УДК 681.5:517.935

А.А. Кабанов, доцент, канд. техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053
E-mail: KabanovAleksey@gmail.com

СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается задача синтеза робастных систем стабилизации, в которых неопределенность представляется в виде сингулярно возмущающего параметра. Выбор стабилизирующего управления в цепи обратной связи по состоянию осуществляется, исходя из требований к показателю робастности замкнутой системы – граничному значению параметра сингулярных возмущений ε^*. *Для расчета последнего применяется метод D-разбиения уравнения состояния системы.*

Ключевые слова: *робастная стабилизация, сингулярно возмущенная система, параметрическая неопределенность, D-разбиение.*

Введение. Теория сингулярных возмущений является источником мощных средств синтеза и моделирования реальных физических систем управления [1]. Методы этой теории основаны на выделении в исходной системе быстрых и медленных движений, с последующей ее декомпозицией на две составляющие (подсистемы). Такое разложение позволяет решать задачи синтеза регуляторов отдельно для быстрых и для медленных подсистем, что само по себе является существенным упрощением. Регулятор для исходной системы при этом представляется в виде композиции двух последних. Некоторые общие результаты синтеза управления в цепи обратной связи по состоянию для сингулярно возмущенных систем рассмотрены в [1, 2]. Анализ этих результатов показывает, что вышеупомянутое разложение имеет место при достаточно малом значении параметра сингулярных возмущений, при этом замкнутая система является устойчивой для всех значений параметра возмущений из некоторого интервала $(0, \varepsilon^*)$, $\varepsilon^* > 0$, при условии устойчивости медленной и быстрой подсистем [1, 2].

Последнее замечание позволяет использовать теорию сингулярных возмущений для анализа робастных свойств систем управления, у которых в качестве неопределенности выступает параметр сингулярных возмущений. Этот подход представляет собой альтернативу распространенному интервальному способу описания неопределенности, для которого оценка робастных свойств системы определяется радиусом устойчивости интервального семейства [3]. При сингулярно возмущенном представлении неопределенности в системе аналогом радиуса устойчивости выступает критическая величина параметра возмущений, при котором замкнутая система теряет устойчивость, эту величину можно использовать для оценки робастных свойств систем [4].

Сингулярно возмущенное представление неопределенности допустимо и для дискретных систем управления, при этом имеет место следующий результат: система является устойчивой для всех значений параметра сингулярных возмущений из интервала $(0, \varepsilon^*)$, $\varepsilon^* > 0$, при условии устойчивости медленной подсистемы [5]. Таким образом, теория сингулярных возмущений оказывается конструктивным средством для описания робастных свойств системы, количественным показателем которых является критическая величина параметра сингулярных возмущений.

Исходя из вышесказанного, задачу синтеза робастного стабилизирующего управления можно сформулировать как задачу выбора такого регулятора в цепи обратной связи, при котором бы достигалось заданное значение верхней границы ε^* параметра возмущений.

В общем случае для нелинейных систем определение точной верхней границы ε^* представляет собой сложную задачу, но для линейных стационарных систем эта задача вполне разрешима и существуют разные подходы к ее решению [1, 6, 7]. Укажем только те из них, которые позволяют получить точное значение. В [6] критическое значение параметра возмущений определялось двумя способами: на основе поиска обобщенных собственных чисел пары матриц и с помощью преобразования Мебиуса (LFT-преобразования). Главным недостатком этих решений является невозможность получения аналитического результата. Другой подход основан на методе D-разбиения по параметру сингулярных возмущений. Существующие результаты основаны на D-разбиении характеристического полинома замкнутой системы по параметру сингулярных возмущений [4]. Данный метод, хотя и приводит к аналитическому результату, является практически непригодным для систем большой размерности (более 4), заданных в форме пространства состояний. Таким образом, одной из нерешенных проблем в исследуемой области остается получение аналитических соотношений для расчета критического значения параметра сингулярных возмущений для систем заданных в форме пространства состояний. Здесь, вероятно, эффективным средством будет метод D-разбиения для матриц, применяемый к уравнению состояния системы [8].

