

Особливості імовірнісного розрахунку висотних споруд при врахуванні випадковості обох складових вітрового впливу

Антон Махінко¹, Наталія Махінко²

Національний авіаційний університет
1, просп. Космонавта Комарова, Київ, Україна, 03058
¹pasargada@yandex.ua, orcid.org/0000-0002-9147-7087
²orcid.org/0000-0001-8120-6374

Анотація. Імовірнісний розрахунок висотних споруд залежить від наявності розрахунково-теоретичної бази, що забезпечує адекватне уявлення про взаємодію споруди із зовнішніми навантаженнями, на основі точних та доступних для інженерів обчислювальних процедур і методів розрахунку. В запропонованій статті було досліджено проблему оцінки реакцій висотних споруд на дію вітрового потоку у формі двох стаціонарних випадкових процесів та запропонована лаконічна методика сполучення цих процесів шляхом застосування фактору пориву. Відповідно до отриманих залежностей та рекомендацій, виконаний практичний розрахунок надійності висотної споруди у просторі переміщень при врахуванні випадковості обох складових вітрового впливу, на прикладі стрижня з одним ступенем вільності.

Ключові слова. Швидкість вітру, випадковий процес, фактор пориву, характеристична інтенсивність, частотні характеристики.

ВСТУП

Оцінка реакцій висотних споруд при сумісній дії статичної $\tilde{U}(t)$ і пульсаційної $\tilde{y}(\tau)$ складової швидкості вітру, коли обидві розглядаються як випадкові, завжди проковує проблему співставлення двох випадкових процесів із різним масштабом часу: макрометеорологічного t , що вимірюється



Антон Махінко
професор кафедри комп'ютерних технологій будівництва
д.т.н., с.н.с.



Наталія Махінко
доцент кафедри комп'ютерних технологій будівництва
к.т.н.

у десятках годин і добах та макрометеорологічного τ , що вимірюється у секундах та хвилинах. Справа в тому, що випадкові процеси $\tilde{U}(t)$ і $\tilde{y}(\tau)$, будучи стаціонарними в межах свого масштабу часу, при алгебраїчній сумі породжують нестационарний процес із складною частотною структурою. Простота математичного опису цієї структури напряму впливає на процедуру опису випадкових коливань споруди, яка з точки зору інженера повинна бути аналітичною та лаконічною. Очевидно, що для цього необхідно щоб методика поєднання двох складових швидкості вітру також була простою. Типові подібні теоретичні задачі вже вирішувалися в рамках даного журналу [1].

Неможна не відмітити певну іронію даної проблематики: фактичний випадковий процес швидкості вітру на підставі спектру Ван дер Ховена [2] розкладають на два «зручні» стаціонарні процеси $\tilde{U}(t)$ і $\tilde{u}(\tau)$, а потім вирішується питання їх поєднання, тобто «зручного повернення» до первинного процесу. Одним із таких засобів, який добре зарекомендував себе у галузі динаміки висотних споруд, є фактор пориву [3 – 6]. Тому подальші міркування стосовно сполучення процесів $\tilde{U}(t)$ і $\tilde{u}(\tau)$, а також спровокованих ними реакцій $\tilde{R}(t)$ і $\tilde{r}(\tau)$, ув'язуватимемо саме із цим коефіцієнтом.

В якості вихідного положення подальших міркувань приймемо гіпотезу про те, що відмова споруди у будь-якому просторі реакцій при випадкових коливаннях, викликаними процесом $\tilde{u}(\tau)$, може відбутися лише тоді, коли середня швидкість вітру $\tilde{U}(t)$ досягає свого максимуму \tilde{U}_{\max} . Доцільність прийняття цієї гіпотези можна пояснити наступним чином. Стандарт процесу $\tilde{u}(\tau)$ зростає пропорційно ординаті процесу $\tilde{U}(t)$, а тому при досягненні останнім величини \tilde{U}_{\max} , він буде максимальним; відповідно й ризик виникнення відмови також буде максимальним. Таким чином замість випадкового процесу $\tilde{U}(t)$ можна розглядати лише його максимуми \tilde{U}_{\max} на довжині реалізації рівному проектному строку експлуатації висотної споруди T_{ef} .

МЕТА І МЕТОДИ

Методологія оцінки статистичних характеристик максимумів випадкових процесів налічує не одну сотню різноманітних методик, методів та пропозицій. Проте внаслідок складності математичного апарату, що застосовується й об'єму обчислювальних процедур, вони навряд чи можуть претендувати на інженерне застосування. Крім цього більшість отриманих на сьогодні результатів у статистиці екстремальних значень стосується нормальних випадкових послідовностей і процесів, а середня скла-

дова швидкості вітру має розподіл, який навіть віддалено нагадує нормальний. У зв'язку з цим виникає потреба в наближених методах, які б поєднуючи простоту і лаконічність викладення, забезпечували достатню точність розрахунку.

