

УДК 624

А.И. Бохонский, А.Н. Круговой*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: root@sevgtu.sevastopol.ua***ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ УПРУГОГО ОБЪЕКТА С УЧЕТОМ СОПРОТИВЛЕНИЙ ДВИЖЕНИЮ**

На основе известного управления движением абсолютно твердого тела (при достижении минимума энергетического квадратичного критерия оптимальности) найдено силовое управляющее воздействие, обеспечивающее оптимальное движение упругой системы.

Ключевые слова: *квадратичный критерий, оптимальное управление, упругий объект, переносное и относительное движение.*

Введение. Управление движением объекта как абсолютно твердого тела рассмотрено, например, в работе [1]. Оптимальному управлению движением объекта посвящены работы [2, 3]. В этих работах не рассматривалось управление движением упругого объекта.

Законы управления движением абсолютно твердого тела можно использовать при определенных условиях при управлении движением деформируемого твердого тела. Наиболее простой случай управления движением, позволяющий найти точное аналитическое решение, приведен, например, в работе [1].

Оптимальное управление движением объекта с массой $m=1$ кг без учета сопротивления как абсолютно твердого тела при перемещении из исходного состояния в конечное за минимальное время $T = \int_0^T dt$ или с достижением минимума квадратичного критерия $\int_0^T U^2 dt$, характеризующего затраченную энергию на управление [1], имеет вид

$$U_e = \frac{6L}{T^3}(T-2t), \quad V_e = \frac{6LT}{T^2}(T-t), \quad S_e = \frac{L}{T^2}\left(3 - \frac{3t}{T}\right)t^2, \quad (1)$$

где L – максимальное перемещение; T – общее время движения. Графики $U_e(t)$, $V_e(t)$, $S_e(t)$ при $L=1$ м; $T=0,715$ с изображены на рисунке 1.

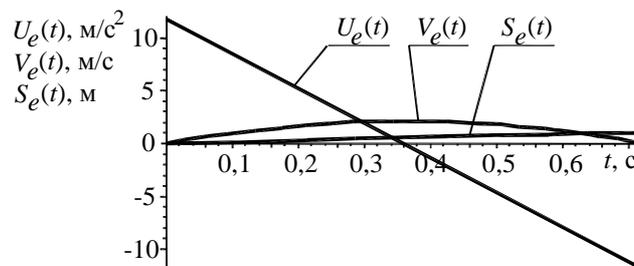


Рисунок 1 – Графики оптимального ускорения, скорости и перемещения

Цель исследований – использование управления (1) для оптимального переносного движения упругих объектов.

При данном переносном движении дифференциальное уравнение относительного движения упругого объекта (без учета сопротивления) на временном интервале $T \geq t \geq 0$ запишется так

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2} + k^2 x_r = -\frac{6L}{T^3}(t-2t), \quad (2)$$

где k – частота собственных колебаний упругого объекта (с одной степенью свободы). При нулевых начальных условиях ($t=0$, $x_r=0$; $V_r=0$) из (2) перемещение, скорость и ускорение записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= -\frac{12\sin(kt)L}{k^3T^3} + \frac{6\cos(kt)L}{k^2T^2} - \frac{6L(-2t+T)}{k^2T^3}, \\
 V_r(t) &= -\frac{12\cos(kt)L}{k^2T^3} - \frac{6\sin(kt)L}{kT^2} + \frac{12L}{k^2T^3}, \\
 a_r(t) &= \frac{12\sin(kt)L}{kT^3} - \frac{6\cos(kt)L}{T^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Согласно метода моментов [4] при $t=T$ перемещение и скорость относительного движения должны быть равны нулю, т.е. $x_r(T) = 0$ и $\dot{x}_r(T) = 0$. Эти соотношения приводят к трансцендентным уравнениям, в которых среди различных корней должны быть *одинаковые корни для обоих уравнений*. После преобразований (при $L = 1$ м и $kT = R$) уравнения 3 принимают вид:

$$\begin{aligned}
 x_r(T) &= -2\sin(R) + \cos(R) \cdot R + R = 0, \\
 V_r(T) &= 2\cos(R) + \sin(R) \cdot R - 2 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Одним из общих корней этой системы является, например, $R_2 = 8,9868$. Тогда при $k = 4\pi$ общее время движения $T = 0,715$ с. Графики относительного перемещения и скорости $x_r(t)$ и $V_r(t)$ изображены на рисунке 2.

