

УДК 539.3

## ОСОБЛИВОСТІ ПОСТАНОВКИ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

**Ю.В. Ворона,**

кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки

**І.Д. Кара,**

кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки

**М.В. Гончаренко,**

кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки

*Київський національний університет будівництва і архітектури*

DOI: 10.32347/2410-2547.2021.107.312-322

Розглядається задача про поширення сферичних хвиль у термопружному середовищі. Порівнюються два підходи до врахування взаємного впливу динамічних полів деформацій і температури. Прослідковано відповідність між значенням коефіцієнта зв'язаності і похибкою результатів, спричиною використанням спрощених співвідношень теорії температурних напружень. Показано, що для елементів конструкцій з деяких полімерних матеріалів застосування спрощеного підходу призводить до неприйнятно великої похибки.

**Ключові слова:** термопружне середовище, сферичні хвилі, зв'язаність полів, температурні напруження, потенціал переміщень, полімерні матеріали.

### Вступ

Останнім часом у багатьох технологічних операціях поряд із силовими застосовуються значні теплові навантаження. Також силові і температурні впливи високої інтенсивності супроводжують вибухові роботи та випадкові вибухи палива в різного роду ємностях. При цьому може спостерігатись ефект зв'язаності механічних і теплових полів. Ці обставини зумовлюють актуальність розробки підходів до розв'язання динамічних задач зв'язаної термопружності. Перші розв'язки динамічних задач про тепловий удар були отримані в роботах В.І. Даніловської [1, 2] в межах так званої теорії температурних напружень. Подальші дослідження проблем зв'язаної термопружності, а також більш простих задач про температурні напруження пов'язані з іменами Б. Болі, Дж. Уейнера [3], Г. Паркуса [4], А.Д. Коваленка [5], В. Новацького [6], Я.С. Подстригача, Ю.М. Коляно [7], В.Ф. Грибанова, Н.Г. Паничкина [8], Е.М. Карташова, В.З. Партона [9]. Серед чисельних підходів до розв'язання динамічних задач термопружності варто згадати такі, що використовують апарат методу потенціалу. Початок цього напрямку пов'язаний з роботою В.Д. Купрадзе [10], в якій було проведено узагальнення формули Соміліани та отримано фундаментальний розв'язок рівнянь термопружності. Після виходу перших публікацій з'явилась досить велика кількість робіт (відзначимо, наприклад, [10-19]), присвячених різним аспектам чисельної реалізації методу граничних інтегральних рівнянь,

який виявився ефективним засобом аналізу хвильових процесів в термопружних тілах, які мають нескінченні розміри. Водночас поява нових полімерних матеріалів повертає в зону уваги дослідників питання про те, в яких випадках слід враховувати вплив динамічних деформацій на розподіл температури в середовищі. В даній статті робиться спроба з'ясувати, які фізико-механічні характеристики матеріалу зумовлюють необхідність урахування цього впливу в задачах про поширення термопружних хвиль.

### 1. Основні співвідношення

Диференціальні співвідношення, які описують усталені гармонічні коливання з частотою  $\omega$  однорідного термопружного тіла, за відсутності масових сил та внутрішніх теплових джерел мають вигляд

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho \omega^2 u_j - \gamma \theta_{,j} = 0, \quad (1)$$

$$\theta_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa} \theta + i\omega \eta u_{k,k} = 0, \quad (2)$$

де  $u_k$  – амплітудне значення компоненти вектора переміщень,  $\lambda$  і  $\mu$  – константи Ламе,  $\rho$  – густина матеріалу,  $\theta$  – амплітуда температури,  $\gamma = 3K\alpha_t$ ,  $\alpha_t$  – коефіцієнт теплового розширення,  $K$  – модуль об'ємного стиснення  $\left( K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \right)$ ,  $\kappa$  – коефіцієнт температуропровідності,  $\eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$ ,  $T_0$  – температура в ненапруженому стані,  $\lambda_0$  – коефіцієнт теплопровідності.