За основу була взята модель [7] та вдосконалена стосовно максимумів середньої швидкості вітру та швидкісного напору.

Зміст даної моделі ґрунтується на передумові того, що будь-яку щільність розподілу випадкового процесу $\tilde{\gamma}(t)$ з нульовим середнім та одиничним стандартом можна записати як

$$f_{\gamma}(\gamma) = g_1(\gamma) \exp[-g_2(\gamma)], \quad (1)$$

де g_1 та g_2 – деякі функції, що характеризують форму розподілу.

Для середньої кількості викидів за деякий детермінований рівень γ матимемо

$$N_+(\gamma|t) = \exp[-g_0(\gamma, t)], \quad (2)$$

$$g_0(\gamma, t) = g_2(\gamma) - \ln \left[\sqrt{2\pi} n_e \kappa(\gamma) t g_1(\gamma) \right], \quad (3)$$

де n_e – ефективна частота випадкового процесу $\tilde{\gamma}(t)$, $\kappa(\gamma)$ – функція, яка враховує можливе відхилення похідної ВП від нормального розподілу.

Підставивши (2) у (1), для інтегральної функції розподілу максимумів випадкового процесу за час t матимемо наступну формульну інтерпретацію:

$$F(\gamma, t) = \exp \left\{ -\exp[-g_0(\gamma, t)] \right\}. \quad (4)$$

Дана формула асоціюється з інтегральною функцією першого екстремального розподілу Гумбеля [8] і переходить в нього у випадку лінійної залежності аргументу γ в показнику експоненти. Припустимо далі, що при деякому значенні $\gamma \geq \gamma_0$ функція $g_0(\gamma, t)$ починає мало відрізнятися від прямої пропорційності і її можна замінити точною, проведеною у точці $\gamma = \gamma_0$. Очевидно,

дно, що рівняння цієї дотичної матиме вигляд

$$g_{0,t}(\gamma, t) = \lambda_0 (\gamma - \gamma_0), \quad (5)$$

де величини λ_0 і γ_0 , по аналогії із розподілом Гумбеля, будемо називати характеристичною інтенсивністю та характеристичним максимумом ВП $\tilde{\gamma}(t)$.

Характеристичний максимум γ_0 , у відповідності до робіт В.В. Болотіна [9, 10], оберемо таким чином, щоб при $\gamma = \gamma_0$, виконувалась умова $N_+(\gamma_0 | t) = 1$, а характеристичну інтенсивність – виходячи з геометричного змісту дотичної:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\pi} \cdot n_e(\gamma_0) \kappa(\gamma_0) t \times \\ & \times g_1(\gamma_0) \exp[-g_2(\gamma_0)] = 1, \quad (6) \\ \lambda_0 = & g'_2(\gamma_0) - \frac{g'_1(\gamma_0)}{g_1(\gamma_0)} - \kappa' \frac{(\gamma_0)}{\kappa(\gamma_0)}. \quad (7) \end{aligned}$$

Для обґрунтування запропонованого підходу розглянемо два випадки, коли ординати випадкового процесу $\tilde{\gamma}(t)$ розподіляються за нормальним законом (пульсаційна складова швидкості вітру) і законом Вейбулла (середня складова швидкості вітру). Для нормального процесу $\kappa(\forall \gamma) = 1$, $g_1(\gamma) = 1/\sqrt{2\pi}$, а $g_2(\gamma) = 0,5\gamma^2$. Із виразів (6), (7) неважко відразу встановити, що $\lambda_0 = \gamma_0$, а характеристичний максимум γ_0 знаходиться за формулою Райса, тобто

$$\lambda_0 = \gamma_0 = \sqrt{2 \ln(n_e t)}. \quad (8)$$

З іншого боку, відомо, що максимуми нормального нормованого ВП, із двічі диференційованою кореляційною функцією, слідує розподілу Гумбеля I типу із наступними параметрами масштабу a_t та положення b_t [11]:

$$\begin{aligned} a_t = & \sqrt{2 \ln(t)}, \\ b_t = & \sqrt{2 \ln(t)} + \ln(n_e) / \sqrt{2 \ln(t)}. \quad (9) \end{aligned}$$

