УДК 621.658.018.531

Л.Н. Канов, доцент, канд. техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская, 33, г. Севастополь, Украина, 99053
E-mail: root@sevgtu.sebastopol.ua

ОПТИМАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложена новая методика оптимизации электротехнических систем на основе инвариантного выбора их параметров. Методика проиллюстрирована на примере оптимизации электропривода постоянного тока. Показано, что эксплуатация привода при повышенном напряжении и пониженном токе возбуждения приводит к снижению потерь мощности.

Ключевые слова: *инвариант, алгебраическое уравнение, оптимальный выбор, двигатель постоянного тока, потеря мощности.*

Введение. Параметры эксплуатационных режимов работы электротехнических систем определяются решением нелинейных алгебраических уравнений, описывающих эти системы. В частности, момент, скорость, мощность электроприводов постоянного тока определяются корнями подобных уравнений. В то же время, эти уравнения зависят от некоторых коэффициентов, которые можно варьировать. Настоящая работа посвящена инвариантному оптимальному выбору коэффициентов уравнений, сохраняющему их корни и позволяющему оптимизировать режимы работы электротехнических систем. Важнейшим критерием оптимальности является сокращение потерь энергии.

Современный электропривод представляет собой сложную электромеханическую систему, основной частью которой является электродвигатель, определяющий в большей степени технические и экономические показатели электропривода. Экономичность электродвигателя наиболее важна при длительной непрерывной работе: даже незначительное снижение потерь приводит к существенной экономии энергии. Потери мощности в двигателе вызывают дополнительный нагрев его элементов и снижают надежность. Поэтому задача снижения этих потерь является актуальной в рамках Национальной программы энергосбережения Украины.

Инвариант – означает «неизменяющийся», т.е. то, что связано с физическим или математическим объектом и остается неизменным при преобразовании объекта. Известны геометрические и алгебраические инварианты [1], например, расстояние между точками или площадь треугольника инвариантны относительно преобразований координат. Уравнения кривых второго порядка имеют различный вид в разных системах координат, однако для них существуют три инварианта: малый и большой детерминанты и сумма коэффициентов [2].

В последнее время введены инвариантные многообразия – области пространства, характеризующие свойства электротехнических систем [3 – 5], которые формируются так, что при возмущениях состояние системы остается в области успешного функционирования. При работе на этих многообразиях обеспечиваются дополнительные условия оптимальности.

Однако в литературе нет постановки и решения задачи о таком выборе параметров систем уравнений, описывающих электротехнические устройства, которые бы оставляли неизменными решения или функции от решений этих уравнений. В первую очередь это относится к системам нелинейных алгебраических уравнений. В качестве дополнительных условий необходимо ставить минимизацию квадратичной функции параметров, так как такие функции имеют смысл мощности потерь в электротехнических системах электропривода.

Цель работы. Целью статьи является развитие метода инвариантных преобразований алгебраических уравнений электротехнических систем для обеспечения минимизации потерь мощности при работе в стационарном режиме.

Методика и материалы исследования. Стационарный режим работы электротехнической системы электропривода обычно описывается системой нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_m, a_1, a_2, ..) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_m, a_1, a_2, ..) = 0; \\ .... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_m, a_1, a_2, ..) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

с решениями $x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}$, которые могут быть найдены численно или аналитически. Поставим задачу определения коэффициентов уравнений (1) $a_1, a_2, ...$ так, чтобы сохранить значения корней

$x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}$ (или заданной функции от них) и при этом найти минимум заданной квадратичной функции этих коэффициентов. Для этого подставим найденные корни в (1) и получим систему уравнений относительно коэффициентов

$$\begin{cases} f_1(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}, a_1, a_2, ..) = 0; \\ f_2(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}, a_1, a_2, ..) = 0; \\ \quad .... \\ f_n(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}, a_1, a_2, ..) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Если число уравнений n равно числу коэффициентов $a_1, a_2, ...$, то выбора сделать нельзя, поэтому рассмотрим случай, когда число коэффициентов превышает n. Тогда на коэффициенты можно ввести дополнительные условия, например, ограничения – равенства или требования экстремумов некоторых функций коэффициентов.

