1}\Delta\upsilon+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{x_1\cos\alpha}\left(\frac{3-\nu}{2}\frac{\partial\Delta u}{\partial x_2}+\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial^2\Delta\upsilon}{\partial x_2^2}-\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial\Delta w}{\partial x_2}\right)\right]\right\}-$$

$$-\rho\left\{\Delta\ddot{\upsilon}-2\left[\Delta w\left(\omega_0\cos\alpha\sin\tau+\omega\sin\alpha\right)-\Delta\dot{u}\left(\omega\cos\alpha-\omega_0\sin\alpha\sin\tau\right)\right]\right\}=0, \quad (2.2)$$

$$N_{11}^{*}\frac{\partial^2\Delta w}{\partial x_1^2}+\frac{N_{22}^{*}}{x_1}\left(\frac{1}{x_1\cos^2\alpha}\frac{\partial^2\Delta w}{\partial x_2^2}-\frac{\partial\Delta w}{\partial x_1}-\frac{\mathrm{tg}\alpha}{x_1 c\cos\alpha}\frac{\partial\Delta\upsilon}{\partial x_2}\right)+$$

$$+\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{\mathrm{tg}\alpha}{x_1}\left[\frac{1}{x_1}\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial\Delta\upsilon}{\partial x_2}+\Delta u-\Delta w tg\alpha\right)+\nu\frac{\partial\Delta u}{\partial x_1}\right]-$$

$$-\rho h\left\{2\omega\omega_0 x_1\cos^2\alpha\sin\tau+2\left[\Delta\dot{\upsilon}\left(\omega_0\cos\alpha\sin\tau+\omega\sin\alpha\right)-\Delta\dot{u}\omega_0\cos\tau\right]+\Delta\ddot{w}\right\}=0,$$

where $\Delta u, \Delta\upsilon, \Delta w$ - the movement of the shell in the direction of the coordinate lines x_1, x_2, x_3 ; N_{11}^{*}, N_{22}^{*} - radial and circumferential forces due to the rotation of the shell relative to the axis of symmetry.

Considering the periodicity of the right-hand side and the coefficients of the system of resolving equations (2.2), using the projection method, we can reduce equations (2.2) to a system of ordinary differential equations with an independent variable x_1 , that approximately replaces the original one.

Conclusions. Differential equations (2.2) describe the oscillations of a system of two closed conical shells connected by a central rigid insert, which rotate at a constant angular velocity around the axis of symmetry of the system, the center of mass of which moves in the central force field.

The solution of the obtained system of equations allows one to determine the forms of vibrations and forces in a composite conical shell for various parameters of the shell and the ratios of the velocities of the shell's own rotation and the rotation of its center of mass.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Oscillations of a rotating membrane disk with a central rigid insert / V.A. Bazhenov, V.I. Gulyaev, S.G. Kravchenko, P.P. Lizunov // Strength problems. - 1986. - No. 6. - P. 108-113.
2. *Gulyaev V.I.* Oscillations of a rotating circular membrane in the field of inertial and gravitational forces / V.I. Gulyaev, S.G. Kravchenko, P.P. Lizunov // Applied Mechanics. - 1986. - 22, No. 11. - P. 112-117.
3. *Lizunov P.P.* Oscillations of a compound conical shell during complex rotation / P.P. Lizunov // Strength of Materials and Theory of Structures. - 1988. - V. 52. - S. 22-27.
4. *Gulyaev V.I.* Oscillations of systems of rigid and deformable bodies during complex motion / V.I. Gulyaev, P.P. Lizunov. - K .: Vyshcha shkola, 1989 .-- 160 p.
5. *Kravchenko S.G.* Nonlinear oscillations of a system of two membranes with a central rigid insert / S.G. Kravchenko, P.P. Lizunov // Strength of Materials and Theory of Structures. -

1986. - V. 49.- P. 11-14.
6. *Grom A.A.* Processional oscillations of plates and shells during complex motion / A.A. Grom, P.P. Lizunov, N. A. Snezhko // Applied Mechanics. - 1997. - 33, No. 7. - P. 652-56.
7. *Lizunov P.P.* Oscillations of the membrane surface of the space reflector / P.P. Lizunov, A.A. Grom // Strength of Materials and Theory of Structures. - 2002. - V.71.-P.146-152.
8. *Lizunov P.P.* Elastic equilibrium of a spherical shell in the central force field / P.P. Lizunov // Strength of Materials and Theory of Structures. - 2013. - V. 91. - P.84-87.
9. *Lizunov P.P.* Oscillations of a spherical shell in the central force field / P.P. Lizunov // Strength of Materials and Theory of Structures. - 2014. - V. 93. - P. 37-42.
10. *Lizunov P.P.* Stress-deformed state of closed conical shells during complex rotation / P.P. Lizunov, E.Z. Kriksunov, O.M. Fesan // Strength of Materials and Theory of Structures. - 2019. - V. 102. - P. 191-198.