Як видно із формул (7), параметри a_t та b_t залежать від масштабу часу, обраного для представлення процесу. При цьому у такій мірі, що це може інколи служити джерелом непорозумінь. Дійсно, якщо змінити одиниці масштабу у (9), замінюючи t на $t' = t v$, приймаючи, що v деяка константа, то це призведе до заміни $\sqrt{2 \ln(t)}$ на $\sqrt{2 \ln(t) + 2 \ln(v)}$ і заміни n_e на n_e / v і кількісна оцінка параметрів a_t та b_t стане іншою. Проте очевидно, що яким би ні був масштаб часу, для глобального максимуму процесу $\tilde{\gamma}(t)$ існує точний граничний розподіл. Проблема полягає у тому, що помилка при використанні (7) для кінцевих інтервалів часу залежить від масштабу часу. Один логічний спосіб підрахунку часу, який часто використовується на практиці [12 – 16], полягає у вираженні його в одиницях відстані між перетинами нульового рівня або середньої довжини періоду між нулями. Нехай $v = n_e$ – середня кількість виходів за нульовий рівень у (стару) одиницю часу. Введемо новий масштаб часу $t' = t v$, який підраховує час в одиницях кількості виходів за нульовий рівень. Тоді $\ln[n_e v] = \ln(1) = 0$ і, відповідно, глобальний максимум процесу слідує розподілу Гумбеля I типу із співпадаючими параметрами масштабу і положення:

$$a_t = b_t = \sqrt{2 \ln(v t)}. \quad (10)$$

Таким чином, використання виразів (4) – (6) для нормального процесу дозволяє знаходити точне рішення задачі про розподіл глобального максимуму, хоча виводилися формули (6), (7) та (9), (10) із абсолютно різних математичних передумов.

У випадку, коли ордината випадкового процесу $\tilde{\gamma}(t)$ слідує закону Вейбулла, маємо наступну оцінку функцій g_1 , g_2 та κ в нормованій формі:

$$g_1(\gamma) = g'_2(\gamma), \quad g_2(\gamma) = \Gamma^{b_w} (1 + \gamma V_w)^{b_w},$$

$$\kappa(\gamma) = 1, \quad (11)$$

де b_w та V_w – параметр форми та коефіцієнт варіації розподілу Вейбулла; $\Gamma^{b_w} = \Gamma(1+b_w^{-1})^{b_w}$ – неповна гама-функція при відповідному аргументі.

Підставляючи дані вирази у (6) та (7), для характеристичної інтенсивності маємо замкнене рішення, а для характеристичного максимуму – трансцендентне рівняння, корінь якого і даватиме числову оцінку параметра γ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{1 - b_w \left[1 - \Gamma^{b_w} (1 + \gamma_0 V_w)^{b_w} \right]}{1 + \gamma_0 V_w} V_w, \quad (12)$$

$$\sqrt{2\pi} n_e t g_1(\gamma_0) \exp[-g_2(\gamma_0)] = 1. \quad (13)$$

З іншого боку, у фундаментальній монографії [11] показується, що незалежно від закону розподілу ординат випадкового процесу його глобальний максимум слідує розподілу Гумбеля I типу при умові, що

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{f'_\gamma(\gamma) [1 - F_\gamma(\gamma)]}{[f_\gamma(\gamma)]^2} = -1, \quad (14)$$

де $F_\gamma(\gamma)$ – інтегральна функція розподілу ВП $\tilde{\gamma}(t)$, яку для випадку використання закону Вейбулла можна подати у наступному загальному вигляді:

$$F_\gamma(\gamma) = 1 - \exp[-g_2(\gamma)]. \quad (15)$$

Підставивши вирази (1) та (15) у (14), враховуючи що $g_1(\gamma) = g'_2(\gamma)$, зможемо записати

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left(\frac{g''_2(\gamma)}{g'^2_2(\gamma)} - 1 \right), \quad (16)$$

Поєднуючи вираз (14) із граничною рівністю (16), можна записати умову відповідності глобального максимуму процесу $\tilde{\gamma}(t)$ екстремальному розподілу Гумбеля I типу:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left[g''_2(\gamma) / g'^2_2(\gamma) \right] = 0. \quad (17)$$

Приведена умова є достатньою для того, щоб функція розподілу $F_\gamma(\gamma)$ належала області тяжіння подвійного експоненціального розподілу Гумбеля. При цьому вона справедлива для будь-якого ВП, щільність та функція розподілу якого представлені у вигляді (1) та (15). Очевидно, що для ВП із розподілом Вейбулла умова (17) виконується. Дійсно, знайшовши перші дві похідні функції $g_2(\gamma)$ і підставивши отриманий результат в (17), будемо мати

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left[\frac{b_w - 1}{\gamma + V_w^{-1}} \right] = (b_w - 1) \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\gamma + V_w^{-1}} \right] = 0. \quad (18)$$

Таким чином глобальний максимум випадкового процесу з розподілом ординати за законом Вейбулла слідує подвійному експоненціальному закону Гумбеля. Доречно відмітити, що подібний висновок стосовно екстремумів випадкових величин, які слідують розподілу Вейбулла, був раніше сформульований в роботі [17].