Наибольший интерес имеют квадратичные функции двух или трех переменных вида

$$\varphi(a_1, a_2) = Aa_1^2 + Ba_2^2 + 2Ca_1a_2 + Da_1 + Ea_2 + F\ ,$$

$$\varphi(a_1, a_2, a_3) = Aa_1^2 + Ba_2^2 + Ca_3^2 + 2Da_1a_2 + 2Ea_2a_3 + 2Fa_3a_1 + Ga_1 + Ha_2 + Ka_3 + L$$

с заданными известными коэффициентами $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$.

Необходимое условие экстремума состоит в приравнивании нулю производных от φ по $a_1, a_2, ...$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = 0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} = 0;\ ...\ . \tag{3}$$

Это дает дополнительные уравнения для оптимального инвариантного выбора $a_1, a_2, ...$. Функции φ должны быть сконструированы так, чтобы в допустимой области изменения коэффициентов $a_1, a_2, ...$ экстремум существовал, и чтобы общее число уравнений (2) и (3) было равно числу коэффициентов.

Проиллюстрируем предлагаемый метод на примере оптимизации режима электропривода постоянного тока. Задача управления электродвигателем постоянного тока имеет большое практическое значение при разработке систем управления электроприводами различного назначения [6, 7]. Упрощенная схема включения электродвигателя с параллельным возбуждением изображена на рисунке 1. На электродвигатель включается постоянное напряжение U, при этом он вращается с угловой скоростью Ω и создает полезный момент на нагрузке M. В нагрузку передается мощность $P = \Omega M$.

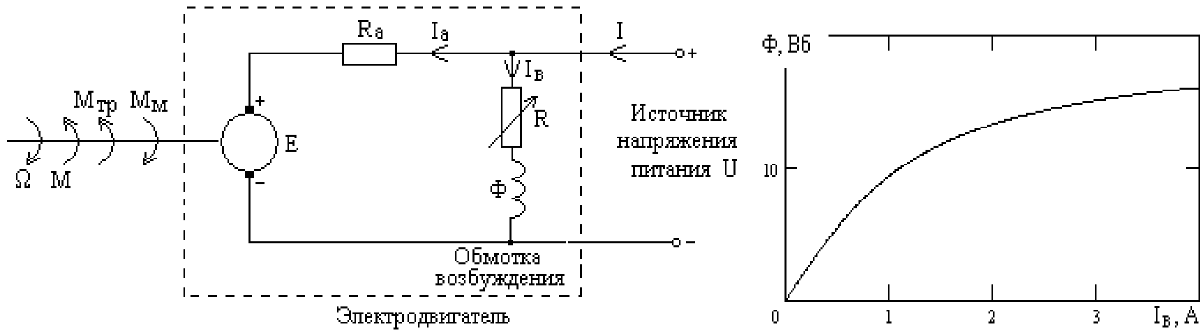

Рисунок 1 – Электродвигатель постоянного тока с параллельным возбуждением

Работа двигателя характеризуется двумя уравнениями. Первое из них является уравнением механического равновесия моментов

$$M_M = M_{TP} + M\ , \tag{4}$$

где $M_M = \Phi I_a$ – вращающий момент электродвигателя; I_a – ток якоря; Φ – магнитный поток; $M_{TP} = k_{TP}\Omega$ – момент трения, пропорциональный скорости вращения; $M = \dfrac{P}{\Omega}$ – момент нагрузки.

Магнитный поток создается в обмотке возбуждения и зависит от тока I_B в этой обмотке. Вследствие насыщения магнитной цепи с ростом тока возбуждения возрастание магнитного потока замедляется. График зависимости потока от тока возбуждения также изображен на рисунке 1. Для целей исследования выполним аналитическую аппроксимацию этой кривой выражением

$$\Phi(I_B) = a \cdot arctg(bI_B) + cI_B$$

с типичными значениями коэффициентов для двигателя небольшой мощности $a = 11{,}8$; $b = 1$; $c = 0{,}1$. Ток возбуждения связан с входным напряжением зависимостью $I_B = \frac{U}{R}$. Окончательно уравнение (4) принимает вид

$$\Phi(I_B) I_a = k_{TP}\Omega + \frac{P}{\Omega}. \qquad (5)$$

Второе уравнение отражает электрическое равновесие в якорной цепи. Входное напряжение U уравновешивается падением напряжения на сопротивлении обмотки якоря R_a и противоЭДС якоря

$$U = U_a + E\,, \qquad (6)$$

где $U_a = R_a I_a$; $E = \Omega\Phi$. С учетом этих обозначений уравнение (6) принимает вид

$$U = R_a I_a + \Omega\Phi(I_B)\,. \qquad (7)$$

Таким образом, работа электродвигателя определяется уравнениями (5) и (7).