Амплітуди напружень визначаються за допомогою співвідношення Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{kj} = \delta_{kj} (\lambda e - \gamma \theta) + 2\mu \varepsilon_{kj}, \quad (3)$$

яке з урахуванням лінійного зв'язку між деформаціями  $\varepsilon_{kj}$  і переміщеннями

$$\varepsilon_{kj} = \frac{1}{2} (u_{k,j} + u_{j,k}), \quad e = \varepsilon_{kk} = u_{k,k}$$

перетворюється на

$$\sigma_{kj} = \delta_{kj} (\lambda u_{m,m} - \gamma \theta) + \mu (u_{k,j} + u_{j,k}). \quad (4)$$

В точках границі розрахункової області відомими є переміщення  $u_k$  або навантаження  $t_k = \sigma_{jk} n_j$  ( $n_j$  – компонента вектора зовнішньої нормалі). Крім того, на границі має бути заданим або розподіл температури, або щільність теплового потоку  $q$  через поверхню, причому згідно із законом Фур'є  $q = -\lambda_0 \frac{\partial \theta}{\partial n}$

### 2. Поширення сферичних хвиль в термопружному середовищі

Розглянемо розповсюдження гармонічних хвиль від сферичної порожнини радіуса  $a$ . В такому разі потенціал амплітуд радіальних переміщень задається виразом [6]:

$$\Phi(R) = \frac{A_1 e^{i\lambda_1 R} + A_2 e^{i\lambda_2 R}}{R},$$

де  $R$  – радіальна координата, а  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  задовольняють співвідношення

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{\kappa} + \frac{i\omega\gamma\eta}{\lambda + 2\mu} + \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{i\omega}{\kappa} \cdot \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}$$

та є комплексними величинами з додатними дійсними і уявними частинами.

За відомого потенціалу температуру можна знайти з рівняння

$$(\Delta + k_1^2)\Phi - m\theta = 0, \quad (5)$$

де  $k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}$ ,  $m = \frac{\gamma}{\lambda + 2\mu}$ , а  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Зважаючи на те, що у випадку центральної симетрії

$$\Delta \equiv (\partial^2 / \partial R^2) + (2/R)(\partial / \partial R),$$

шляхом безпосереднього диференціювання знаходимо

$$\Delta\Phi(R) = -\frac{A_1 \lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R} + A_2 \lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R}}{R},$$

після чого з виразу (5) для визначення температури будемо мати

$$\theta(R) = \frac{A_1 (k_1^2 - \lambda_1^2) e^{i\lambda_1 R} + A_2 (k_1^2 - \lambda_2^2) e^{i\lambda_2 R}}{mR}. \quad (6)$$

В свою чергу вирази для радіальних переміщень і напружень мають вигляд

$$u_R(R) = \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{A_1 (i\lambda_1 R - 1) e^{i\lambda_1 R} + A_2 (i\lambda_2 R - 1) e^{i\lambda_2 R}}{R^2}, \quad (7)$$

$$\sigma_{RR}(R) = -\frac{4\mu}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial R} - \rho\omega^2 \Phi = -\frac{1}{R^3} [q_1(R) A_1 e^{i\lambda_1 R} + q_2(R) A_2 e^{i\lambda_2 R}], \quad (8)$$

де

$$q_j(a) = 4\mu(1 - i\lambda_j a) - \rho\omega^2 a^2, \quad j = 1, 2$$

За допомогою співвідношень (6-8) може бути розв'язана значна кількість задач про поширення гармонічних сферичних хвиль. Так, якщо на границі порожнини задані умови  $\sigma_{RR}(a) = -q$ ,  $\theta(a) = 0$ , то підставивши  $R = a$  у вирази (6) і (8), виходячи з граничних умов, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $A_1$ ,  $A_2$ , розв'язавши яку будемо мати

$$A_1 = -\frac{qa^3}{Z} (\lambda_2^2 - k_1^2) e^{-i\lambda_1 a}, \quad A_2 = \frac{qa^3}{Z} (\lambda_1^2 - k_1^2) e^{-i\lambda_1 a},$$

Тут введено позначення  $Z = (k_1^2 - \lambda_1^2)q_2(a) - (k_1^2 - \lambda_2^2)q_1(a)$ .