Розподіл Вейбулла, при розгляді вітрових впливів, має одну корисну властивість – випадкові процеси середньої швидкості вітру та середнього швидкісного напору мають однакові розподіли. Параметри цих розподілів пов'язані співвідношенням

$$\vartheta_\beta = \frac{\Gamma(1 + \beta_w^{-1})}{\Gamma(1 + \beta_u^{-1})^2} = \frac{\bar{w}}{\rho_a \bar{U}^2 / 2}, \quad (19)$$

де \bar{w} і \bar{U} – математичні сподівання випадкових процесів середньої швидкості вітру $\tilde{U}(t)$ та середнього швидкісного напору $\tilde{w}(t)$.

Також важливим є питання частотної структури процесів $\tilde{U}(t)$ і $\tilde{w}(t)$, оскільки вона напряму впливає на точність оцінки їх максимумів. Як відомо, вичерпною характеристикою будь-якого процесу у частотній області є його нормована спектральна щільність $s_\gamma(n)$ або, відповідно до зворот-

ного перетворення Фур'є, нормована кореляційна функція $\rho_\gamma(\tau_0)$. Для процесу середнього швидкісного напору в роботах [14, 17] для цих функцій обґрунтовано можливість застосування виразів вигляду

$$s_w(n) = \frac{32\alpha^5}{3[\alpha^2 + (2\pi n)^2]^3},$$

$$\rho_w(\tau_0) = \exp(-\alpha \tau_0) \left(1 + \alpha \tau_0 + \frac{\alpha^2 \tau_0^2}{3} \right), \quad (20)$$

де α – параметр нормованої кореляційної функції.

Ефективна частота $n_{e,w}$, частота за максимумами $n_{m,w}$ та коефіцієнт широкосмуговості $\beta_{\omega,w}$ процесу $\tilde{w}(t)$ можуть бути визначені через похідні нормованої кореляційної функції:

$$n_{e,w}^2 = -\rho_w''(0) = \frac{\alpha^2}{3},$$

$$n_{m,w}^2 = \frac{\rho_w^{IV}(0)}{\rho_w''(0)} = 3\alpha^2,$$

$$\beta_{\omega,w} = \frac{n_{m,w}}{n_{e,w}} = 3,0. \quad (21)$$

Для процесу середньої швидкості вітру $\tilde{U}(t)$, очевидно, що функції $s_U(n)$ та $\rho_U(\tau_0)$, а також їх характеристики $n_{e,U}$, $n_{m,U}$ і $\beta_{\omega,U}$, не слідуватимуть виразам (20), (21), а будуть пов'язані з ними деякими співвідношеннями.

Нормовану кореляційну функцію процесу $\tilde{U}(t)$ отримуємо відповідно до її визначення, і враховуючи, що $\tilde{U}(t)$ наближено дорівнює $\sqrt{\tilde{w}(t)}$:

$$\rho_U(\tau_0) = \mathbf{M} [U(t)U(t+\tau_0)] = \sqrt{\rho_w(\tau_0)}, \quad (22)$$

\mathbf{M} – символ математичного сподівання.

Після цього отримуємо частотні характеристики $n_{e,U}$, $n_{m,U}$ і $\beta_{\omega,U}$ на базі формул (21) для середньої швидкості вітру та підс-

тавимо отримані похідні при $\tau_0 = 0$ у виразі (21):

$$n_{e,U}^2 = -\rho_U''(0) = \frac{\alpha^2}{6},$$

$$n_{m,U}^2 = \frac{\rho_U^{IV}(0)}{\rho_U''(0)} = \frac{5}{2}\alpha^2,$$

$$\beta_{\omega,U} = \frac{n_{m,U}}{n_{e,U}} = \sqrt{15}. \quad (23)$$

Звідси легко отримуємо зв'язок між частотними характеристиками випадкових процесів середньої швидкості вітру та середнього швидкісного напору:

$$\frac{n_{e,w}}{n_{e,U}} = \sqrt{2}, \quad \frac{n_{m,w}}{n_{m,U}} = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1,1,$$

$$\beta_{\omega,w} / \beta_{\omega,U} = \sqrt{3/5} \approx 0,77. \quad (24)$$

Отже відношення частотних характеристик обох процесів (24) вітрового впливу можуть розцінюватись як частотні інваріанти.