Данная статья посвящена разработке метода синтеза робастных систем стабилизации на основе сингулярно возмущенного представления неопределенности. Выбор стабилизирующего управления в виде линейной формы по состоянию осуществляется, исходя из требований к показателю робастности замкнутой системы, в качестве которого выступает критическое значение параметра сингулярных возмущений. Для расчета последнего применяется метод D-разбиения матричного уравнения состояния, позволяющий получить результат в аналитическом виде.

1. Постановка задачи. Рассматривается непрерывная линейная система

$$I(\varepsilon)\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ I(\varepsilon) = \begin{pmatrix} I_1 & \\ & \varepsilon \cdot I_2 \end{pmatrix},$$

где $x \in R^n, x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, n = n_1 + n_2$; A_{11} – $(n_1 \times n_1)$, A_{12} –$(n_1 \times n_2)$, A_{21} –$(n_2 \times n_1)$, A_{22}– $(n_2 \times n_2)$, $B_1 -(n_1 \times r)$, $B_2 -(n_2 \times r)$ – матрицы указанных размеров; I_1 – $(n_1 \times n_1)$, I_2– $(n_2 \times n_2)$ – единичные матрицы указанных размеров; $\varepsilon > 0$ – сингулярно возмущающий параметр, который выступает в роли неопределенности.

Выбор стабилизирующего управления в виде линейной формы по состоянию $u(t) = (G_1 \quad G_2)x(t)$ приводит к такой замкнутой системе:

$$I(\varepsilon)\dot{x}(t) = A_z x(t),$$
$$A_z = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1G_1 & A_{12} + B_1G_2 \\ A_{21} + B_2G_1 & A_{22} + B_2G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Если замкнутая система (1) имеет гурвицеву матрицу $\overline{A}_{22}$, то динамика медленных переменных, определяемых подвектором x_1, аппроксимируется вырожденной системой с матрицей состояния $\overline{A}_s = \overline{A}_{11} - \overline{A}_{12}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{A}_{21}$. Если матрица $\overline{A}_s$ также гурвицева, то существует такое $\varepsilon^* > 0$, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ система (1) асимптотически устойчива [1]. Этот результат утверждает существование семейства устойчивых систем, параметризованного значениями $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$. Значение $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^*$ является критическим в том смысле, что для любого $\varepsilon \geq \varepsilon^*$ система (1) – неустойчива. Обратную величину $\vartheta^* = 1/\varepsilon^*$ принято называть жесткостью системы, а характеристику робастности ε^* – нежесткостью [4].

В дискретном случае рассматривается линейная система вида

$$x(k+1) = A(\varepsilon)x(k) + Bu(k),$$
$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} \\ A_{21} & \varepsilon A_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

или в замкнутой форме с управлением $u(k) = (G_1 \quad \varepsilon G_2)x(k)$

$$x(k+1) = A_z(\varepsilon)x(k),$$
$$A_z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1G_1 & (A_{12} + B_1G_2)\varepsilon \\ A_{21} + B_2G_1 & (A_{22} + B_2G_2)\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\varepsilon \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Если матрица $\overline{A}_{11}$ – шуровская, то существует такое $\varepsilon^* > 0$, что для любого $\varepsilon < \varepsilon^*$ замкнутая дискретная система (2) асимптотически устойчива [5].

Критическое значение параметра сингулярных возмущений ε^* и соответствующее ему значение жесткости ϑ^* можно использовать для оценки робастных свойств систем. Таким образом, системы можно сравнивать по жесткости, руководствуясь критическим значением параметра возмущений, обеспечивающим некоторые фиксированные запасы устойчивости.

2. Цель статьи состоит в разработке метода синтеза робастных систем стабилизации на основе сингулярно возмущенного представления неопределенности в системе. Задача синтеза робастного стабилизирующего управления сводится к выбору такой матрицы регулятора в цепи обратной связи $G = (G_1 \quad G_2)$, чтобы замкнутая система обладала требуемым значением жесткости ϑ^*, при этом жесткость рассчитывается на основе D-разбиения уравнения состояния замкнутой системы по параметру сингулярных возмущений.

