

УДК 378.147+530:531.3

Олена Завражна

Сумський державний педагогічний
університет імені А. С. Макаренка
ORCID ID 0000-0002-7716-7138

Іван Мороз

Сумський державний педагогічний
університет імені А. С. Макаренка
ORCID ID 0000-0002-4965-1352

DOI 10.24139/2312-5993/2019.06/062-073

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ «ПРИНЦИП ВІРТУАЛЬНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ» ПРИ ВИВЧЕННІ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Стаття присвячена висвітленню методичних особливостей викладання теми «Принцип віртуальних переміщень». Авторами узагальнено результати аналізу навчальних посібників та власного досвіду і на основі цього запропоновано один із можливих способів обґрунтування понять «умови рівноваги системи тіл», «принцип віртуальних переміщень», що дозволяє сформулювати у студентів достатньо глибоке й стійке розуміння цих понять та дає уявлення про використання принципу віртуальних переміщень для розв'язання конкретних задач, які важко розв'язати використовуючи лише механіку Ньютона.

Ключові слова: *учителі фізики, класична механіка, в'язі, сили реакції, механічна система, умови рівноваги системи тіл, віртуальні переміщення, принцип віртуальних переміщень.*

Постановка проблеми. Перехід освітнього середовища України на європейські стандарти і пов'язане з цим прагнення вищої освіти України здійснювати підготовку фахівців, здатних працювати за європейськими стандартами вимагає значного посилення фундаментальної підготовки студентів (Мороз, 2012; Завражна та ін., 2018). Тому все сучасне науково-методичне забезпечення навчального процесу повинно базуватися на деяких загальних теоріях, що є фундаментом всієї теоретичної підготовки. Таким фундаментом при підготовці фахівців фізико-математичного профілю, особливо – вчителів фізики, є загальні принципи, які в компактній формі містять у собі не лише всі відомі експериментальні та теоретичні положення, але й мають евристичну цінність, яка дозволяє прогнозувати існування нових, поки що невідомих явищ природи.

Такі принципи дійсно були відкриті – це варіаційні принципи, які вперше були сформульовані в механіці, і при підготовці вчителів фізики їх починають вивчати в першому розділі курсу теоретичної фізики – «Класична механіка» (III курс навчання). На відміну від загального курсу

«Механіка» (I курс навчання), у якому студенти лише поглиблюють свої шкільні знання, при вивченні класичної механіки, уже на етапі формулювання варіаційних принципів, які найбільшою мірою сприяли створенню всіх аналітичних методів теоретичної фізики, вони стикаються з багатьма узагальненнями й абстрактними поняттями, формування яких ставить перед ними задачу відмовитися мислити і оперувати звичними наочними поняттями, що притаманні загальній фізиці, а перед викладачами – безліч методичних проблем, які потрібно вирішити.

Аналіз актуальних досліджень науково-методичної літератури показує, що проблема фахової підготовки майбутніх учителів фізики широко обговорюється науковцями на сторінках педагогічних та методичних часописів у різних аспектах: із проблеми якості освіти в галузі фізики та фундаменталізації О. Бугайов, С. Гончаренко, О. Ляшенко, А. Павленко, О. Сергєєв, М. Шут та ін.; становлення майбутнього вчителя фізики на засадах компетентнісного підходу досліджують П. Атаманчук, Г. Атанов, М. Головка, О. Ляшенко, В. Сергієнко та ін.; підвищення якості дидактичного забезпечення навчального процесу та вдосконаленням фізичного навчального експерименту досліджують Л. Благодаренко, В. Величко, В. Вовкотруб, В. Заболотний, Л. Калапуша, Е. Коршак, Д. Костюкевич, О. Мартинюк; методичні аспекти вивчення певних питань курсів загальної і теоретичної фізики розглядають у своїх працях В. Мендерецький, І. Сальник, В. Сиротюк та ін.; Г. Бушок, О. Коновал, І. Мороз, М. Садовий, В. Сергієнко, Б. Сусь, І. Тичина та ін. Оцінюючи значення праць учених-методистів, узагальнюючи результати їх досліджень та власного досвіду роботи в педагогічному університеті, ми дійшли висновку, що в теорії та методиці викладання фізики практично відсутні дослідження, у яких висвітлювалися б методичні аспекти навчання основ аналітичної механіки. Лише в окремих посібниках (Бондаренко та ін., 2004; Булгаков та ін., 2017; Іванов та Максютя, 2012; Єжов та ін., 2007; Литвинов та ін., 2013) фрагментарно розглянуто обґрунтування понять «умови рівноваги системи тіл», «віртуальні переміщення», «принцип віртуальних переміщень», які є передумовою формулювання варіаційних принципів.