Отже, розв'язок задачі має наступний вигляд

$$\theta(R) = \frac{qa^3}{mRZ} (k_1^2 - \lambda_1^2)(k_1^2 - \lambda_2^2) \left[ e^{i\lambda_1(R-a)} - e^{i\lambda_2(R-a)} \right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial\theta(R)}{\partial R} = \frac{qa^3}{mRZ} (k_1^2 - \lambda_1^2)(k_1^2 - \lambda_2^2) \left[ (i\lambda_1 R - 1)e^{i\lambda_1(R-a)} - (i\lambda_2 R - 1)e^{i\lambda_2(R-a)} \right],$$

$$u_R(R) = \frac{qa^3}{R^2 Z} \left[ (k_1^2 - \lambda_2^2)(i\lambda_1 R - 1)e^{i\lambda_1(R-a)} - (k_1^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 R - 1)e^{i\lambda_2(R-a)} \right],$$

$$\sigma_{RR}(R) = -\frac{qa^3}{R^3 Z} \left[ (\lambda_2^2 - k_1^2)q_1(R)e^{i\lambda_1(R-a)} - (\lambda_1^2 - k_1^2)q_2(R)e^{i\lambda_2(R-a)} \right],$$

$$\sigma_{\theta\theta}(R) = -2\mu \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) - \rho\omega^2 \Phi =$$

$$= \frac{qa^3}{R^3 Z} \left[ (\lambda_2^2 - k_1^2)s_1(R)e^{i\lambda_1(R-a)} - (\lambda_1^2 - k_1^2)s_2(R)e^{i\lambda_2(R-a)} \right],$$

де

$$s_j(R) = 2\mu(1 - i\lambda_j R - \lambda_j^2 R^2) + \rho\omega^2 R^2, \quad j=1,2.$$

На границі параметри НДС мають наступні значення

$$\left. \frac{\partial\theta(R)}{\partial n} \right|_{R=a} = \frac{qa^2}{mZ} (k_1^2 - \lambda_1^2)(k_1^2 - \lambda_2^2)(i\lambda_2 a - i\lambda_1 a), \quad (10)$$

$$u_R(R)|_{R=a} = \frac{qa}{Z} \left[ (k_1^2 - \lambda_2^2)(i\lambda_1 a - 1) - (k_1^2 - \lambda_1^2)(i\lambda_2 a - 1) \right], \quad (11)$$

$$\sigma_{RR}(R)|_{R=a} = -\frac{q}{Z} \left[ (\lambda_2^2 - k_1^2)q_1(a) - (\lambda_1^2 - k_1^2)q_2(a) \right], \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(R)|_{R=a} = \frac{q}{Z} \left[ (\lambda_2^2 - k_1^2)s_1(a) - (\lambda_1^2 - k_1^2)s_2(a) \right]. \quad (13)$$

### 3. Застосування положень теорії температурних напружень

Співвідношення (9), (10) свідчать про те, що поширення хвиль розширення пов'язане з виробленням теплової енергії. Механічна енергія хвилі розширення частково переходить в тепло, що призводить до підвищення температури. Але необхідно зауважити, що в багатьох випадках пружні деформації спричиняють досить малу зміну температури. З цієї причини найчастіше в практичних розрахунках цією зміною нехтують. В математичній моделі цей факт враховується тим, що. Водночас вплив температури на напружений стан є суттєвим і рівняння (1) зберігає свій вигляд.

Після присвоєння параметру  $\eta$  нульового значення отримуємо наступні вирази:

$$\lambda_1 = k_1 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{i\omega}{\kappa}}, \quad Z = (\lambda_2^2 - k_1^2)q_1(a),$$

в результаті використання яких в задачі, що розглядається будемо мати

$$\theta(R) = 0, \quad \frac{\partial \theta(R)}{\partial R} = 0$$

$$u_R(R) = \frac{q a^3}{R^2 Z} (k_1^2 - \lambda_2^2) (i \lambda_1 R - 1) e^{i \lambda_1 (R-a)},$$

$$\sigma_{RR}(R) = -\frac{q a^3}{R^3 Z} (\lambda_2^2 - k_1^2) q_1(R) e^{i \lambda_1 (R-a)},$$

$$\sigma_{\theta\theta}(R) = \frac{q a^3}{R^3 Z} (\lambda_2^2 - k_1^2) s_1(R) e^{i \lambda_1 (R-a)}.$$

Зокрема, на границі сферичної порожнини справедливо

$$u_R(a) = \frac{q \cdot a}{q_1(a)} (1 - i \lambda_1 a), \quad (14)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(a) = -\frac{q}{q_1(a)} s_1(a). \quad (15)$$