3. Основной результат. Рассматривается система (1) в непрерывном случае и система (2) – в дискретном. Системы (1) и (2) можно представить в другой форме, соответственно:

$$\dot{x}(t) = (\overline{A} + \eta \cdot \underline{A})x(t),\ \eta = \varepsilon^{-1},$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

и

$$x(k+1) = (\overline{A} + \eta \cdot \underline{A})x(k),\ \eta = \varepsilon,$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & 0 \end{pmatrix}, \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{A}_{12} \\ 0 & \overline{A}_{22} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для систем (3), (4) основное уравнение D-разбиения по параметру η имеет вид [8]

$$\det(I - \eta M(j\omega)) = 0,\ -\infty < \omega < \infty, \tag{5}$$

и

$$\det(I - \eta M(e^{j\omega})) = 0,\ 0 \le \omega < 2\pi, \tag{6}$$

где $M(s = j\omega) = (sI - \overline{A})^{-1}\underline{A}$, $M(z = e^{j\omega}) = (zI - \overline{A})^{-1}\underline{A}$.

Обозначим собственные значения матрицы $M(j\omega)$ (в дискретном случае $M(e^{j\omega})$) через $\gamma_i(\omega)$, $i = \overline{1,n}$, тогда уравнение (5) (в дискретном случае (6)) распадается на $1 - \eta\gamma_i(\omega) = 0, i = \overline{1,n}$, и граница D-разбиения состоит из n ветвей $\eta_i(\omega)$:

$$\eta_i(\omega) = \frac{1}{\gamma_i(\omega)},\ i = \overline{1,n}.$$

Из образовавшейся картины D-разбиения в рассмотрение следует принять только пересечения с вещественной осью. Результат D-разбиения по параметру η можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. При условии устойчивости по Гурвицу матриц $\overline{A}_{22}$ и $\overline{A}_s = \overline{A}_{11} - \overline{A}_{12}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{A}_{21}$ жесткость непрерывной системы (1) равна

$$\vartheta^* = \max_i \left(\max_{\overline{\omega}: \operatorname{Im}(\eta_i(\overline{\omega}))=0} \operatorname{Re}(\eta_i(\overline{\omega})) \right),\ i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

При условии устойчивости по Шуру матрицы $\overline{A}_{11}$ жесткость дискретной системы (2) определяется соотношением

$$\vartheta_d^* = \max_i \left(\max_{\overline{\omega}: \operatorname{Im}(\gamma_i(\overline{\omega}))=0} \operatorname{Re}(\gamma_i(\overline{\omega})) \right),\ i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Выражения (7), (8) определяют жесткость системы, заданной в форме пространства состояний. Следует сказать, что в такой общей постановке задачи возможны случаи, когда собственные числа матрицы $M(j\omega)$ не пересекают вещественную ось, а значит жесткость равна $\vartheta^* = 0$. В этом случае будем говорить, что система является полностью робастно устойчивой к параметру сингулярных возмущений.

Теперь проведем более детальный анализ выражений (3) – (6). Запишем блочное представление для матрицы $M(s)$

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21} & s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{22} \\ s^{-1}\overline{A}_{21} & s^{-1}\overline{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Подставим его в уравнение D-разбиения (5)

$$\det(I - \eta M(s)) = \det\begin{pmatrix} I_1 - \eta s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21} & -s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{22} \\ -s^{-1}\overline{A}_{21} & I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{22} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Используя формулу определителя блочной матрицы для (9), получим (с учетом, что $\det\left(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22}\right) \neq 0$)

$$\det(I - \eta M(s)) = \eta^n \det\left(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22}\right)\times$$
$$\times\det\left(I_1\eta^{-1} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{22}(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22})^{-1}s^{-1}\overline{A}_{21}\right)\eta^n =$$
$$= \det\left(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22}\right)\det\left(I_1\eta^{-1} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}(I_2 - s^{-1}\overline{A}_{22}(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22})^{-1})\overline{A}_{21}\right)\eta^{n_1} =$$
$$= \det\left(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22}\right)\det\left(I_1\eta^{-1} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}(I_2 - s^{-1}\eta\overline{A}_{22}(I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{22})^{-1})\overline{A}_{21}\right)\eta^{n_1} =$$
$$= \det\left(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22}\right)\det\left(I_1\eta^{-1} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}(I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{22})^{-1}\overline{A}_{21}\right)\eta^{n_1} =$$
$$= \det\left(I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{22}\right)\det\left(I_1 - \eta s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}(I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{22})^{-1}\overline{A}_{21}\right) = 0.$$