Розгляд вітрового потоку у формі двох стаціонарних випадкових процесів робить за необхідне розглядати реакцію споруди також через синтез двох випадкових складових. У відповідність процесу середньої швидкості вітру $\tilde{U}(t)$ поставимо спровокований нею процес реакції $\tilde{R}(t)$, а пульсаціям вітру $\tilde{u}(t)$ – процес $\tilde{r}(t)$. Для сумарної реакції споруди будемо мати (Рис.1)

$$\tilde{R}_\Sigma(t, \tau) = \tilde{R}(t) + \tilde{r}(\tau) = \tilde{R}(t) \left[1 + \frac{\tilde{r}(\tau)}{\tilde{R}(t)} \right], \quad (25)$$

Візьмемо до уваги, що середня реакція опори знаходить в лінійному зв'язку із процесом аеродинамічної сили $\tilde{F}(t)$, тобто $\tilde{R}(t) = \tilde{F}(t)\eta_{r,x}$, а процес динамічної реакції має нульове середнє та стандарт, який визначається виразом:

$$\sigma_{r,x}(z) = \eta_{r,x} \sigma_{f,x}(z) \sqrt{1+Z_g},$$

$$\tilde{\sigma}_{f,x}(t) = 2\tilde{F}_x(t) I_u(z); \quad (26)$$

де $\eta_{r,x}$ – коефіцієнти впливу для відповідного простору реакції r ; $I_u(z)$ – інтенсивність турбулентності; Z_g – коефіцієнт динамічної чутливості. Тоді формулу (25) зможемо переписати у вигляді (тут і далі опущений аргумент висоти z):

$$\tilde{R}_\Sigma(t, \tau) = \tilde{F}(t) \eta_{r,x} \times \left[1 + 2I_u \tilde{\gamma}_N(\tau) \sqrt{1 + Z_g} \right], \quad (27)$$

де $\tilde{\gamma}_N$ – нормальний випадковий процес з нульовим середнім і одиничним стандартом.

Випадковий процес аеродинамічної сили $\tilde{F}(t)$ можна представити як

$$\tilde{F}(t) = \tilde{w}(t) \Delta_F, \quad \Delta_F = \phi_w C_D A, \quad (28)$$

де ϕ_w – функція вертикального профілю швидкісного напору; C_D – коефіцієнт лобового опору; A – навітряна площа.

Підстановка (28) в (27) для сумарної реакції дозволяє записати

$$\tilde{R}_\Sigma(t, \tau) = \tilde{w}(t) \Delta_F \eta_{r,x} \times \left[1 + 2I_u \tilde{\gamma}_N(\tau) \sqrt{1 + Z_g} \right], \quad (29)$$

Припустимо, що динамічна складова реакції $\tilde{r}(\tau)$ може викликати відмову лише тоді, коли середня швидкість вітру $\tilde{U}(t)$ і реакція $\tilde{R}(t)$, досягають свого глобального максимуму на інтервалі часу T_{ef} , де T_{ef} – термін експлуатації висотної споруди (см. Рис.1).

Це допущення дозволяє замість випадкового процесу $\tilde{R}_\Sigma(t, \tau)$ розглядати лише його максимуми, приймаючи їх за випадкові величини, пов'язані частотно-часовими зв'язками із вихідними процесами:

$$\tilde{R}_{\Sigma, \max} = \tilde{w}_{\max} \Delta_F \eta_{r,x} \times \left[1 + 2I_u \tilde{\gamma}_{N, \max} \sqrt{1 + Z_g} \right]. \quad (30)$$

Максимуми \tilde{w}_{\max} випадкового процесу середнього швидкісного напору $\tilde{w}(t)$ та

процесу $\tilde{\gamma}_N(\tau)$, мають подвійний експоненціальний розподілу Гумбеля. Тому, очевидно, що закон розподілу максимумів реакції висотної споруди визначатиметься через добуток двох однаково розподілених випадкових величин із різними статистичними характеристиками.