#### 4. Порівняння результатів, отриманих за двома підходами

Для більшості матеріалів, що використовуються в техніці і будівництві, дані, отримані з урахуванням впливу динамічної деформації на зміну температури (за ненульового значення параметра  $\eta$ ), незначною мірою відрізняються від результатів, які дає застосування теорії температурних напружень. Так, якщо сферична порожнина міститься в гранітному середовищі, то граничні переміщення і напруження, отримані за формулами (11), (13) відрізняються від аналогічних параметрів, які дають формули (14), (15) на величину, що не перевищує 1% у всьому діапазоні досліджуваних частот коливань. Доцільність урахування впливу деформацій на теплові характеристики пов'язується в роботах [15, 16, 20] з величиною так званого безрозмірного коефіцієнта зв'язаності полів  $\delta$ , який визначається за формулою

$$\delta = \frac{(1+\nu)\alpha_l^2 E T_0}{3(1-\nu)(1-2\nu)c_e}. \quad (16)$$

У формулі (16) через  $E$  позначено модуль Юнга, а через  $c_e$  – питому об'ємну теплоємність матеріалу. Такий матеріал, як граніт характеризується наступними параметрами:  $E=0,49 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu=0,2$ ,  $\alpha_l=0,749 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>,  $\kappa=0,89 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>с<sup>-1</sup>,  $\lambda_0=2,21$  Вт·К<sup>-1</sup>м<sup>-1</sup>,  $c_e=\lambda_0 \cdot \kappa^{-1}=2,48 \cdot 10^6$  Дж·К<sup>-1</sup>м<sup>-3</sup>.

При  $T_0=293$  К коефіцієнт  $\delta$  для граніта дорівнює 0,0003, а вплив динамічних деформацій на зміну температури є майже невідчутним. Водночас існує низка полімерних матеріалів, зокрема, полівінілацеталей, у яких коефіцієнт зв'язаності полів є порівняно великим. Наслідки переходу механічної енергії в теплову в таких випадках є досить помітними, і нехтування ними може призвести до значних похибок.

Для підтвердження цієї тези розглянемо модельну задачу про поширення сферичних термопружних хвиль в середовищі з фізико-механічними характеристиками полівінілбутирала, у якого згідно [20]

$E=2,2 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu=0,4$ ,  $\alpha_r=9,2 \cdot 10^{-5}$  К $^{-1}$ ,  $\kappa=2,28 \cdot 10^{-6}$  м $^2$ с $^{-1}$ ,  $\lambda_0=0,271$  Вт·К $^{-1}$ м $^{-1}$ ,  $c_\varepsilon=\lambda_0 \cdot \kappa^{-1}=1,19 \cdot 10^5$  Дж·К $^{-1}$ м $^{-3}$ .

Отже, безрозмірний коефіцієнт зв'язаності полів  $\delta$ , обчислений за формулою (16) при  $T_0=293$  К, для такого матеріалу дорівнює 0,18. На рисунках 1(а) і 1(б) показані графіки залежності від параметра частоти

$p = a\omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$  нормованих величин граничних радіальних переміщень  $u_r$  і нормальних тангенціальних напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  відповідно.

