

УДК 681.5

Ю.Е. Обжерин, профессор, д-р техн. наук,

Е.Г. Бойко, доцент, канд. техн. наук

Севастопольский национальный технический университет

ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053

E-mail: vm@sevgtu.sebastopol.ua

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНТРОЛЯ СКРЫТЫХ ОТКАЗОВ

На базе теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний построена математическая модель однокомпонентной системы. Найдены стационарные характеристики надежности функционирования системы. Для проверки адекватности построенной модели был проведен пассивный производственный эксперимент.

Ключевые слова: полумарковская модель, скрытый отказ, однокомпонентная производственная система.

В сложных производственных системах (ПС), где достаточно трудно проследить за индивидуальной работой всех узлов и деталей (компонентов), применяется периодический контроль скрытых отказов. Это означает, что контроль проводится через фиксированные (в общем случае – случайные) интервалы времени, которые должны быть оптимальными для всей системы, обеспечивая при этом ее максимальную надежность и эффективность. Решение этой задачи возможно на основе построения математических моделей контроля восстанавливаемых систем с учетом скрытых отказов [1].

Для построения моделей контроля в статье используется подход, разработанный в работах В.С. Королюка, А.Ф. Турбина [2], основанный на использовании теории полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний. Этот подход позволяет, при построении моделей, освободиться от некоторых ограничений, в частности, от предположения об экспоненциальном законе распределения случайных величин, характеризующих систему.

Целью данной статьи является проверка построенной полумарковской модели с помощью результатов пассивного производственного эксперимента.

Рассмотрим систему, функционирующую следующим образом. В начальный момент времени система находится в работоспособном состоянии. Время безотказной работы (ВБР) системы – случайная величина (СВ) α с функцией распределения (ФР) $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$ и плотностью распределения (ПР) $f(t)$. Контроль проводится через случайное время δ с ФР $R(t) = P\{\delta \leq t\}$ и ПР $r(t)$. Во время проведения контроля работа компонента приостанавливается. Длительность проведения контроля – СВ γ с ФР $V(t) = P\{\gamma \leq t\}$ и ПР $v(t)$. Отказ компонента обнаруживается только в результате проведения контроля (скрытый отказ). Время восстановления компонента после обнаружения отказа – СВ β с ФР $G(t) = P\{\beta \leq t\}$ и ПР $g(t)$. На период восстановления контроль приостанавливается. После восстановления все свойства компонента обновляются. Предполагается, что СВ α , β , δ , γ независимы и имеют конечные математические ожидания.

Для описания функционирования системы, временная диаграмма и граф переходов которой изображены на рисунках 1 и 2 соответственно, введем следующее пространство полумарковских состояний:

$$E = \{111, 212x, 211x, 101x, 202, 220\},$$

где 111 – компонент начал работать, контроль включен;

212x – начался контроль, компонент работоспособен и отключен, до наступления отказа (скрытого) компонента осталось время $x > 0$ (без учета времени проведения контроля);

211x – контроль окончился, работоспособный компонент продолжил работу, до наступления отказа компонента осталось время $x > 0$;

101x – наступил отказ компонента, до начала контроля осталось время $x > 0$;

202 – начался контроль, компонент, находящийся в отказе, отключен;

220 – окончился контроль, обнаружен отказ компонента, началось его восстановление, контроль приостановлен.