Выразим из уравнения (7) ток якоря I_a и подставим в уравнение (5). Тогда получим

$$\Phi(I_B)\frac{U - \Omega\Phi(I_B)}{R_a} = k_{TP}\Omega + \frac{P}{\Omega}. \qquad (8)$$

При заданных номинальных значениях напряжения U, сопротивления возбуждения R и угловой скорости Ω получаем уравнение (8) типа частного случая (1) для вырабатываемой мощности P. Решение уравнения позволяет определить эту мощность как

$$P_0 = \Phi(I_B)\Omega\frac{U - \Omega\Phi(I_B)}{R_a} - k_{TP}\Omega^2. \qquad (9)$$

Поставим задачу инвариантного выбора входного напряжения U и сопротивления возбуждения R так, чтобы решение (9) уравнения (8) не изменилось $P = P_0$, а квадратичная функция ΔP приняла бы минимальное значение

$$\Delta P = R_a I_a^2 + k_{TP}\Omega^2 + \frac{U^2}{R}. \qquad (10)$$

Выражение (10) представляет потери мощности в двигателе: первое слагаемое – потери мощности на нагрев якорной цепи; второе – потери мощности на трение; последнее – потери мощности на нагрев обмотки возбуждения. Так как ток якоря I_a и угловая скорость Ω зависят от напряжения U и сопротивления возбуждения R, то выражение (10) является квадратичной функцией двух коэффициентов исходного уравнения (8) U и R.

Для определения оптимальных инвариантных значений этих параметров приравняем к нулю производные ΔP по U и R:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta P}{\partial U} = 2R_a I_a \dfrac{\partial I_a}{\partial U} + 2k_{TP}\Omega\dfrac{\partial \Omega}{\partial U} + \dfrac{2U}{R}; \\ \dfrac{\partial \Delta P}{\partial R} = 2R_a I_a \dfrac{\partial I_a}{\partial R} + 2k_{TP}\Omega\dfrac{\partial \Omega}{\partial R} - \dfrac{U}{R^2}. \end{cases} \qquad (11)$$

Чтобы решить эти уравнения относительно U и R, необходимо знать величины четырех производных $\frac{\partial I_a}{\partial U}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial U}$, $\frac{\partial I_a}{\partial R}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial R}$. Непосредственное вычисление этих производных затруднено, поэтому, как принято в теории чувствительности, найдем производные по U и R от левых и правых частей уравнений (5) и (7). В результате получается линейная система из четырех уравнений для определения нужных производных

$$\begin{cases} \Phi(I_B)\dfrac{\partial I_a}{\partial U} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial I_B}\dfrac{\partial I_B}{\partial U} I_a = k_{TP}\dfrac{\partial \Omega}{\partial U} - \dfrac{P_0}{\Omega^2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial U}; \\ \Phi(I_B)\dfrac{\partial \Omega}{\partial U} + \Omega\dfrac{\partial \Phi}{\partial I_B}\dfrac{\partial I_B}{\partial U} + R_a\dfrac{\partial I_a}{\partial U} = 1; \end{cases} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} \Phi(I_B)\dfrac{\partial I_a}{\partial R} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial I_B}\dfrac{\partial I_B}{\partial R} I_a = k_{TP}\dfrac{\partial \Omega}{\partial R} - \dfrac{P_0}{\Omega^2}\dfrac{\partial \Omega}{\partial R}; \\ \Phi(I_B)\dfrac{\partial \Omega}{\partial R} + \Omega\dfrac{\partial \Phi}{\partial I_B}\dfrac{\partial I_B}{\partial R} + R_a\dfrac{\partial I_a}{\partial R} = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

В этих формулах $\dfrac{\partial \Phi}{\partial I_B} = \dfrac{ab}{1+(bI_B)^2} + c$; $\dfrac{\partial I_B}{\partial U} = \dfrac{1}{R}$; $\dfrac{\partial I_B}{\partial R} = -\dfrac{U}{R^2}$.