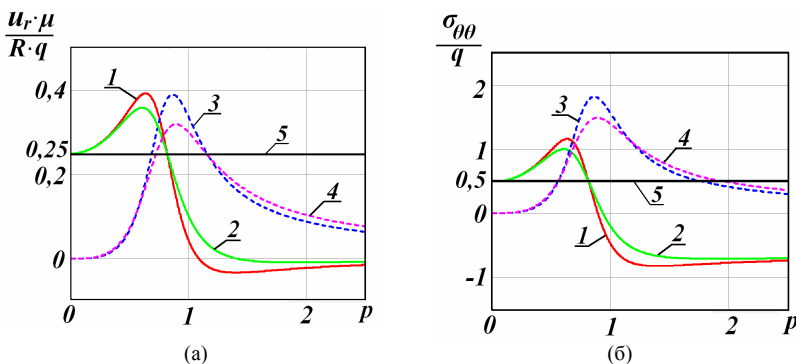


Рис. 1

На рисунках суцільні лінії відповідають дійсним частинам комплексних амплітуд, а пунктирні – уявним. Цифрами 1 і 3 позначені графіки параметрів НДС, отримані за а цифрами 2 і 4 – графіки, побудовані виходячи з положень теорії температурних напружень, тобто з використанням формул (14), (15). Цифрою 5 позначені лінії, що відповідають значенням  $u_r$  і  $\sigma_{\theta\theta}$  при статичному навантаженні. Зазначимо, що дійсні частини амплітуд переміщень досягають максимуму при значенні безрозмірного параметра частоти коливань, що дорівнює 0,6. Розбіжність даних, отриманих за двома підходами, становить 7,9%. Уявні частини переміщень досягають найбільших значень при  $p=0,86$ . Для них розбіжність результатів при такій частоті становить 18,7%. Дійсні частини напружень  $\sigma_{\theta\theta}$  отримують максимальні значення при  $p=0,6$ . При застосуванні підходу, що базується на теорії температурних напружень, недооцінка дійсних частин може сягати 15,1%. Ще більшою є розбіжність максимальних значень уявних частин напружень. При  $p=0,86$  вона становить 18,6%.

На рисунках 2(а) і 2(б) показані графіки тих самих параметрів напружено-деформованого стану, обчислених за припущення, що термопружне середовище має фізико-механічні характеристики полівінілбутираль-фурфурала [20], а саме  $E=2,4 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu=0,4$ ,  $\alpha_r=13,1 \cdot 10^{-5}$  К $^{-1}$ ,  $\kappa=2,39 \cdot 10^{-6}$  м $^2$ с $^{-1}$ ,  $\lambda_0=0,271$  Вт·К $^{-1}$ м $^{-1}$ ,  $c_\varepsilon=\lambda_0 \cdot \kappa^{-1}=1,13 \cdot 10^5$  Дж·К $^{-1}$ м $^{-3}$ . Позначення параметрів НДС співпадає з позначеннями попереднього прикладу. Коефіцієнт зв'язаності  $\delta$ , обчислений за формулою (16), в цьому

випадку дорівнює 0,41. Відповідно і різниця між результатами, отриманими за двома підходами стає більшою. Так, відносна розбіжність між максимальними значеннями дійсних частин  $u_r$ , обчисленими за допомогою двох різних підходів, дорівнює 16,5%, а для уявних частин переміщень похибка становить 31,7%. При обчисленні  $\sigma_{00}$  максимальні дійсні частини відрізнялись на 24,8%, а уявні – на 31,6%.

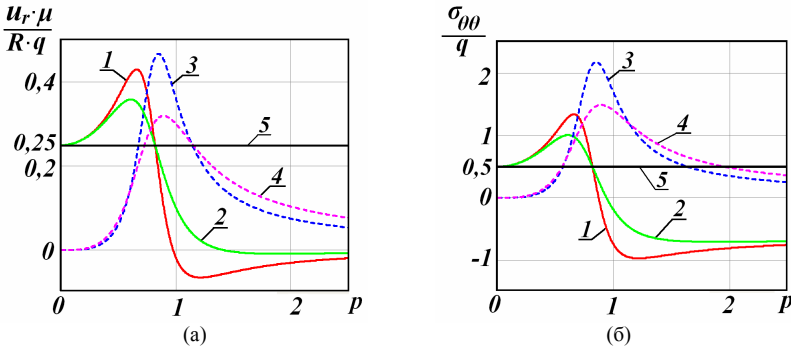


Рис. 2

Наведені результати свідчать про те, що при виборі алгоритму розв'язання задачі про термопружні коливання конструкцій, вироблених із сучасних полімерних матеріалів, необхідно орієнтуватись на значення безрозмірного коефіцієнта зв'язаності деформаційних і температурних полів. При малих значеннях коефіцієнта, характерних для традиційних конструкційних і будівельних матеріалів, можна і доцільно користуватись підходом, що базується на теорії температурних напружень і не враховує вплив динамічних деформацій на розподіл температури. В той же час при розрахунку виробів, матеріалом яких є, наприклад, полівінілацеталі, нехтування таким впливом призводить до значних похибок.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. Прикл.мат.и мех. 1950. Т.14, № 3. С.316-318.
2. Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости. Прикл. мат. и мех. 1952. Т.16, № 3. С.342-344.
3. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.
4. Боли Б.А., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. – 517 с.
5. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
6. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М: Мир, 1970. – 256 с.
7. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. – 311 с.
8. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984. – 181 с.