Для простоти позначимо

$$\tilde{X} = \tilde{w}_{\max} \Delta_F \eta_{r,x}, \quad \tilde{Y} = 1 + 2I_u \tilde{\gamma}_{N, \max} \sqrt{1 + Z_g}. \quad (31)$$

На основі правила знаходження щільності розподілу двох незалежних випадкових величин [26] матимемо

$$f_{\Sigma, R}(R_{\Sigma, \max}) = \int_0^\infty \frac{1}{X} f_X(X) f_Y\left(\frac{R_{\Sigma, \max}}{X}\right) dX = \int_0^\infty \left\{ \alpha_{n,X} / X \exp[-\alpha_{n,X} (X - u_{n,X})] \times \exp\{-\exp[-\alpha_{n,X} (X - u_{n,X})]\} \times \alpha_{n,Y} \exp[-\alpha_{n,Y} (R_{\Sigma, \max} / X - u_{n,Y})] \times \exp\{-\exp[-\alpha_{n,Y} (R_{\Sigma, \max} / X - u_{n,Y})]\} \right\} dX.$$

Використаємо класичну для подвійного експоненціального розподілу підстановку Барричеллі [8]:

$$Z = \exp\left\{-\exp\left[-\alpha_{n,Y} \left(\frac{R_{\Sigma, \max}}{X} - u_{n,Y}\right)\right]\right\}. \quad (32)$$

Після ряду алгебраїчних перетворень для щільності $f_{\Sigma, R}$ запишемо

$$f_{\Sigma, R}(R_{\Sigma, \max}) = \int_{Z_0}^1 \left[\frac{\alpha_{n,X} \exp[-Q(Z)]}{u_{n,Y} - \ln[-\ln(Z)] / \alpha_{n,Y}} \times \exp\{-\exp[-Q(Z)]\} \right] dZ, \quad (33)$$

$$Q(Z) = \alpha_{n,X} \left(\frac{R_{\Sigma, \max}}{u_{n,Y} - \ln[-\ln(Z)] / \alpha_{n,Y}} - u_{n,X} \right),$$