Поскольку последнее выражение получено в предположении $\det\left(I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{22}\right) \neq 0$, то приходим к более простому уравнению D-разбиения

$$\det(I_1 - \eta s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}(I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{22})^{-1}\overline{A}_{21}) = 0. \quad (10)$$

Из (10) можно получить и другое уравнение D-разбиения в предположении, что $\det(I_1 - \eta s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}) \neq 0$:

$$\det(I - \eta M(s)) = \eta^n \det\left(I_1\eta^{-1} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}\right)\times$$
$$\times\det\left(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22} - s^{-1}\overline{A}_{21}[I_1\eta^{-1} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}]^{-1}s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{22}\right) =$$
$$= \eta^n \det\left(I_1\eta^{-1} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}\right)\times$$
$$\times\det\left(I_2\eta^{-1} - s^{-1}\overline{A}_{22} + (I_2 - [I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{21}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}]^{-1})s^{-1}\overline{A}_{22}\right) =$$
$$= \eta^n \det\left(I_1\eta^{-1} - s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}\right)\det\left(I_2\eta^{-1} - [I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{21}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}]^{-1}s^{-1}\overline{A}_{22}\right) =$$
$$= \det\left(I_1 - \eta s^{-1}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}\overline{A}_{21}\right)\det\left(I_2 - \eta s^{-1}[I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{21}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}]^{-1}\overline{A}_{22}\right) = 0.$$

В итоге приходим к такому уравнению D-разбиения

$$\det(I_2 - \eta s^{-1}[I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{21}(sI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12}]^{-1}\overline{A}_{22}) = 0. \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) можно использовать для получения жесткости в аналитическом виде.

Покажем аналогичные выкладки для дискретных систем. Запишем блочное представление для матрицы $M(z)$

$$M(z) = \begin{pmatrix} 0 & (zI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12} \\ 0 & z^{-1}\overline{A}_{21}(zI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12} + z^{-1}\overline{A}_{22} \end{pmatrix}.$$

Подставим данное представление в уравнение D-разбиения (6)

$$\det(I - \eta M(z)) = \det\begin{pmatrix} I_1 & -\eta(zI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12} \\ 0 & I_2 - \eta\cdot[z^{-1}\overline{A}_{21}(zI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12} + z^{-1}\overline{A}_{22}] \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Используя формулу определителя блочной матрицы для (12), получим (при $\det(I_1) \neq 0$)

$$\det(I - \eta M(z)) = \det(I_2 - \eta\cdot[z^{-1}\overline{A}_{21}(zI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12} + z^{-1}\overline{A}_{22}]).$$

Откуда получаем более простое уравнение D-разбиения

$$\det\left(I_2 - \eta\cdot[z^{-1}\overline{A}_{21}(zI_1 - \overline{A}_{11})^{-1}\overline{A}_{12} + z^{-1}\overline{A}_{22}]\right). \quad (13)$$

Следствие 1. Для того чтобы замкнутая непрерывная система (1) была полностью робастно устойчива к параметру сингулярных возмущений, т.е. $\vartheta^* = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\mathrm{Re}\,(eig(\overline{A}_{11})) < 0, \;\; \mathrm{Re}\,(eig(\overline{A}_{22})) < 0,$$
$$\overline{A}_{12} = 0 \text{ или } \overline{A}_{21} = 0. \quad (14)$$

Первые два условия являются необходимыми, это следует из теоремы Климушева-Красовского. Условие $\overline{A}_{12} = 0$ или $\overline{A}_{21} = 0$ определяет достаточность. Действительно, при $\overline{A}_{12} \equiv 0$ (или $\overline{A}_{21} \equiv 0$), то из (10), (11) получаем