9. *Карташов Э.М., Партон В.З.* Динамическая термоупругость и проблемы термического удара. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1991. Т 22, С. 55-127.
10. *Купрадзе В.Д. (общ. ред.)*. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М: Наука, 1976. – 664 с.
11. *Tosaka N., Suh I.G.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // *Computational Mechanics*. – 1991. V. 8. – P. 331-342
12. *Dargush G.F., Banerjee P.K.*, Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity // *Int. J. Solid Struct.* – 1989. – No 25. - P. 999–1021.
13. *Tehrani P.H., Eslami M.R.* Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 1998. – V. 22. - No 3, - P. 245-250
14. *Sladek V., Sladek J.*, Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis // *Appl. Math. Modelling*. – 1984. - No 7. – P. 241–253.
15. *Кобзарь В.Н., Фильшинский Л.А.* Плоская динамическая задача связанной термоупругости // *ПММ*. – 2008. – Т. 72. – Вып. 5. – С. 842-851.
16. *Фильшинский Л.А., Сиренко Ю.В.* Расчет термоупругих полей в многосвязном цилиндрическом теле // *Проблемы машиностроения*. – 2009. – Т. 12. – Вып. 1. – С. 69-78.
17. *Игуменов Л.А., Литвинчук С.Ю., Пазин В.П.* Применение метода граничных интегральных уравнений для анализа задач трехмерной динамической теории упругости // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2010. – вып. 72. – С. 146-153.
18. *Ворона Ю.В., Кара І.Д.* Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання динамічних задач термопружності // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – Вип. 96. – К.: КНУБА, 2015. – С. 74-87.
19. *Ворона Ю.В., Кара І.Д.* Обчислення сингулярних інтегралів тривимірної теорії термопружності // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – Вип. 102. – К.: КНУБА, 2019. – С. 220-231.
20. *Валішин А.А., Карташов Э.М.* Моделирование эффектов связанности в задаче об импульсном нагружении термоупругих сред // *Математическое моделирование и численные методы*. – 2019. – № 3. – С. 3-18.

## REFERENCES

1. *Danilovskaya V.I.* Temperaturnye napryazheniya v uprugom poluprostranstve, voznikayushchiye vslledstviye vnezapnogo nagreva ego granicy (Thermal stresses in elastic half-space that occur as a result of sudden heating of his boundary). // *Prikl. math. i mech.* – 1950. – V.14. – № 3. – P.316-318. (rus).
2. *Danilovskaya V.I.* Ob odnoy dinamicheskoy zadache termouprugosti (On a dynamic thermoelastic problem). // *Prikl. math. i mech.* – 1952. – V.16. – № 3. – P.342-344. (rus).
3. *Parkus G.* Neustanovivshyiesya temperaturnye napryazheniya (Non-stationary thermal stresses). – М.: Fizmatgiz, 1963. – 252 s. (rus).
4. *Boley B.A., Weiner J.H.* Teoriya temperaturnykh napryazheniy (Theory of Thermal Stresses). – М: Mir, 1960. – 516 s. (rus).
5. *Kovalenko A.D.* Osnovy termouprugosti (Basics of thermoelasticity). – К.: Nauk. dumka, 1970. – 308 s. (ukr).
6. *Nowacki W.* Dinamicheskiye zadachi termouprugosti (Dynamic problems of thermoelasticity) / Edited by G.S. Shapiro. – М: Mir, 1970. – 256 s. (rus).
7. *Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M.* Obobshchennaya termomehanika (Generalized thermomechanics). – К.: Nauk. dumka, 1976. 311 s. (ukr).
8. *Gribanov V.F., Panichkin N.G.* Svyazannye i dinamicheskiye zadachi termouprugosti (Coupled and dynamic problems of thermoelasticity). – М.: Mashynostroyenie, 1984. – 181 s. (rus).
9. *Kartashov E.M., Parton V.Z.* Dinamicheskaya termouprugost i problemy termicheskogo udara (Dynamic thermoelasticity and problems of thermal shock). // *Itoги nauki i tekhniki. VINITI. Ser. Mehanika deformiruемого tverdogo tela*. – 1991. – V. 22. – P. 55-127. (rus).