$$Z_0 = \exp[-\exp(\alpha_{n,Y} u_{n,Y})].$$

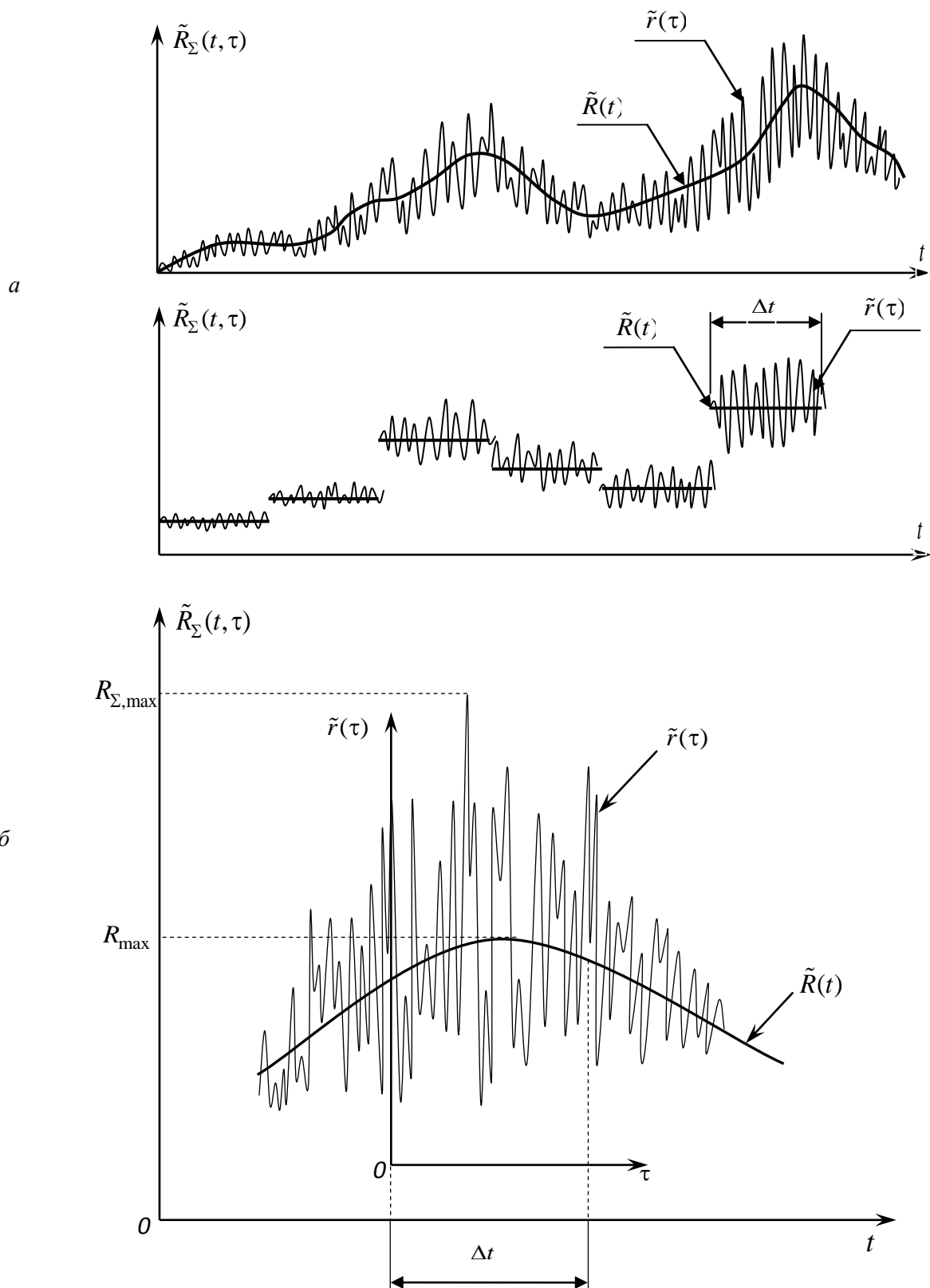


Рис.1. Розрахункова модель для максимумів процесів реакцій консолі:

a – схематизація випадкового процесу реакції; *б* – схематизація розподілу максимумів

Fig.1. The estimated model for maxima of the process reactions in the console:

б – schematization of a random process reaction; *б* – schematization of the distribution of maxima

Слід відмітити, що в строгій математичній постановці коефіцієнт динамічної чутливості Z_g у виразі (30) повинен також розглядатися як випадкова величина. Це обумовлюється його нелінійним зв'язком із середньою швидкістю вітру.

Проте проведені нами статистичні випробування виявили досить несуттєву мінливість виразу $\sqrt{1+Z_g}$.

Це в кінцевому рахунку дозволило рекомендувати визначати Z_g при значенні середньої швидкості вітру:

$$U_0 = \bar{U} (1 + \gamma_{0,U} V_U), \quad (34)$$

де $\gamma_{0,U}$ – характеристичний максимум випадкового процесу середньої швидкості вітру [19]; \bar{U} та V_U – стандарт та коефіцієнт варіації випадкового процесу $\tilde{U}(t)$.

Запишемо формулу (30) у більш зручній формі. Для цього дамо формульне визначення величинам $\alpha_{n,X}$, $u_{n,X}$ та $\alpha_{n,Y}$, $u_{n,Y}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{n,X} &= \frac{\lambda_{0,w}}{\hat{w} \Delta_F \eta_{r,x}}, \\ u_{n,X} &= \bar{w} \Delta_F \eta_{r,x} (1 + \gamma_{0,w} V_w), \quad (35) \\ \alpha_{n,Y} &= \frac{\gamma_{0,u}}{\zeta_g}, \\ u_{n,Y} &= 1 + \zeta_g \gamma_{0,u}, \\ \zeta_g &= 2I_u \sqrt{1+Z_g}, \quad (36) \end{aligned}$$

де $\gamma_{0,w}$ та $\lambda_{0,w}$ – характеристичний максимум та характеристична інтенсивність випадкового процесу середнього швидкісного напору $\tilde{w}(t)$, які визначаються за формулами (12) та (13) при $n_e = n_{e,w}$; $\gamma_{0,u}$ – характеристичний максимум випадкових процесів реакцій споруди:

$$\gamma_{0,u} = \sqrt{2 \ln \left[n_{x,1} \Delta t Z_g / (1 + Z_g) \right]}. \quad (37)$$

Підставляючи (35) і (36) у вираз (33), остаточно матимемо (формула 38):

$$\begin{aligned} f_{\Sigma,R}(R_{\Sigma,\max}) &= \int_0^1 \frac{\alpha_{n,X} \exp[-Q(Z)]}{1 + \zeta_g \left(\gamma_{0,u} - \frac{\ln[-\ln(Z)]}{\gamma_{0,u}} \right)} \times \\ &\times \exp\{-\exp[-Q(Z)]\} dZ, \\ Q(Z) &= \alpha_{n,X} \left(\frac{\alpha_{n,X} R_{\Sigma,\max}}{1 + \zeta_g \left(\gamma_{0,u} - \ln[-\ln(Z)] / \gamma_{0,u} \right)} - \right. \\ &\left. - \lambda_{0,w} \left(\gamma_{0,w} + V_w^{-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Нижню межу інтегрування прийнято рівною нулю за рахунок того, що добуток $\alpha_{n,Y} u_{n,Y}$, або, що таке саме, $\gamma_{0,u} \left(\gamma_{0,u} + \frac{1}{\zeta_g} \right)$ при будь-яких вихідних даних не набуває значень менших дев'яти; звідси слідує наближення $Z_0 \approx 0$.