Тому метою даної статті є висвітлення деяких методичних аспектів навчання теми «Принцип віртуальних переміщень».

Методи дослідження. Для вирішення поставлених задач у науковій статті переважно було використано теоретичні методи: аналіз вітчизняних і зарубіжних наукових джерел, систематизація й узагальнення матеріалів теоретичних досліджень.

Виклад основного матеріалу. Узагальнюючи результати аналізу навчальних посібників і власного досвіду, зупинимося детальніше на розгляді одного з можливих варіантів обґрунтування питання «Принцип віртуальних переміщень», який ми використовуємо на лекціях із класичної механіки.

Мета вивчення теми передбачає ознайомлення студентів з умовами рівноваги системи матеріальних точок та системи тіл, з прикладами практичного застосування принципу віртуальних переміщень.

Відповідно до мети зміст теми розкривається за допомогою таких питань:

- дослідження умов рівноваги системи матеріальних точок, системи тіл;
- аналіз дійсних та можливих переміщень;
- формулювання принципу віртуальних переміщень;
- отримання з принципу можливих переміщень умов рівноваги твердого тіла;
- практичне застосування принципу віртуальних переміщень.

Вивчення теми доцільно розпочати з нагадування, що в усі, навіть стародавні, часи люди, будуючи кораблі, мости й різноманітні будівлі, стикались із проблемою збереження рівноваги цих рукотворних споруд. До створення фізики, як науки про природу, ці проблеми розв'язувалися, зазвичай, на основі інтуїції людей, яка базувалася на багаторічному досвіді, що передавався від покоління до покоління. Але використання лише досвіду не завжди призводило до бажаного результату, а одержаний результат не завжди досягався найбільш раціональним способом. Тому потреби практики ставили задачу визначити умови, які забезпечують збереження побудованих споруд від самовільного руйнування, тобто забезпечують умови рівноваги тіл. Наукове обґрунтування цих умов стало можливим після відкриття Ньютоном законів класичної механіки. Звертаємо увагу студентів на те, що, дійсно, у тих випадках, коли тіла можна розглядати як матеріальні точки, умовою збереження їх рівноваги, тобто збереження спокою матеріальних точок системи відносно деякої інерціальної системи відліку, як це відомо з механіки Ньютона, є рівність нулю суми заданих сил $\overset{\cdot}{F}_i^e$ і сил реакції в'язей $\overset{\cdot}{R}_i$:

$$\overset{\cdot}{a} \overset{\cdot}{F}_i^e + \overset{\cdot}{a} \overset{\cdot}{R}_i = 0. \quad (1)$$

Для матеріальних систем, тіла яких не можна розглядати як матеріальні точки, до системи (1) потрібно додати таку саму систему для моментів цих сил:

$$\mathring{\mathbf{a}} M_{oi}^e + \mathring{\mathbf{a}} M_{oi}^R = 0, \quad (2)$$

але вираз (1) у випадку об'ємних тіл завжди потрібно застосовувати до окремих частинок, які можна розглядати як матеріальні точки.

Для систем, які складаються з декількох тіл, систему з рівнянь (1) і (2) завжди можна розв'язати і встановити умови рівноваги. Але різноманітні механізми, будівлі тощо складаються з великої кількості твердих тіл і використання умов збереження рівноваги у вигляді рівності нулю головних векторів сил та їх моментів становиться практично неможливим (через громіздкість системи рівнянь і математичні труднощі їх розв'язання).