$$\det(I_2 - \eta s^{-1}\overline{A}_{22}) = 0. \quad (15)$$

Подставляя в (15) $s = j\omega$, получаем $\eta_i(\omega) = 1/\mu_i(\omega)$, $i = \overline{1, n_2}$, где $\mu_i(\omega), i = \overline{1, n_2}$, – собственные числа матрицы $\Phi = j\omega^{-1}\overline{A}_{22}$. Поскольку $\overline{A}_{22}$ – вещественная матрица, то при всех $\omega \neq 0$ матрица Φ будет комплексной, а все собственные числа $\mu_i(\omega), i = \overline{1, n_2}$, будут комплексными [9], т.е. амплитудно-фазовая частотная характеристика для Φ будет пересекать вещественную ось только при $\omega = 0$, а значит

$$\vartheta_* = \max_i \left(\max_{\overline{\omega}: \mathrm{Im}(\eta_i(\overline{\omega}))=0} \mathrm{Re}(\eta_i(\overline{\omega})) \right) = 0.$$

В дискретном случае при $\overline{A}_{12} \equiv 0$ (и/или $\overline{A}_{21} \equiv 0$) из (13) приходим к уравнению $\det\left(I_2 - kz^{-1}\overline{A}_{22}\right) = 0$. Подставляя в него $z = e^{j\omega}$, приходим к задаче определения собственных чисел матрицы $\Phi = (\cos\omega - j\sin\omega)\overline{A}_{22}$. При этом для всех $\omega \neq 0, \pi$ матрица Φ будет комплексной, а значит, будет иметь комплексные собственные числа, но при $\omega = 0, \pi$ $\Phi = \overline{A}_{22}$, поэтому $\eta_i(\omega) = \dfrac{1}{\mu_i(\omega)}$, $i = \overline{1, n_2}$, $\omega = 0, \pi$, где $\mu_i(\omega), i = \overline{1, n_2}$, – собственные числа матрицы $\Phi = \overline{A}_{22}$, тогда

$$\vartheta_* = \max_i |\mu_i|, i = \overline{1, n_2}.$$

Из последнего выражения видно, что в дискретном случае наряду с тождеством $\overline{A}_{12} \equiv 0$ (и/или $\overline{A}_{21} \equiv 0$) для получения нулевой жесткости ϑ^* требуется, чтобы все собственные числа матрицы $\overline{A}_{22}$ были нулевыми, либо $\omega \neq 0, \pi$.

Таким образом, для того чтобы система (1) с вещественной матрицей состояния была полностью робастно устойчива к параметру сингулярных возмущений, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (14).

Другой способ получить полностью робастно устойчивую по ε замкнутую систему (1) – вместе с устойчивостью быстрой и медленной подсистем добиться выполнения условия $\mathrm{Im}(\eta_i(\omega)) \neq 0, -\infty < \omega < \infty$. В дискретном случае, чтобы получить полностью робастно устойчивую по ε замкнутую систему (2) вместе с устойчивостью медленной подсистемы необходимо добиться выполнения условия $\mathrm{Im}(\eta_i(\omega)) \neq 0,\ 0 \leq \omega < 2\pi$.

4. Пример синтеза. Рассмотрим простой пример системы второго порядка с одномерными медленной и быстрой компонентами и скалярным управлением:

$$\dot{x}(t) = A_z x(t),$$

$$A_z = \begin{pmatrix} a_{11} + b_1 g_1 & a_{12} + b_1 g_2 \\ (a_{21} + b_2 g_1)\varepsilon^{-1} & (a_{22} + b_2 g_2)\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} \\ \overline{a}_{21}\varepsilon^{-1} & \overline{a}_{22}\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Используя результаты раздела 3, получаем

$$\mathrm{Re}\,\eta(\overline{\omega}) = \frac{-\overline{\omega}^2\,\overline{a}_{12}\overline{a}_{21}}{(\overline{a}_{11}\overline{a}_{22} - \overline{a}_{12}\overline{a}_{21})^2 + \overline{\omega}^2\overline{a}_{22}{}^2},$$

где

$$\overline{\omega} = \pm\sqrt{\frac{\overline{a}_{11}\overline{a}_{12}\overline{a}_{21} - \overline{a}_{11}{}^2\overline{a}_{22}}{\overline{a}_{22}}}.$$

После упрощения получаем $\mathrm{Re}\,\eta(\overline{\omega}) = -\dfrac{\overline{a}_{11}}{\overline{a}_{22}}$.