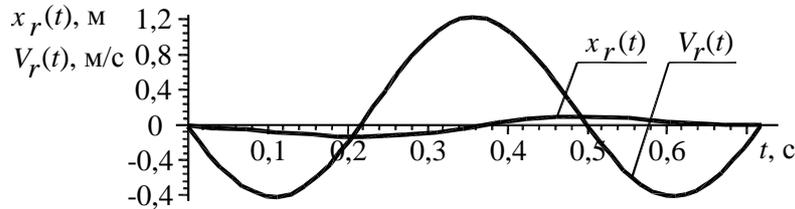


Рисунок 2 – Графики относительного перемещения $x_r(t)$ и скорости $V_r(t)$

Из графиков следует, что относительные перемещения и скорость в момент времени $t = T$ равны нулю, т.е. наблюдается относительный покой. Интересно, что относительное ускорение $a_r = 11,7316$ м/с², но при этом в данный момент времени переносное ускорение $U_e(T) = -11,7316$, т.е. *резльтирующее абсолютное ускорение равно нулю*. Таким образом, после переносного движения на расстояние L за время T наступает абсолютный покой (управление в этот момент отключается).

Примечание. Систему уравнений (4) можно тем или иным способом свести к одному уравнению. Например, возможен следующий вариант:

$$\cos R + \frac{R^2 - 4}{R^2 + 4} = 0.
 \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет бесчисленное множество корней, значения которых повторяются как $R_{j+1} = R_j + R_p$, где R_p – значение периода. График функции $L = \cos R + \frac{R^2 - 4}{R^2 + 4}$ изображен на рисунке 3. Множество корней позволяет выбирать приемлемое время движения при практической реализации движений.

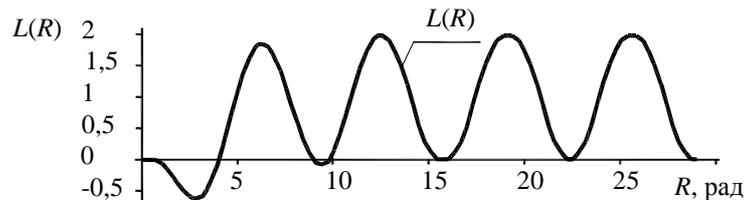


Рисунок 3 – График зависимости $L(R)$

Сопротивление движению может быть внешним (сопротивление воздуха и сухое трение) и внутренним (линейно-вязкое сопротивление). Предложен алгоритм выбора такого управляющего

воздействия, при котором относительное движение происходит идеально – также как при отсутствии трения.

Для определения ускорения основания упругого объекта, при котором с учетом линейно-вязкого сопротивления относительное движение осуществляется по идеальному закону (без трения), решается обратная задача динамики

$$U_e^* = -(a_r + 2n_1V_r + k^2x_r), \tag{6}$$

где n_1 – коэффициент линейно-вязкого сопротивления. Ускорение (6) основания обеспечит идеальное относительное движение упругого объекта. С учетом начальных условий $V_e^*(0) = 0$ и $S_e^*(0) = 0$ найдены $V_e^*(t)$ и $S_e^*(t)$. Выражения для перемещения, скорости и ускорения с учетом сопротивления приведены ниже:

$$\begin{aligned} U_e &:= -\frac{12 \sin(kt) L}{k T^3} + \frac{6 \cos(kt) L}{T^2} - 2nl \left(-\frac{12 \cos(kt) L}{k^2 T^3} - \frac{6 \sin(kt) L}{k T^2} + \frac{12 L}{k^2 T^3} \right) \\ &\quad - k^2 \left(-\frac{12 \sin(kt) L}{k^3 T^3} + \frac{6 \cos(kt) L}{k^2 T^2} - \frac{6 L(-2t+T)}{k^2 T^3} \right), \\ V_e &:= \frac{12 \cos(kt) L}{k^2 T^3} + \frac{6 \sin(kt) L}{k T^2} - 2nl \left(-\frac{12 \sin(kt) L}{k^3 T^3} + \frac{6 \cos(kt) L}{k^2 T^2} + \frac{12 Lt}{k^2 T^3} \right) \\ &\quad - k^2 \left(\frac{12 L \cos(kt)}{k^4 T^3} + \frac{6 L \sin(kt)}{k^3 T^2} - \frac{6 L(-t^2+Tt)}{k^2 T^3} \right) + \frac{12 nl L}{k^2 T^2}, \\ S_e &:= \frac{12 \sin(kt) L}{k^3 T^3} - \frac{6 \cos(kt) L}{k^2 T^2} - 2nl \left(\frac{12 L \cos(kt)}{k^4 T^3} + \frac{6 L \sin(kt)}{k^3 T^2} + \frac{6 Lt^2}{k^2 T^3} \right) \\ &\quad - k^2 \left(\frac{12 L \sin(kt)}{k^5 T^3} - \frac{6 L \cos(kt)}{k^4 T^2} - \frac{6 L \left(\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} T t^2 \right)}{k^2 T^3} \right) + \frac{12 nl Lt}{k^2 T^2} + Cl. \end{aligned} \tag{7}$$

При $L = 1, m$, $n = 1$, $n_1 = 0,1k$, $T = 0,715c$ графики функций U_e^* , V_e^* , S_e^* изображены на рисунке 4.

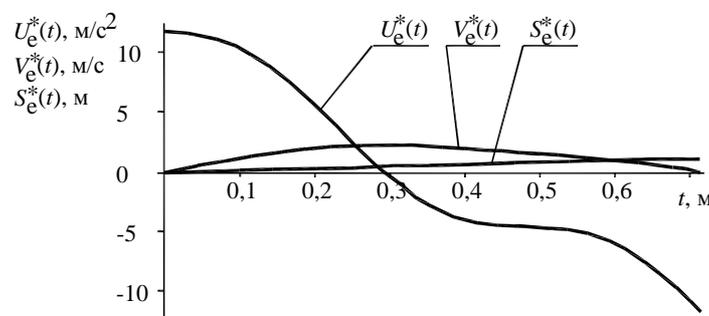


Рисунок 4 – Графики оптимального ускорения, скорости и перемещения основания упругого осциллятора с учетом сопротивления движению

Закон ускорения основания должен реализовываться с учетом внешнего сопротивления переносному движению. Новая обратная задача состоит в определении воздействия на объект для реализации движения с сопротивлением (без учета влияния относительного движения на переносное)

$$U_1 = U_e^* + 2nV_e^* + F, \tag{8}$$

где F – сила сухого трения. Достаточно громоздкое выражение $U_1(t)$ дальше не приводится, а на рисунке 5 изображен график, отражающий характер изменения управления в связи с учетом сопротивлений

Управление $U_1(t)$ имеет чисто методическое значение. Для непосредственной практической реализации управления следует учесть свойства электродвигателя. Поэтому вместо найденного $U_1(t)$ реализуется алгоритм управления, который иллюстрируется для случая использования двигателя постоянного тока.

Дифференциальное управление вращения якоря двигателя с учетом сопротивлений запишется в виде

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c - k_1 \frac{d\omega}{dt},$$

где M , M_c – соответственно активный момент и постоянный момент сопротивления, приведенный к валу двигателя; J – момент инерции всех элементов системы, приведенный к валу двигателя.

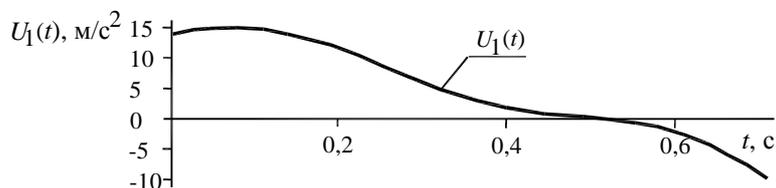


Рисунок 5 – График управляющего воздействия с учетом сопротивления движению

Активный момент равен

$$M = cI_{я}, \quad (9)$$

где $c = \frac{U_n - I_{ян}R_{я}}{\omega_n}$, U_n , $I_{ян}$, ω_n – номинальные значения напряжения, тока якоря и частоты вращения;

$R_{я}$ – сопротивление якорной цепи. Из (9) находится $I_{я} = f(t)$.