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n; n \geq 0\}$:

$$\begin{aligned}
 p_{111}^{212x} &= \int_0^{\infty} f(x+t)r(t)dt; & p_{111}^{101x} &= \int_0^{\infty} r(x+t)f(t)dt; & p_{211x}^{212y} &= r(x-y), \quad 0 < y < x; \\
 p_{211x}^{101y} &= r(x+y), \quad y > 0; & p_{212x}^{211y} &= p_{101x}^{202} = p_{202}^{220} = p_{220}^{111} = 1.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

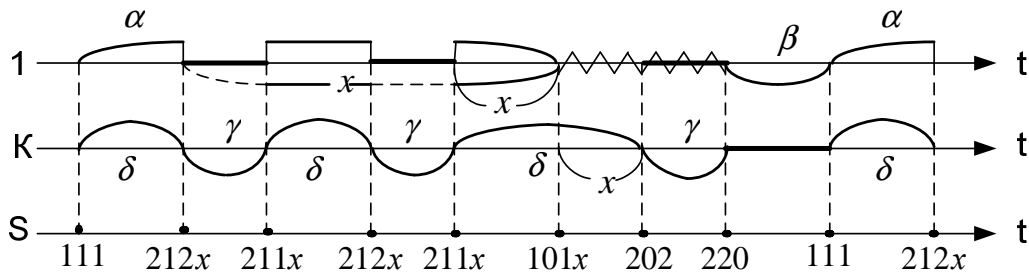


Рисунок 1 – Временная диаграмма функционирования системы

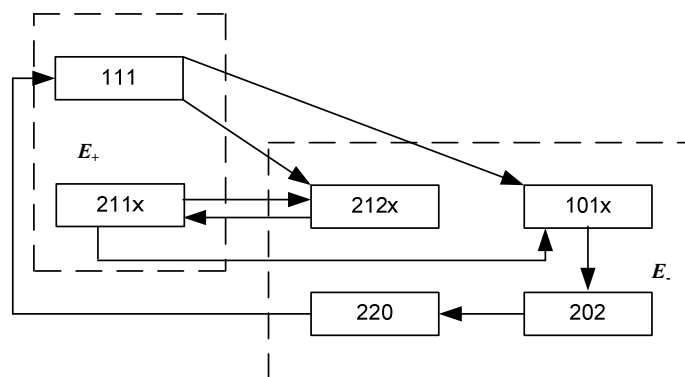


Рисунок 2 – Граф переходов системы

Обозначим через $\rho(111)$, $\rho(202)$ и $\rho(220)$ значение стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ на состояниях 111, 202 и 220 и предположим существование стационарной плотности $\rho(212x)$, $\rho(211x)$ и $\rho(101x)$ для состояний 212x, 211x и 101x соответственно. Составим для них систему интегральных уравнений.

$$\begin{cases}
 \rho_0 = \rho(111) = \rho(220), \rho(202) = \int_0^{\infty} \rho(101x)dx, \\
 \rho(220) = \rho(202), \\
 \rho(212x) = \rho(111) \int_0^{\infty} f(x+t)r(t)dt + \int_x^{\infty} \rho(211y)r(y-x)dy, \\
 \rho(211x) = \rho(212x), \\
 \rho(101x) = \rho(111) \int_0^{\infty} r(x+t)f(t)dt + \int_0^{\infty} \rho(211y)r(y+x)dy, \\
 3\rho_0 + \int_0^{\infty} \rho(101x)dx + 2 \int_0^{\infty} \rho(212x)dx = 1.
 \end{cases}$$

Последнее уравнение в системе – условие нормировки. Можно показать, что она имеет следующее решение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \rho(111) = \rho(220) = \rho(202), \\ \rho(211x) = \rho(212x) = \rho_0 \int_0^{\infty} h_r(t) f(x+t) dt, \\ \rho(101x) = \rho_0 \int_0^{\infty} v_r(z, x) f(z) dz, \end{array} \right. \quad (2)$$

где постоянная ρ_0 находится из условия нормировки; $h_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{*(n)}(t)$ – плотность функции восстановления $H_r(t)$ процесса восстановления, порожденного СВ δ [3], $r^{*(n)}(t)$ – n -кратная свертка функции $r(t)$; $v_r(z, x) = r(z+x) + \int_0^z r(z+x-s)h_r(s)ds$ – плотность распределения прямого остаточного времени для процесса восстановления.