Анализируя последние выражения и следствие 1, получить $\vartheta^* = \eta = 0$ можно такими способами: обеспечить условия $\overline{a}_{11} < 0, \overline{a}_{22} < 0$ и $\overline{a}_{12} = 0$ (или $\overline{a}_{21} = 0$); обеспечить условия $\overline{a}_{11}\overline{a}_{12}\overline{a}_{21} - \overline{a}_{11}{}^2\overline{a}_{22} \leq 0$ и $\overline{a}_{11} - \overline{a}_{12}\overline{a}_{21}/\overline{a}_{22} < 0, \overline{a}_{22} < 0$; обеспечить условия $\overline{a}_{11} = 0$, и $-\overline{a}_{12}\overline{a}_{21}/\overline{a}_{22} < 0, \overline{a}_{22} < 0$.

Предлагаемые оценки жесткости полезны при синтезе оптимальных (или субоптимальных) стабилизирующих регуляторов. Предположим, что искомое робастное управление должно минимизировать квадратичный критерий качества:

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}(x^T(t)Qx(t) + u^2(t))dt,\ \ Q = diag(q_1, q_2),\ q_1, q_2 \geq 0. \qquad (17)$$

Запишем субоптимальное решение задачи (16), (17) в виде следующего композиционного регулятора [1, 2]:

$$u(t) = (G_{c1} \quad G_{c2})x(t),$$
$$g_{c1} = \frac{(a_{22} + g_f b_2)g_s + g_f a_{21}}{a_{22}},\ \ g_{c2} = g_f, \qquad (18)$$

где $g_f = -b_2 k_f$, $0 = -2k_f a_{22} - q_2 + k_f^2 b_2^2$, $g_s = -b_s k_s - d_s$, $0 = -2k_s a_0 - q_0 + k_s^2 b_s^2$, $a_0 = a_s - b_s d_s$, $q_0 = q_s - d_s^2$, $d_s = -b_2 a_{22}^{-2} q_2 a_{21}, a_s = a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}$, $b_s = b_1 - a_{12}a_{22}^{-1}b_2$.

Для синтеза робастного стабилизирующего управления воспользуемся способом 1, т.е. добьемся выполнения условий $\bar{a}_{11} < 0, \bar{a}_{22} < 0$ и $\bar{a}_{12} = 0$. Первые два условия будут выполняться при использовании регулятора (18), поскольку он представляет собой композицию стационарных оптимальных регуляторов для медленной и быстрой подсистем. Из 3-го условия получаем:

$$g_f = -\frac{a_{12}}{b_1}.$$

Подставим в последнее формулу выражение для коэффициента g_f:

$$b_2 k_f = \frac{a_{12}}{b_1},$$

или подставляя выражение для k_f, находим

$$\frac{a_{22} + \sqrt{a_{22}^2 + b_2^2 q_2}}{b_2} = \frac{a_{12}}{b_1}.$$

Из последнего выражения можно найти значение для коэффициента матрицы штрафа критерия (17):

$$q_2 = \frac{(a_{22}b_2/b_1 - a_{22})^2 - a_{22}^2}{b_2^2}. \qquad (19)$$

При таком значении коэффициента q_2 замкнутая система (17) с композиционным оптимальным регулятором (18) в обратной связи будет полностью робастно устойчива к сингулярным возмущениям.

Рассмотрим численный пример. Пусть $a_{11} = 0{,}67$; $a_{12} = 0{,}75$; $a_{21} = 0{,}7$; $a_{22} = -0{,}4$; $b_1 = 0{,}6$; $b_2 = 0{,}2$. В соответствии с (19) получаем $q_2 = 6{,}5625$. Значение другого коэффициента возьмем равным $q_1 = 0{,}1$. Из (18) получаем $G_c = (-9{,}6516 \quad -1{,}25)$, при этом матрица состояния замкнутой системы равна

$$A_z = \begin{pmatrix} -5{,}1209 & 0 \\ -1{,}2303\,\varepsilon^{-1} & -0{,}65\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для демонстрации робастной устойчивости вычислим собственные числа матрицы A_z, например, при $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\varepsilon = 10^5$:

$$\text{при } \varepsilon = 10^{-5}:\ \mu_1 = -6{,}5 \cdot 10^4, \mu_2 = -50,$$
$$\text{при } \varepsilon = 10^{5}:\ \mu_1 = -5{,}1209,\ \ \mu_2 \approx -10^{-5}.$$

Таким образом, система робастно устойчива по ε. Задачу синтеза робастного стабилизирующего управления, основанного на получении требуемого значения жесткости, можно свести к задаче выбора коэффициентов штрафа в линейно-квадратичном функционале качества.