Далі наголошуємо, що в 1788 р. французький математик і механік Ж. Лагранж, аналізуючи відомі ще в стародавньому світі дослідження популярних механізмів: важелів, поліспастів, похилих площин тощо, а потім і досліджень західноєвропейських учених (Г. Убальді, Г. Галілея, Е. Торрічелі, Р. Декарта, Д. Валліса, І. Бернуллі), сформулював принцип, дуже зручний для вивчення рівноваги різноманітних механічних систем, який традиційно в літературі називається принцип віртуальних переміщень. Цей принцип визначає необхідні й достатні умови рівноваги голономних систем. На лекції потрібно зазначити, що він без доведення був сформульований ще Д. Бернуллі в 1717 р. Тривалий час це був саме принцип, тобто положення, яке приймається без доведення («на віру»). Сам Ж. Лагранж у двотомнику «Mecanique Analytique» (Paris, 1788) писав, що цей принцип, хоч і дуже простий, не є очевидним настільки, щоб його можна було приймати як аксіоматичне твердження без доведення. Він у формулюванні Д. Бернуллі базується на принципі дії важеля, відомого ще Архімеду (287–212 рр. до н.е.), і на аксіомі паралелограма сил. Але із введенням у механіку понять «віртуальні переміщення» та «ідеальні в'язі», його можна легко довести, тобто його потрібно уже розглядати як теорему, що має доведення. Тим не менш, традиційно його вже більше двох століть називають не теоремою, а принципом. Отже далі, не порушуючи традицію у назві, формулюємо принцип віртуальних переміщень: *для рівноваги будь-якої механічної системи зі стаціонарними ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб сума робіт активних сил на будь-якому віртуальному переміщенні дорівнювала нулю*

$$\mathring{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = 0. \quad (3)$$

Акцентуємо увагу студентів на тому, що під рівновагою ми розуміємо не рівновагу активних сил і сил реакції, що діють на точки системи, при якій

система може рухатися по інерції, а її спокій, тобто нерухомість усіх матеріальних точок системи відносно деякої інерціальної системи відліку.

Також треба підкреслити, що в механіці, коли вводили поняття «елементарна робота»

$$dA = \mathbf{F} \times d\mathbf{r}, \quad (4)$$

мали на увазі роботу сил, прикладених до точок системи, при нескінченно малих переміщеннях цих точок уздовж їх траєкторій. Інакше кажучи, диференціали $d\mathbf{r}$ були не випадковими нескінченно малими приростами векторів \mathbf{r} , а задовольняли наступній умові: кінець вектора \mathbf{r} описує траєкторію точки. В аналітичній механіці поняття «елементарна віртуальна робота» має інший зміст: тут ми припускаємо, що незалежні нескінченно малі зміни (варіації) радіус-вектора \mathbf{r} не обмежені умовою руху точки вздовж траєкторії, а визначаються лише накладеними зв'язками. Елементарна робота всіх сил системи, включаючи реакції ідеальних зв'язків, яка розрахована для довільних незалежних варіацій радіус-векторів $d\mathbf{r}$, що допускаються зв'язками, називається віртуальною роботою і позначається dA .

Як видно з формулювання принципу віртуальних переміщень, умови рівноваги механічної системи враховують лише діючі активні сили, а сили реакції, які заздалегідь завжди невідомі, із розгляду виключаються.

Наголошуємо, що принцип можливих переміщень суттєво полегшує аналіз рівноваги невільної системи, яка складається з великої кількості тіл. Це пояснюється тим, що рівняння віртуальних робіт не містить реакцій в'язей. Застосування до таких систем рівнянь рівноваги статички (1) і (2) потребувало б визначення великої кількості невідомих реакцій в'язей.

Далі разом зі студентами доводимо необхідність умови (3) для рівноваги системи.