10. *Kupradze V.D.* (obshh. red.) Trehmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti (Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity). – M: Nauka, 1976. – 663 s. (rus).
11. *Tosaka N., Suh I.G.* Boundary element analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems // Computational Mechanics. – 1991. V. 8. – P. 331-342
12. *Dargush G.F., Banerjee P.K.*, Development of a boundary element method for time dependent planar thermoelasticity // Int. J. Solid Struct. – 1989. – No 25. – P. 999–1021.
13. *Tehrani P.H., Eslami M.R.* Two-dimensional time-harmonic dynamic coupled thermoelasticity analysis by boundary element method formulation // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1998. – V. 22. – No 3, – P. 245-250
14. *Sladek V., Sladek J.*, Boundary integral equation method in thermoelasticity. Part I: general analysis // Appl. Math. Modelling. – 1984. – No 7. – P. 241–253.
15. *Kobzar V.N., Filshinskiy L.A.* Ploskaya dinamicheskaya zadacha svyazannoy termouprugosti (Plane dynamic problem of coupled thermoelasticity) // PMM. – 2008. – V. 72. – Vyp 5. – P. 842-851. (ukr).
16. *Filshinskiy L.A., Sirenko Yu.V.* Raschet poley v mnogosvyaznom cylindricheskom tele (Calculation of thermoelastic fields in the multiply connected cylindrical body) // Problemy mashynostroyeniya. – 2009. – V. 12. – Vyp 1. – P. 69-78. (ukr).
17. *Igunnov L.A., Litvinchuk S.Ju., Pazin V.P.* Primenenie metoda granichnykh integral'nykh uravnenij dlja analiza zadach trehmernoj dinamicheskoy teorii uprugosti (Using of Boundary Integral Equation Method for 3-D dynamic thermoelasticity problems analysis) // Problemy prochnosti i plastichnosti. – 2010. – Vyp. 72. – S. 146-153. (rus).
18. *Vorona Yu.V., Kara I.D.* Zastosuvannya metodu granychnykh integralnykh rivnyan dlya rozv'yazannya dynamichnykh zadach termopruzhnosti (Application of boundary integral equation method for dynamic thermoelasticity problems) // Opir materialiv i teoriya sporud. – Vyp. 96. – K.: KNUBA, 2015. – P. 74-87. (ukr).
19. *Vorona Yu.V., Kara I.D.* Obchyslennya syngulyarnykh integraliv tryvymirnyi teorii termopruzhnosti (Evaluation of the singular integrals of the three-dimensional thermoelasticity) // Opir materialiv i teoriya sporud. – Vyp. 102. – K.: KNUBA, 2019. – P. 220-231. (ukr).
20. *Valishin A.A., Kartashov E.M.* Modelirovaniye effektiv svyazannosti v zadache ob impulsnom nagruzenii termouprugih sred (Modeling of coupled effects in problems of impuls loading of thermoelastic media) // Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody. – 2019. – № 3. – P. 3-18. (rus).

*Стаття надійшла 15.10.2021*

*Ворона Ю.В., Кара І.Д., Гончаренко М.В.*

### **ОСОБЛИВОСТІ ПОСТАНОВКИ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ**

Розглядається задача про поширення сферичних хвиль у термопружному середовищі. Порівнюються два підходи до врахування взаємного впливу динамічних полів деформацій і температури. Перший підхід використовує для розрахунку узагальнену модель зв'язаної термопружності, а другий спирається на співвідношення теорії температурних напружень, при побудові яких знехтувано зміною розподілу температур під дією механічних навантажень. Побудовані амплітудно-частотні характеристики радіальних переміщень і нормальних тангенціальних напружень на границі сферичної порожнини, до якої прикладене навантаження, що змінюється з часом за гармонічним законом. Прослідковано відповідність між значенням коефіцієнта зв'язаності і похибкою результатів, спричиною використанням спрощеної моделі взаємного впливу полів. Розглянуті хвильові процеси в масивах із сучасних полімерних матеріалів, таких як полівінілбутираль та полівінілбутиральфурфураль, що відносяться до сімейства полівінілацеталей, які мають досить великий коефіцієнт зв'язаності полів 0,18 та 0,41 відповідно. Показано, що використання для розрахунку конструкцій з таких матеріалів спрощеної моделі зв'язаної термопружності призводить до неприпустимо великих розбіжностей в результатах. Так, для полівінілбутирала при використанні узагальненої моделі максимальні значення параметрів

НДС були на 18% більшими, ніж у випадку застосування теорії температурних напружень. Для середовища з полівінілбутиральфурфурала різниці в результатах, отриманих за двома підходами на деяких частотах перевищувала 30%. Зроблено висновок про те, що при аналізі динамічної реакції масивних елементів конструкцій з подібних матеріалів спрощена модель взаємодії деформаційних і температурних полів може виявитись грубим наближенням.