Заключение. На основе сингулярно возмущенного представления неопределенности разработан метод синтеза робастных систем стабилизации. В качестве количественной меры робастных свойств системы принято критическое значение параметра сингулярных возмущений ε^*, такое, что для всех значений $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ замкнутая система остается асимптотически устойчивой. В такой ситуации коэффициенты стабилизирующего регулятора в цепи обратной связи выбираются, так чтобы замкнутая система обладала заданным значением ε^*. Сама величина ε^* определяется на основе метода D-разбиения уравнения состояния системы (теорема 1). Найдены необходимые и достаточные условия, при которых замкнутая система обладает свойством полной робастной устойчивости ($\varepsilon^* = \infty$) к параметру сингулярных возмущений (следствие 1).

Дальнейшие исследования должны быть сосредоточенны на получении правил по выбору параметров робастного стабилизирующего управления в удобном для практического применения виде. Кроме того, открытым остается вопрос о сопоставлении и сравнении методов синтеза, основанных на сингулярно возмущенном и классическом интервальном подходах к описанию параметрической неопределенности систем.

Библиографический список использованной литературы

1. Kokotovic P.V. Singular perturbation methods in control: analysis and design / P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O'Reilly. — Orlando: Academic Press, 1986. — 371 p.
2. Naidu D.S. Singular Perturbation Methodology in Control Systems / D.S. Naidu. — London: P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1988. — 304 p.
3. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление/ Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
4. Кабанов А.А. Мера устойчивости к сингулярным возмущениям и робастные свойства линейных систем / А.А. Кабанов, С.А. Дубовик // Проблемы управления и информатики. — 2010. — Вып. 3. — С. 17–28.
5. Bouyekhf R. Stabilization and regulation of class of non-linear singularly perturbed discrete-time systems / R. Bouyekhf, A. El-Moudni // Journal of Franklin Institute. — 1998. — Vol. 335 B. — P. 963–982.
6. Chen S.J. Maximal stability bounds of singularly perturbed systems / S.J. Chen, J.L. Lin // Journal of the Franklin Institute. — 1999. — Vol. 336. — P. 1209–1218.
7. Chen S.J. Maximal stability bounds of discrete-time singularly perturbed systems / S.J. Chen, J.L. Lin // Control and Cybernetics. — 2004. — Vol. 1. — P. 95–108.
8. Поляк Б.Т. Современное состояние метода D-разбиения / Б.Т. Поляк, Е.Н. Грязина, А.А. Тремба // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 11. — С. 3–40.
9. Гонтмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гонтмахер. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.

Поступила в редакцию 13.12.2012 г.

Кабанов О.О. Синтез робастних систем стабілізації на основі теорії сингулярних збурень

Розглянуто задачу синтезу робастних систем стабілізації, в яких невизначеність представлено у вигляді параметра сингулярних збурень. Вибір стабілізуючого керування у формі зворотнього зв'язку за станом здійснюється, виходячи з вимог до показника робастності замкнутої системи – граничного значення параметра сингулярних збурень ε^*. Для розрахунку останнього застосовується метод D-розбиття рівняння стану системи.

Ключові слова: робастна стабілізація, сингулярно збурена система, параметрична невизначеність, D-розбиття.

Kabanov A.A. Synthesis of robust stabilizing system based on the theory of singular perturbations

This paper considers the problem of synthesis of robust stabilizing systems with uncertainty represented as a singular perturbation parameter. The state feedback gain matrices are determined in base of the close-loop system robustness index – the boundary value of the singular perturbation parameter ε^*. The *D*-decomposition of system state equation is used for its calculation.

Keywords: robust stabilization, singular perturbed system, parametric uncertainty, *D*-decomposition