Нехай система точок, на яку накладено стаціонарні утримуючі ідеальні голономні в'язі, перебуває в рівновазі, тобто всі її точки нерухомі. У такому випадку сума всіх сил діючих на кожну матеріальну точку, дорівнює нулю.

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

Надамо системі віртуальне переміщення. Це означає, що радіус-вектори всіх матеріальних точок, які проведені від початку координат деякої інерціальної системи відліку, отримали віртуальні зміни $d\mathbf{r}_i$, що сумісні з в'язями. Помножимо для кожної частинки вираз (5) на її віртуальне переміщення і просумуємо за всіма точками.

$$\sum_i \dot{\mathbf{a}} \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i + \sum_i \dot{\mathbf{a}} \mathbf{R}_i d\mathbf{r}_i = 0.$$

Тоді, з урахуванням означення ідеальних в'язей, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{a}} \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i = 0.$$

Необхідність доведена.

Потім доводимо достатність умови (3). Припустимо, що умова (3) виконуються, але система все ж таки виходить зі стану спокою, тобто всі точки (або лише деякі) починають рухатись. Оскільки до виходу зі спокою всі ці точки були нерухомі, то прискорення і швидкість кожної точки, що вийшла зі стану спокою, будуть мати напрям (рис. 1) у напрямку результуючої сили, яка не дорівнює нулю¹

$$\dot{\mathbf{F}}_i + \dot{\mathbf{R}}_i \neq 0 \quad (6)$$

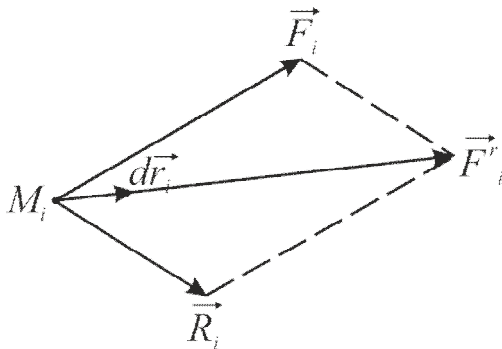


Рис. 1. Визначення напрямку дії результуючої сили

Накладені в'язі стаціонарні, тому віртуальні переміщення системи виберемо так, щоб вони збіглися з дійсними, тоді перемножимо (6) на відповідні віртуальні (вони ж – дійсні) переміщення й підсумуємо за всіма

точками:
$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{a}} (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) d\mathbf{r}_i \neq 0$$

або, з урахуванням означення ідеальних в'язей:
$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{a}} \mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i \neq 0,$$
 що

суперечить умові (3). Достатність цієї умови, а з нею і принцип віртуальних переміщень, доведено.

Крім того, на лекції потрібно відзначити ще одну важливу обставину, яка в подальшому ще не раз буде використовуватися: у формулюванні

¹ Якби результуюча сила, що діє на нерухому матеріальну точку, була би рівною нулю, то вона б не почала рухатися.

цього принципу фігурують ідеальні в'язі, але його можна використовувати і для в'язей із тертям. Для цього випадку потрібно дотичну складову сили реакції, тобто силу тертя, включити в число активних сил, а в'язь із залишеною її нормальною реакцією вважати ідеальною і відкинути, також додати в число віртуальних переміщень ще переміщення, яке система може мати при відкинутій в'язі. Таку операцію можна розглядати як штучне перетворення неідеальних зв'язків в ідеальні.

Далі відзначаємо: якщо система, що складається з великої кількості тіл, має один ступінь вільності (це випадок, який найбільш часто реалізується в техніці), то одна з рівностей (3) устанавлює відразу умову рівноваги системи під дією заданих сил, що прикладені до системи. Якщо ця система має кілька ступенів вільності, то рівняння робіт складаються для кожного незалежного переміщення (кожного ступеня вільності) системи окремо. Отже приходимо до висновку: скільки ступенів вільності має система, стільки для неї отримуємо умов рівноваги.

Зауважимо студентам також, що принцип віртуальних переміщень є не лише незамінним інструментом визначення умов рівноваги та встановлення сил реакцій в'язей при розв'язанні задач і широко використовується в технічній механіці, будівельній механіці, при конструкторських розрахунках тощо, але й дозволяє одержати важливі теоретичні узагальнення.