Решения систем уравнений (12), (13) имеют вид

$$\frac{\partial I_a}{\partial U} = \frac{\Delta I_U}{\Delta}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial U} = \frac{\Delta \Omega_U}{\Delta}; \quad \frac{\partial I_a}{\partial R} = \frac{\Delta I_R}{\Delta}; \quad \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{\Delta \Omega_R}{\Delta}, \qquad (14)$$

где $\Delta = \left(\Phi(I_B)\right)^2 - R_a\left(\dfrac{P_0}{\Omega^2} - k_{TP}\right)$;

$$\Delta I_U = -\frac{\Phi(I_B)I_a}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial I_B} - \left(\frac{P_0}{\Omega^2} - k_{TP}\right)\left(1 - \frac{\Omega}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial I_B}\right); \; \Delta \Omega_U = \Phi(I_B)\left(1 - \frac{\Omega}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial I_B}\right) + R_a\frac{I_a}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial I_B};$$

$$\Delta I_R = \Phi(I_B)\frac{I_a U}{R^2}\frac{\partial \Phi}{\partial I_B} + \left(\frac{P_0}{\Omega^2} - k_{TP}\right)\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial I_B}\frac{\Omega}{R^2}U\right); \; \Delta \Omega_R = \Phi(I_B)\frac{\Omega U}{R^2}\frac{\partial \Phi}{\partial I_B} - R_a\frac{\partial \Phi}{\partial I_B}\frac{UI_a}{R^2}.$$

Для использования производных (14) и решения системы (11) следует из выражений (5), (7) выразить I_a и Ω и подставить в (14).

При следующих типичных номинальных значениях параметров электродвигателя небольшой мощности, а именно $U = 220$ В; $k_{TP} = 0{,}5$; $R_a = 0{,}9$ Ом; $R = 100$ Ом; $\Omega = 14{,}38$ с$^{-1}$; $I_a = 25{,}95$ А; $I_B = 2{,}2$ А [8] величина корня (9) уравнения (8) составляет $P_0 = 5000$ Вт. Решение уравнений (11) показало, что величины U и R принимают оптимальные значения: $U = 259{,}93$ В; $R = 207{,}96$ Ом при сохранении мощности $P = P_0$. Результаты расчета приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты инвариантного оптимального выбора параметров

Наименование	Исходный режим	Оптимальный режим
Напряжение, В	220	259,93
Сопротивление, Ом	100	207,96
Ток якоря, А	25,95	21,9
Ток возбуждения, А	2,2	1,25
Угловая скорость, с$^{-1}$	14,33	22,44
Вращающий момент, Н ·м	356,05	234,07
Потери мощности на трение, Вт	102,7	251,7
Потери мощности на нагрев двигателя, Вт	606,0	431,59
Потери мощности на нагрев обмотки возбуждения, Вт	484	323,89
Общие потери мощности, Вт	1193	1007

Результаты расчета показывают, что необходимое значение мощности $P = P_0$ =5000 Вт оптимальным инвариантным выбором напряжения U и сопротивления возбуждения R достигается с меньшими общими потерями мощности ΔP, чем в исходном номинальном режиме. Заметно увеличились только потери мощности на трение вследствие увеличения скорости вращения.

Графики поверхности функции ΔP от напряжения U и сопротивления возбуждения R и ее линии уровня изображены на рисунке 2 и подтверждают наличие минимума функции потерь мощности в точке оптимального режима.