**Ключові слова:** термопружне середовище, сферичні хвилі, зв'язаність полів, температурні напруження, потенціал переміщень, полімерні матеріали.

*Vorona Yu.V., Kara I.D., Goncharenko M.V.*

#### **PECULIARITIES OF FORMULATION AND SOLVING THE DYNAMIC PROBLEMS OF THERMOELASTICITY**

The problem of propagation of spherical waves in a thermoelastic medium is considered. Two approaches to taking into account the mutual influence of dynamic fields of deformations and temperature are compared. A generalized model of coupled thermoelasticity is used for calculation in the first approach and the second one is based on the ratio of the theory of thermal stresses, which are neglecting the change of temperature distribution under mechanical loads action. The amplitude-frequency characteristics of radial displacements and normal tangential stresses at the boundary of a spherical cavity being under action of load, which changes according to the harmonic law in time, are obtained. The correspondence between the value of the coupling parameter and the results error caused by the use of the simplified model of field interaction is traced. Wave processes in solids of modern polymeric materials, such as polyvinyl butyral and polyvinyl butyralfurfural belonging to the family of polyvinyl acetals, which have a fairly high coefficient of field connectivity of 0.18 and 0.41, respectively, are considered. It is shown that the use of a simplified model of coupled thermoelasticity for the calculation of structure of such materials leads to unacceptably large differences in the results. Thus, the maximum values of the stress-strained state parameters obtained using the generalized model were 18% higher than in the case of the application of the theory of temperature stresses for polyvinyl butyral. The results difference obtained using this two approaches at some frequencies exceeded 30% for the polyvinyl butyralfurfural medium. It is concluded that the simplified model of the interaction of deformation and temperature fields can be a rough approximation in the analysis of the dynamic reaction of massive structural elements made of such materials.

**Keywords:** thermoelastic medium, spherical waves, fields coupling, thermal stresses, displacement potential, polymeric materials.

УДК 539.3

*Ворона Ю.В., Кара І.Д., Гончаренко М.В. Особливості постановки та розв'язування динамічних задач термопружності // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2021. – Вип. 107. – С. 312-322.*

*Оцінюється справедливність припущення про те, що впливом деформацій на температуру при аналізі термопружних хвиль в елементах конструкцій можна завжди знехтувати. Наводяться приклади, які спростовують вірність такого твердження.*

Табл. 0. Іл. 2. Бібліогр. 20 назв.

UDC 539.3

*Vorona Yu.V., Kara I.D., Goncharenko M.V. Peculiarities of formulation and solving the dynamic problems of thermoelasticity // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2021. – Issue 107. – P. 312-322.*

*The validity of the assumption that the influence of deformations on temperature in structural elements under dynamic loadings can always be neglected is estimated. Examples are given that refute the truth of this statement.*

Табл. 0. Fig. 2. Ref. 20.

УДК 539.3

*Ворона Ю.В., Кара И.Д., Гончаренко М.В. Особенности постановки и решения динамических задач термоупругости // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУБА, 2021. – Вып. 107. – С. 312-322.*

*Оценивается справедливость предположения о том, что влиянием деформаций на температуру при анализе термоупругих волн в элементах конструкции можно пренебречь. Приводятся примеры, опровергающие верность такого утверждения..*

Табл. 0. Ил. 2. Библиогр. 20 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки **ВОРОНА** Юрій Володимирович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Роб. тел. + 38(044) 2454829**

**E-mail:** vorona.iuv@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0001-8130-7204>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки **КАРА** Ірина Дмитрівна.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Роб. тел.:** + 38(044) 2454829

**E-mail:** [karaidknuba@tutanota.com](mailto:karaidknuba@tutanota.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-4700-997X>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки **ГОНЧАРЕНКО** Марина Вікторівна.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр., 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Роб. тел. + 38(044) 2415412**

**E-mail:** goncharenko.mv@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-7396-5335>