Далі пропонуємо студентам дослідити використання принципу віртуальних переміщень для вивчення умов рівноваги системи матеріальних точок у полі тяжіння Землі.

Для цього розглядаємо задачу про рівновагу системи матеріальних точок, що знаходиться в полі зовнішніх сил – однорідному полі тяжіння Землі. Положення точок визначаємо координатами x_i, y_i, z_i . Вважаючи, що вісь Z спрямована вертикально вгору, записуємо (3) у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i = 0 \quad \text{P} \quad - \sum_{i=1}^n m_i g dz_i = 0 \quad \text{P} \quad \sum_{i=1}^n d(m_i z_i) = 0.$$

Поміняємо порядок операцій: $d \sum_{i=1}^n (m_i z_i) = 0$.

Суму $\sum_{i=1}^n (m_i z_i)$ виразимо через Z координату центра мас:

$$\sum_{i=1}^n (m_i z_i) = z_c \sum_{i=1}^n m_i = M z_c,$$

тоді умова рівноваги даної системи буде мати вигляд: $dz_c = 0$.

Приходимо до висновку, що система матеріальних точок у полі

тяжіння Землі буде у спокої тоді й лише тоді, коли центр мас цієї системи займає найвище або найнижче положення серед усіх можливих положень, або – коли буде знаходитись у деякому стаціонарному стані. Пояснюємо це на прикладі однієї матеріальної точки (маленька кулька), яка зображена на рис. 2.

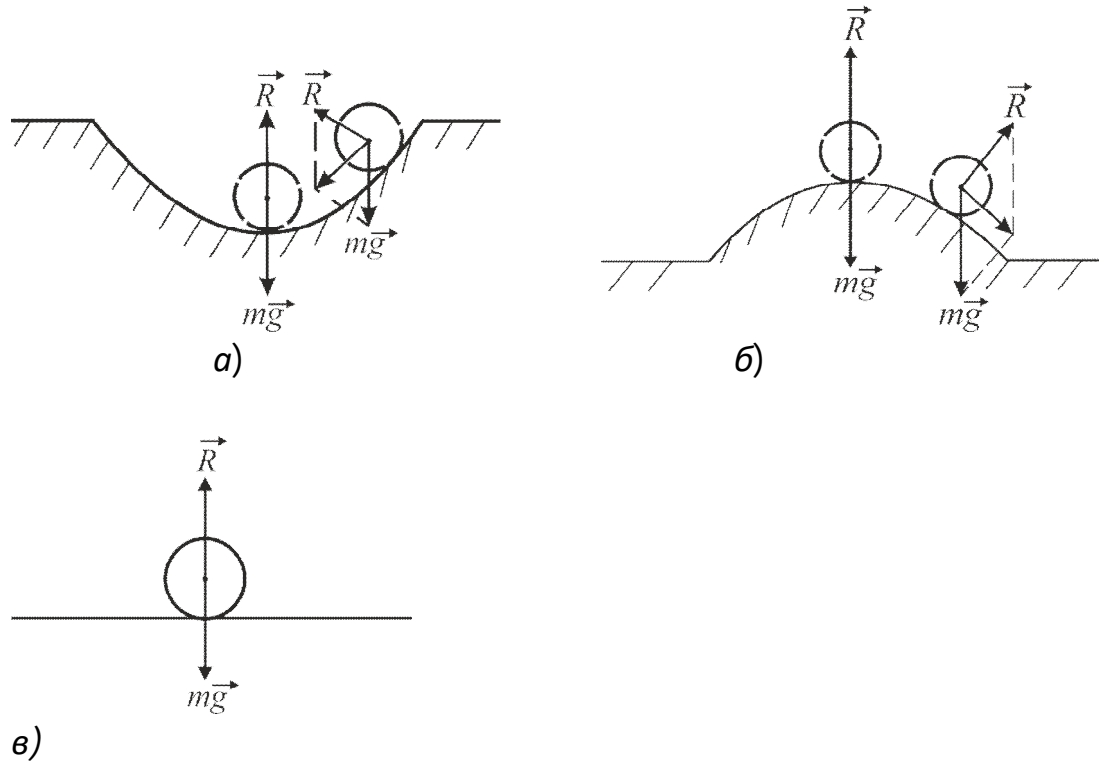


Рис. 2. Положення матеріальної точки в полі тяжіння Землі:
 а) стійка рівновага; б) нестійка рівновага; в) байдужа рівновага