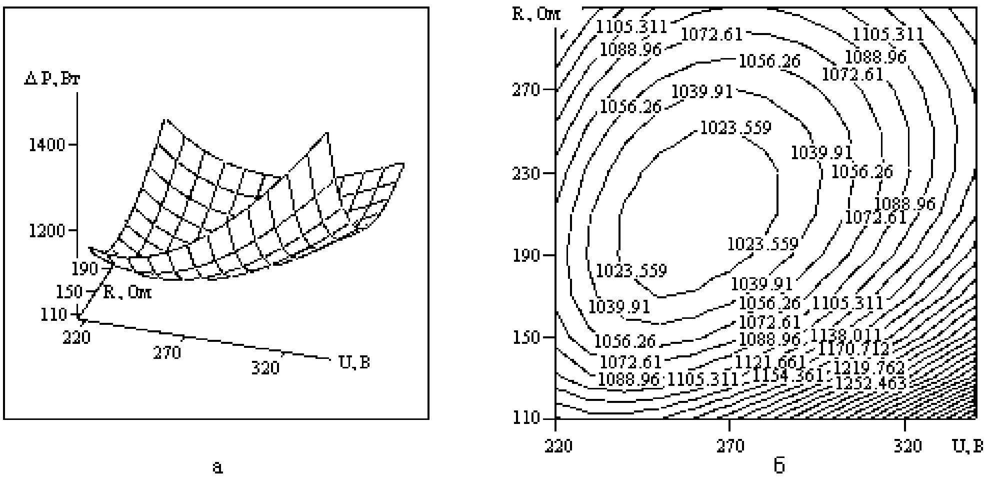

Рисунок 2 – Инвариантный оптимальный выбор параметров:
а) поверхность функции критерия; б) линии уровня

Выводы. Предложенная методика оптимального инвариантного выбора параметров позволяет определить оптимальные значения напряжения и сопротивления возбуждения для снижения потерь мощности в двигателе постоянного тока. В длительном стационарном режиме двигатель следует эксплуатировать при повышенном напряжении и сниженном токе возбуждения. Перспективным является построение автоматизированной системы для поддержания оптимального режима.

Библиографический список использованной литературы

1. Гуревич Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов / Г.Б. Гуревич. — М.: ОГИЗ, 1948. — 408 с.

2. Выгодский М.Я. Справочник по математике / М.Я. Выгодский. — М.: Наука, 1966. — 872 с.

3. Иртегов В.Д. Инвариантные многообразия стационарных движений / В.Д. Иртегов. — Новосибирск: Наука, новосиб. отд-е, 1985. — 231 с.

4. Смолянинов В.В. От инвариантов геометрии к инвариантам управления / В.В. Смолянинов. — М.: Наука, 1987. — 198 с.

5. Морозов А.Д. Инвариантные множества динамических систем / А.Д.Морозов. — М.: Изд-во URSS, 1998. — 187 с.

6. Панасюк В.И. О минимизации потерь энергии при управлении током якоря и потоком двигателя в процессе изменения скорости / В.И. Панасюк, Ю.В. Лопатин, В.С. Юденков // Электричество. — 1987. — № 9. — С. 61–63.

7. Канов Л.Н. Оптимизация электроприводов постоянного тока / Л.Н. Канов // Оптимизація виробничих процесів: зб. наук. пр. — Севастополь, 2011. — Вип. 13. — С. 91–95.

8. Касаткин С.А. Электротехника / С.А. Касаткин. — М.: Высш. шк., 2002. — 542 с.

Поступила в редакцию 30.01.2013 г.

Канов Л.М. Оптимальний інваріантний вибір параметрів електротехнічних систем

Запропоновано нову методику оптимізації електротехнічних систем на основі інваріантного вибору їх параметрів. Методику проілюстровано на прикладі оптимізації електроприводу постійного струму. Показано, що експлуатація приводу з підвищеною напругою і пониженому струмі збудження спричиняє зниження втрат потужності.

Ключові слова: інваріант, рівняння алгебри, оптимальний вибір, двигун постійного струму, втрата потужності.

Kanov L.N. Optimum Invariant Choice of Parameters of the Electrical Engineerings Systems

The new method of optimization of the electrical engineering systems is offered on the basis of invariant choice of their parameters. A method is illustrated on the example of optimization of electro mechanic of direct-current. It is shown that exploitation of drive at an overvoltage and lowered current of excitation results in the decline of losses of power.

Keywords: invariant, algebraic equations, optimum choice, direct-current engine, power loss.