Для описываемой ПС множества работоспособных состояний E_+ и отказовых состояний E_- имеют вид:

$$E_+ = \{111, 211x\}, \quad E_- = \{212x, 101x, 202, 220\}.$$

Найдем средние времена пребывания в состояниях:

$$\begin{aligned} m(111) &= \int_0^{\infty} \bar{F}(t) \bar{R}(t) dt; & m(211x) &= \int_0^x \bar{R}(t) dt; & m(212x) &= M\gamma; \\ m(202) &= M\gamma; & m(101x) &= x; & m(220) &= M\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя формулы (1), (2) и (3), среднюю стационарную наработку на отказ T_+ , среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент готовности найдем из выражений [2]:

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(e) \rho(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-) \rho(de)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(e) \rho(de)}{\int_{E_+} P(e, E_-) \rho(de)}, \quad K_2 = \frac{T_+}{T_+ + T_-},$$

где $\rho(de)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$; $m(e)$ – средние времена пребывания в состояниях системы; $P(e, E_-)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n; n \geq 0\}$ из работоспособных состояний в отказовые.

Средняя стационарная наработка на отказ T_+ и среднее стационарное время восстановления T_- имеют вид:

$$T_+ = \frac{M\alpha}{\int_0^{\infty} \tilde{H}_r(z) f(z) dz}, \quad T_- = \frac{M\beta - M\alpha + (M\delta + M\gamma) \int_0^{\infty} \tilde{H}_r(t) f(t) dt}{\int_0^{\infty} \tilde{H}_r(z) f(z) dz}, \quad (4)$$

где $\tilde{H}_r(t) = 1 + H_r(t)$, $H_r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{*(n)}(t)$ – функция восстановления процесса восстановления, порожденного СВ δ , $R^{*(n)}(t)$ – n -кратная свертка ФР $R(t)$.

Стационарный коэффициент готовности найдем из соотношения:

$$K_2 = \frac{M\alpha}{M\beta + (M\delta + M\gamma) \int_0^{\infty} \tilde{H}_r(t) f(t) dt}. \quad (5)$$

Получим формулы для характеристик надежности исследуемой системы при условии неслучайного времени периодичности контроля $\tau > 0$. Учитывая, что в этом случае $R(t) = 1(t - \tau)$, где $\tau = const$, $M\delta = \tau$ выражения (4), (5) примут вид:

$$T_+ = \frac{M\alpha}{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(n\tau)}, \quad T_- = \frac{M\beta - M\alpha + (M\delta + M\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(n\tau)}{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(n\tau)},$$

$$K_2 = \frac{M\alpha}{M\beta + (\tau + M\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(n\tau)}. \tag{6}$$

Полученные формулы позволяют вычислять значения стационарного коэффициента готовности для разных исходных данных, а также определения оптимального периода контроля.

Для проверки адекватности математической модели, был проведен пассивный производственный эксперимент, который показал, что наиболее частые отказы – притупление режущих кромок фрезы. В качестве объекта исследования и вычисления оптимального периода контроля скрытых отказов рассматривался фрезерный станок с числовым программным управлением как однокомпонентная система. По технологическому процессу для обработки изделия X, контроль фрез происходит через 2 часа. Эксперимент состоял в определении закона распределения времени безотказной работы фрезы посредством контрольно-измерительных устройств с учетом проведения контроля скрытых отказов.

Был проведен хронометраж времени безотказной работы, времени контроля и времени замены фрезы. После статистической обработки данных хронометража выдвинута гипотеза, что ВБР подчиняется закону Эрланга 4 порядка. В таблице 1 приведены экспериментальные характеристики надежности фрезы с учетом проведения контроля скрытых отказов.

Проверка по критерию согласия Пирсона χ^2 показала, что $\chi_{набл.}^2 < \chi_{кр.}^2$, следовательно, принятая гипотеза не противоречит полученным экспериментальным данным.