При виведенні кульки з положення рівноваги (рис. 2, а) виникають сили, які повертають її в положення рівноваги. Це положення стійкої рівноваги, їй відповідає найнижче положення центру мас і мінімум потенціальної енергії. У положенні б – все навпаки, це нестійка рівновага. Положення в – байдужа рівновага.

Потім на лекції з'ясуємо використання принципу віртуальних переміщень для визначення рівноваги твердого тіла. Для цього розглядаємо вільне абсолютне тверде тіло. Його можна представити як механічну систему з внутрішніми голономними утримуючими стаціонарними ідеальними в'язями, рівняння яких має вигляд:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = const.$$

Оскільки зв'язки стаціонарні, то в якості віртуального переміщення точок тіла $d\vec{r}_i$ можна взяти дійсне переміщення $d\vec{r}$. Швидкість i -тої точки твердого тіла визначається відомою формулою

$$\dot{V}_i = \dot{V}_O + [\dot{W} \times r_i], \quad (7)$$

де \dot{V}_O – швидкість деякої точки O , вибраної в якості полюса, \dot{W} – кутова швидкість обертання твердого тіла навколо полюса, r_i – вектор, проведений від полюса до i -тої точки.

Помноживши (7) на dt , отримаємо нескінченно мале дійсне переміщення i -тої точки твердого тіла, яке приймаємо за віртуальне:

$$dr_i = dR_O + [dj^r \times r_i],$$

Підставляємо цей вираз у (3) – принцип віртуальних переміщень і враховуємо при цьому, що сумарна робота всіх внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^N \overset{r}{a} F_i dr_i = \sum_{i=1}^N \overset{r}{a} F_i dR_O + \sum_{i=1}^N \overset{r}{a} F_i [dj^r \times r_i] = 0,$$

де F_i – результуюча всіх зовнішніх сил, що діють на i -ту точку системи.

Скористаємося відомою формулою для змішаного добутку векторів

$$\overset{r}{a}[bc] = \overset{r}{b}[ca] = \overset{r}{c}[ab],$$

тоді

$$dR_O \sum_{i=1}^N \overset{r}{a} F_i + dj^r \sum_{i=1}^N \overset{r}{a} F_i [r_i \times F_i] = 0.$$

Оскільки dR_O і dj^r незалежні варіації, то остання умова рівноваги твердого тіла набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^N \overset{r}{a} F_i = F^e = 0, \quad [r_i \times F_i] = M_O^e = 0,$$

тобто тверде тіло буде в рівновазі, якщо головний вектор та головний момент зовнішніх сил, що діють на нього, будуть рівними нулю.

Наприкінці лекції акцентуємо увагу студентів на послідовності, у якій рекомендується розв'язувати завдання з використанням принципу можливих переміщень:

1) побудувати схему механічної системи з прикладеними до неї зовнішніми активними силами (при наявності неідеальних зв'язків сили їх реакцій розкласти на силу тертя, яку включити в число активних сил, а залишену нормальну силу реакції в'язей відкинути);

2) за необхідності визначити реакції зв'язків, умовно відкинути зв'язки й замінити їх реакціями;

3) визначити кількість ступенів вільності. Для цього потрібно уявно зупинити одне з тіл системи. Якщо всі тіла зупиняться, то система має один ступінь вільності, якщо – ні, то повторити все з іншим тілом, яке ще не зупинилося, і виконувати цю процедуру до тих пір, поки система не зупиниться. Кількість таких спроб дорівнює числу ступенів вільності. Вибрати незалежні можливі переміщення точок системи, які відповідають кожному ступеню вільності;