Стаття надійшла 29.09.2020

Лізунов П.П., Криксунов Е.З., Фесан О.М.
КОЛИВАННЯ ЗАМКНЕНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ СКЛАДНОМУ ОБЕРТАННІ

В даній роботі розглядається система двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, що обертаються в протилежних напрямах в центральному силовому полі з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи. На елемент оболонки діє навантаження, що складається з гравітаційних та інерційних сил, але при великих значеннях кутової швидкості власного обертання системи гравітаційними навантаженнями можна знехтувати. Гіроскопічна взаємодія між обертальним переносним рухом системи і відносними пружними коливаннями елементів є джерелом збудження прецесійних коливань, які можуть носити резонансний або нестійкий характер. Виникаючий при зміні осі орієнтації системи гіроскопічний момент викликає появу знакозмінних напружень, які істотно впливають на міцність та надійність оболонок. Такі задачі виникають в будівельній техніці, машинобудуванні, авіабудуванні, космічній техніці та інших галузях народного господарства. Основним навантаженням, яке діє на елементи таких систем, є значні відцентрові сили інерції, які істотно впливають на міцнісні характеристики конструкцій. Враховуючи періодичність правої частини і коефіцієнтів системи розв'язувальних рівнянь, за допомогою проекційного методу можна звести розв'язувальні рівняння до системи звичайних диференціальних рівнянь, які наближено замінюють вихідну. Розв'язок отриманої системи рівнянь дозволяє визначати форми коливань і зусилля в складеній конічної оболонці при різних параметрах оболонки і співвідношеннях швидкостей власного обертання оболонки і обертання її центру мас.

Ключові слова: коливання, замкнені конічні оболонки, обертальний рух, форми коливань, центральне силове поле.

Lizunov P.P., Kriksunov E.Z., Fesan O.M.
OSCILLATIONS OF CLOSED CONICAL SHELLS WITH COMPLEX ROTATION

The paper consider a system of two closed conical shells connected by a central rigid insert rotating in opposite directions in a central force field with a constant angular velocity around the axis of symmetry of the system. The shell element is subjected to a load consisting of gravitational and inertial forces, but at large values of the angular velocity of the system, the gravitational loads can be neglected. The gyroscopic interaction between the rotational portable motion of the system and the relative elastic oscillations of the elements is a source of excitation of precession oscillations, which may be resonant or unstable. Occurring when changing the axis of orientation of the system gyroscopic moment causes the appearance of alternating stresses, which significantly affect the strength and reliability of the shells. Such problems arise in construction engineering, mechanical engineering, aircraft construction, space engineering and other sectors of the economy. The main load acting on the elements of such systems are significant centrifugal forces of inertia, which significantly affect the strength characteristics of structures. Taking into account the periodicity of the right-hand side and the coefficients of the system of resolving equations, with the help of the projection method it is possible to reduce the resolving equations to the system of ordinary differential equations, which approximately replaces the original one. The solution of the obtained system of equations makes it possible to determine the forms of oscillations and forces in a composite conical shell at various parameters of the shell and the ratios of the velocities of the shell's own rotation and the rotation of its center of mass.

Key words: oscillations, closed conical shell, rotational motion, forms of oscillations, central force field.

УДК 539.3
Лізунов П.П., Криксунов Е.З., Фесан О.М. **Коливання замкнених конічних оболонок при складному обертанні** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2020. – Вип. 105. – С. 127-132. – Англ.
Наведені співвідношення, що визначають коливання системи двох замкнених конічних оболонок, з'єднаних центральною жорсткою вставкою, які обертаються з постійною кутовою швидкістю навколо осі симетрії системи, центр мас якої здійснює рух в центральному силовому полі.
Бібліогр. 10 назв.

UDC 539.3
Lizunov P.P., Kriksunov E.Z., Fesan O.M. **Oscillations of closed conical shells with complex rotation** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2020. – Issue 105. – P. 127-132.
This paper presents the relations that determine the oscillations of a system of two closed conical shells connected by a central rigid insert, which rotate at a constant angular velocity around the axis of symmetry of the system, the center of mass of which moves in the central force field.
Ref. 10.

УДК 539.3
Лизунов П.П., Криксунов Э.З., Фесан А.Н. Колебания **замкнутых конических оболочек при сложном вращении** // Сопротивление материалов и теория сооружений: научно-тех. сборник. - К .: КНУБА, 2020. - Вып. 105. - С. 127-132.
Приведены соотношения, определяющие колебания системы двух замкнутых конических оболочек, соединенных центральной жесткой вставкой, которые вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии системы, центр масс которой осуществляет движение в центральном силовом поле.
Библиогр. 10 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри основ інформатики КНУБА ЛІЗУНОВ Петро Петрович.*
Адреса робоча: *03037 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра основ інформатики, ЛІЗУНОВ Петро Петрович.*
Адреса домашня: *Україна, м. Київ, вул. Кавказька, 12, кв. 48.*
Мобільний тел.: *+38(067) 921-70-05;*
E-mail: *lizunov@knuba.edu.ua*
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-2924-3025

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник КНУБА КРИКСУНОВ Едуард Зиновійович.*
Адреса робоча: *03037 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, НДІ будівельної механіки, КРИКСУНОВ Едуард Зиновійович.*
E-mail: *edk@scadsoft.com*
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-3357-7020

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник КНУБА ФЕСАН Олександр Миколайович.*
Адреса робоча: *03037 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, НДІ будівельної механіки, ФЕСАН Олександр Миколайович.*
E-mail: *lizunov@knuba.edu.ua*