Управляющее воздействие (напряжение на якорной цепи) вычисляется по зависимости

$$U = E + R_{я}I_{я} + L_{я} \frac{dI_{я}}{dt}, \quad (10)$$

где $E = c\omega$ – ЭДС двигателя; $I_{я}$ – ток якоря; $L_{я}$ – индуктивность якорной цепи. В (10) подставляется значение $I_{я}$ согласно (9), а $\omega(t)$ выражается через V_e^* . Один из возможных графиков для напряжения изображен на рисунке 6.

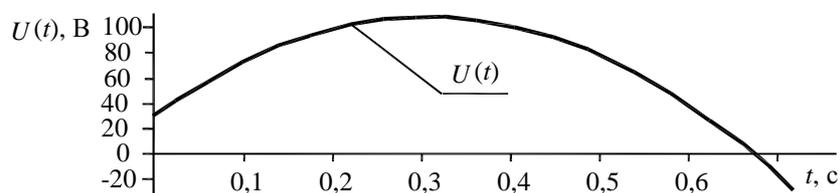


Рисунок 6 – Пример изменения напряжения при реализации управления движением упругого объекта

В связи с учетом линейно-вязкого сопротивления и наличие сухого трения изменяется характер напряжения, обеспечивающего реализацию управления. Задание найденного напряжения должно обеспечить требуемое движение упругого объекта. Достаточно строгий учет параметров двигателя и сопротивлений движения может существенно приблизить реальное движение к найденному (теоретически идеальному), а не использование предлагаемых управлений приведет к большим амплитудам колебаний в конце движения вплоть до разрушения объекта.

Выводы

1. Показано, что при использовании известного решения для оптимального перемещения абсолютно твердого тела можно построить управление, обеспечивающее перемещение упругого объекта с достижением абсолютного покоя (отсутствие колебаний) в конце движения. При этом выбирается приемлемое минимальное время движения.

2. Найденный закон оптимального движения может быть реализован практически с использованием двигателей постоянного и переменного тока.

3. Предложенное управление может найти применение в различных областях современной техники: от автоматизированного сборочного производства до монтажа крупногабаритных нежестких конструкций в состоянии невесомости.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с уточнением характеристик двигателей постоянного тока для проведения экспериментальных исследований по воспроизведению оптимальных законов переносного движения упругих систем.

Библиографический список использованной литературы

1. Теория автоматического управления. Ч. II. Теория линейных и специальных систем автоматического регулирования / под ред. А.А. Воронова. — М.: Высшая школа, 1977. — 288 с.
2. Бохонский А.И. Оптимальное управление переносным движением деформируемых объектов: теория и технические приложения / А.И. Бохонский, Н.И. Варминская, М.И. Мозолевский; под ред. А.И. Бохонского. — Севастополь: СевНТУ, 2007. — 269 с.
3. Bokhonsky A.I. Modelling and analysis of elastic system in motion / A.I. Bokhonsky, S.J. Zolkiewski. — Wydawnictwo Politechniki Gliwice, 2011. — 171 p.
4. Карновский И.А. Методы оптимального управления колебаниями деформируемых систем / И.А. Карновский, Ю.М. Почтман. — К.-Д.: Вища школа, 1982. — 116 с.

Поступила в редакцию 24.01.2013 г.

Бохонський О.І., Круговой О.М. Оптимальне управління переміщенням пружного об'єкта з урахуванням опорів руху

На основі відомого управління рухом абсолютно твердого тіла (за мінімуму енергетичного квадратичного критерію оптимальності) знайдено силовий керуючий вплив, який забезпечує оптимальний рух пружної системи.

Ключові слова: квадратичний критерій, оптимальне управління, пружний об'єкт, переносний та відносний рух.

Bokhonsky A.I., Krugovoi A.N. Optimal control of the movement of the elastic object taking into account the resistance to movement

On the basis of the known motion control of a rigid body (when the minimum energy quadratic optimality criterion) we find the force control action that ensures optimal motion of the elastic system.

Keywords: quadratic criterion, optimal control, an elastic object, portable and relative motion.