4) надати системі віртуальне переміщення, що відповідає одному зі ступенів вільності, вважаючи при цьому переміщення, що відповідають іншим ступеням вільності, рівними нулю; виразити віртуальні переміщення точок прикладання сил через вибране незалежне віртуальне переміщення;

5) обчислити суму робіт усіх сил, зазначених у пп. 1) і 2), на відповідних віртуальних переміщеннях їх точок прикладання та прирівняти цю суму до нуля;

6) послідовно виконати викладки пп. 2) і 5) для кожного з незалежних віртуальних переміщень, скласти систему рівнянь рівноваги в кількості, що дорівнює числу ступенів вільності системи;

7) розв'язати отриману систему рівнянь, знайти шукані величини.

Отже, робимо висновки: аналіз використання принципу віртуальних переміщень показує, що за його допомогою можна достатньо просто одержати важливі фізичні результати, а також – розв'язувати конкретні задачі, які важко розв'язати використовуючи лише закони Ньютона, тому він є незамінним інструментом дослідження механічних систем. Але наголошуємо студентам, що його дієвість ще збільшується при подальшому узагальненні й використанні узагальнених координат та при введенні на їх основі нового поняття – узагальнені сили.

Для закріплення даної теми на практичних заняттях розв'язуються приклади, що ілюструють застосування принципу віртуальних переміщень:

- а) визначення реакції в'язей;
- б) дослідження рівноваги системи з одним ступенем вільності;
- в) дослідження рівноваги системи з двома ступенями вільності.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. У статті наведено деякі методичні особливості викладання теми «Принцип віртуальних переміщень», що є складовою курсу «Класична механіка», який вивчається на першому (бакалаврському) рівні вищої освіти. Як показує досвід викладання класичної механіки, розглянута методика дозволяє сформулювати у студентів достатньо глибоке й стійке розуміння понять «умови рівноваги системи тіл», «віртуальні переміщення», «принцип віртуальних

переміщень» та дає уявлення про використання принципу віртуальних переміщень для розв'язання задач, які важко розв'язати, використовуючи лише закони Ньютона. Отже, цей принцип є незамінним інструментом дослідження механічних систем, оскільки за його допомогою можна достатньо просто одержати важливі фізичні результати. Подальші дослідження будуть спрямовані на узагальнення методики навчання основ аналітичної механіки у педагогічному університеті.

ЛІТЕРАТУРА

- Бондаренко, А. А., Дубінін, О. О., Переяславцев, О. М. (2004). *Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. Ч. 2: Динаміка*. Київ: «Знання» (Bondarenko, A. A., Dubinin, O. O., Pereiaslvtsev, O. M. (2004). *Theoretical mechanics: Textbook: in two parts. Part 2: Dynamics*. Kyiv: "Knowledge").
- Булгаков, В. М., Яременко, В. В., Черниш, О. М., Березовий, М. Г. (2017). *Теоретична механіка: підручник*. Київ: ЦУЛ (Bulgakov, V. M., Yaremenko, V. V., Chernysh, O. M., Berezovyi, M. H. (2017). *Theoretical mechanics: textbook*. Kyiv).
- Іванов, Б. О., Максьюта, М. В. (2012). *Конспект лекцій із теоретичної механіки: навчальний посібник*. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет» (Ivanov, B. O., Maksyuta, M. V. (2012). *Synopsis of lectures on theoretical mechanics: tutorial*. Kyiv: Publishing and Printing Center "Kyiv University").
- Ежов, С. М., Макарець, М. В., Романенко, О. В. (2007). *Класична механіка*. Київ: Фізичний факультет (Yezhov, S. M., Makaresh, M. V., Romanenko, O. V. (2007). *Classical mechanics*. Kyiv: Faculty of Physics).
- Завражна, О., Однодворець, Л., Пасько, О., Салтикова, А. (2018). Методика формування у студентів знань про стан сучасної фізики та нанотехнологій. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, 1, 196-208* (Zavrzhna, O., Odnodvoretz, L., Pasko, O., Saltykova, A. (2018). The method of formation of students' knowledge about the state of modern physics and nanotechnology. *Pedagogical sciences: theory, history, innovative technologies, 1, 196-208*).
- Литвинов, О. І., Михайлович, Я. М., Бойко, А. В., Березовий, М. Г. (2013). *Теоретична механіка Ч. II. Динаміка. Основи аналітичної механіки*. Київ: Агроосвіта (Lytvynov, O. I., Mykhailovych, Ya. M., Boiko, A. V., Berezovyi, M. H. (2013). *Theoretical mechanics. Part II. Dynamics. Fundamentals of Analytical Mechanics*. Kyiv: Agro Education).
- Мороз, І. О. (2012). Фундаменталізація навчальних курсів у педагогічних університетах. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі, 10, 78-85* (Moroz, I. O. (2012). Fundamentalization of training courses at pedagogical universities. *Scientific journal of the National Pedagogical University named after M. P. Dragomanov. Series 3: Physics and Mathematics at Higher and Secondary Schools, 10, 78-85*).