Таблица 1 – Экспериментальные характеристики надежности фрезы

Характеристики надежности	Математ. ожид-е $M^*(X)$, ч	Дисп-я σ^{*2} , ч ²	Коэф-т вариации V , %	Порядок закона Эрланга	Критерий Пирсона $\chi_{кр.}^2$	Критерий Пирсона $\chi_{набл.}^2$	Коэф-т готовности/опт. период контр., ч
Время безотказной работы	5,7	25,64	88,83	4	20,1	0,4276	0,813/ 0,968
Время контроля	0,1	–	–	–			
Время восстановления	0,083	–	–	–			

Далее проверялась адекватность построенных математических моделей с учетом проведения контроля. По полученным данным вычислен коэффициент готовности. В таблице 2 приведены сравнительные результаты теоретических и экспериментальных данных.

Таблица 2 – Сравнительные результаты пассивного эксперимента

Система	Экспериментальная модель	Полумарковская модель	Погрешность
	$K_2(\tau = 2 \text{ ч})$	$K_2(\tau = 2 \text{ ч})$	
Однокомпонентная с отключением компонента	0,759	0,798	3,9 %

Из таблицы 2 видно, что теоретические результаты отличаются от экспериментальных на 3,9%, что подтверждает достаточную степень адекватности полумарковской модели однокомпонентной системы с учетом контроля скрытых отказов.

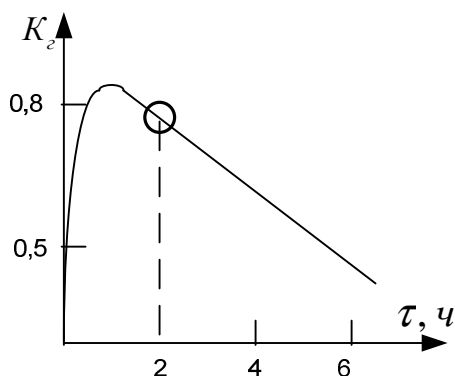


Рисунок 3 – Графік залежності стаціонарного коефіцієнта готовності від періодичності контролю τ

Проверка данного результата с помощью формулы (6) показала, что оптимальная периодичность контроля $\tau_{opt.} = 0,968$ и соответствующий коэффициент готовности $K_2 = 0,813$, следовательно, значение $\tau_{opt.} = 0,968$ отличается от используемого на производстве. На графике зависимости стационарного коэффициента готовности от периодичности контроля τ , изображенном на рисунке 3, хорошо видно, что значение $\tau = 2$ ч, используемое на производстве, не является оптимальным. Предложенное значение оптимального периода контроля улучшает коэффициент готовности на 1,6 %.

В дальнейшем планируется применять полученную методику построения полумарковских моделей при исследовании многокомпонентных систем.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Половко А.М. Основы теории надежности / А.М. Половко, С.В. Гуров. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: БХВ – Петербург, 2006. — 704 с.
2. Королюк В.С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. — К.: Наук. думка, 1982. — 236 с.
3. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание / Ф. Байхельт, П. Франклен // Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.

Поступила в редакцию 22.02.2013 г.

Обжерін Ю.Є., Бойко О.Г. Експериментальна перевірка математичної моделі контролю прихованих відмов

На базі теорії напівмарківських процесів із загальним фазовим простором створено побудовано математичну модель однокомпонентної системи при паралельному з'єднанні компонентів. Знайдено стаціонарні надійнісні характеристики функціонування системи. Для перевірки адекватності побудованої моделі було проведено пасивний виробничий експеримент.

Ключові слова: напівмарківська модель, прихована відмова, однокомпонентна виробнича система.

Obgerin U.E., Boyko H.G. An experimental testing of the mathematical model of control for hidden failures

On the base of Semi-Markov process with overall space one-component system with parallel connection of components, a mathematical model is constructed. Reliable functioning characteristics were found. To verify of adequacy, the model passive production experiment was carried out.

Keywords: Semi-Markov model, hidden failures, one-component production system.