РЕЗЮМЕ

Завражная Елена, Мороз Иван. Методические особенности преподавания темы «Принцип виртуальных перемещений» при изучении классической механики.

В статье рассмотрены методические особенности преподавания темы «Принцип виртуальных перемещений». Авторами обобщены результаты анализа учебных пособий и собственного опыта и на основе этого рассмотрен один из возможных способов обоснования понятий «условия равновесия системы тел»,

«принцип виртуальных перемещений», что позволяет сформировать у студентов достаточно глубокое и устойчивое понимание этих понятий и дает представление об использовании принципа виртуальных перемещений для решения конкретных задач, которые трудно решить, используя только законы Ньютона.

***Ключевые слова:** учителя физики, классическая механика, связи, силы реакции, механическая система, условия равновесия системы тел, виртуальные перемещения, принцип виртуальных перемещений.*

SUMMARY

Zavrazhna Olena, Moroz Ivan. Methodological features of teaching the topic "The principle of virtual displacements" when learning classical mechanics.

While training physics and mathematics specialists, and in particular physics teachers, it should be paid attention to the general principles, which in a compact form contain not only all known experimental and theoretical positions, but also allow predicting new discoveries. These principles include integral variational principles that were first formulated in mechanics. In the process of training of physics teachers, the principles are studied in the theoretical physics course in its first section – "Classical mechanics". Unlike the general course "Mechanics", where students only deepen their school knowledge, while studying classical mechanics (at the stage of the formulation of differential principles, which most contributed to the creation of analytical mechanics), they encounter many generalized and abstract concepts, which formation puts a lot of methodological problems before the teachers that should be solved.

The purpose of the article is coverage of methodological aspects of teaching the topic "The principle of virtual displacements".

The following methods were used for research: systematic scientific and methodological analysis of textbooks and manuals, monographs, manuscripts, articles and materials of methodological conferences on the research problem; observation of the educational process; analysis of student learning results according to the research problem; synthesis, comparison and generalization of theoretical positions, discovered in the scientific and educational literature; generalization of own pedagogical experience and colleagues' experience from other higher educational establishments.

The authors of the article summarize the results of the analysis of teaching aids and their own experience and on their basis suggest one of the possible ways of substantiating the concepts of "equilibrium conditions of the system of bodies", "the principle of virtual displacements", which the authors use at the first lectures on classical mechanics.

The considered method allows students to form sufficiently deep and stable understanding of these concepts and gives an idea of using the principle of virtual displacements to solve specific problems that are difficult to solve using only the laws of Newton. Further research will be aimed at highlighting the methodological aspects of teaching analytical mechanics at the pedagogical university.

***Keywords:** future physics teachers, classical mechanics, relations, forces, reactions, mechanical system, conditions of equilibrium of the system of bodies, virtual displacement, principle of virtual displacements.*