Для знаходження інтегральної функції розподілу максимумів випадкової величини $\tilde{R}_{\Sigma,\max}$ залучимо метод умовних ймовірностей [18], згідно якого

$$F_{\Sigma,R}(R_{\Sigma,\max}) = \int_0^{\infty} F_X \left(\frac{R_{\Sigma,\max}}{Y} \right) f_Y(Y) dY, \quad (38)$$

де F_X – інтегральна функція розподілу випадкової величини \tilde{X} .

Підставивши формульне визначення функцій F_X , f_Y і скориставшись підстановкою Барричеллі, отримаємо

$$F_{\Sigma,R}(R_{\Sigma,\max}) = \int_0^1 \exp\{-\exp[-Q(Z)]\} dZ. \quad (39)$$

Формули (38), (39) однозначно вирішують задачу стосовно розподілу максимумів випадкового процесу $\tilde{R}_{\Sigma}(t, \tau)$ реакції споруди, викликаною дією обох складових вітрового потоку. Проте, не зважаючи на лаконічну форму записів цих формул, безпосереднє застосування їх на практиці вимагає

залучення процедури чисельного інтегрування, що з точки зору інженерного підходу є незручним. У зв'язку з цим були виконані пошуки аналітичної альтернативи для функцій $f_{\Sigma,R}$ і $F_{\Sigma,R}$. Дивлячись на структуру виразу (39), логічно припустити, що подвійний експоненціальний розподіл повинен достатньо точно відповідати вихідній функції. Для перевірки цього знайдемо статистичні характеристики максимумів реакції $\tilde{R}_{\Sigma,\max}$, вираженої добутком двох випадкових величин $\tilde{X} \tilde{Y}$ [20]:

$$\bar{R}_{\Sigma,\max} = \bar{X} \bar{Y} = \bar{R} \Phi_1 \Phi_2, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\Sigma,\max} &= \sqrt{\hat{X}^2 \hat{Y}^2 + \bar{X}^2 \hat{Y}^2 + \bar{Y}^2 \hat{X}^2} = \\ &= \frac{\hat{R} \pi}{\lambda_{0,w} \sqrt{6}} \sqrt{\frac{\zeta_g^2}{\gamma_{0,u}^2 V_w^2}} \times \\ &\times \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{6V_w^2} + \Phi_1^2 \lambda_{0,w}^2 \right) + \Phi_2^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

де \bar{R} та \hat{R} – математичне очікування і стандарт статичної реакції споруди; Φ_1 та Φ_2 – безрозмірні коефіцієнти, які враховують частотну часову структуру обох складових вітрового потоку та динамічні властивості споруди:

$$\Phi_1 = 1 + V_w (\gamma_{0,w} + C_{Ei} / \lambda_{0,w}), \quad (42)$$

$$\Phi_2 = 1 + \zeta_g (\gamma_{0,u} + C_{Ei} / \gamma_{0,u}). \quad (43)$$

Для інтегральної функції розподілу максимумів реакції споруди матимемо загальний вираз подвійного експоненціального закону

$$F_{\Sigma,R}(R_{\Sigma,\max}) = \exp\{-\exp[-\alpha_{n,R} \times (R_{\Sigma,\max} - u_{n,R})]\}, \quad (44)$$

де параметри розподілу

$$\begin{aligned} \alpha_{n,R} &= \pi / (\sqrt{6} \hat{R}_{\Sigma,\max}), \\ u_{n,R} &= \bar{R}_{\Sigma,\max} - 0,45 \hat{R}_{\Sigma,\max}. \end{aligned}$$

Обчислення функцій $F_{\Sigma,R}$ за формулами (39) та (43) при варіюванні геометричних параметрів споруди та вітрового режиму місцевості показали, що відмінність в результатах не перевищує 1,5%. З огляду на це, можна з повною впевненістю рекомендувати формулу (43), у поєднанні із (40) і (41), для безпосереднього практичного застосування.

РЕЗУЛЬТАТИ

Для конкретизації отриманих залежностей розглянемо практичний розрахунок показників надійності висотної споруди у просторі переміщень. Для полегшення розрахункову схему представимо системою з одним ступенем вільності у вигляді стрижня висотою $H = 50$ м, поперечний переріз якого виконаний трубчастим, зовнішнім діаметром $D_b = 80$ см та товщиною стінки $t_b = 16$ мм. На верхівці стрижня розташована зосереджена маса $m = 500$ кг, навітряною площею $A_m = 10$ м² із коефіцієнтом лобового опору $C_D = 2,0$ Місце розташування – м. Полтава ($V_w = 1,6$, $\bar{w} = 12$ Па) у відкритій місцевості. Термін експлуатації прийнято $T_{ef} = 20$ років.

Згинальна жорсткість консолі складає $EJ_x = 639 \cdot 10^3$ кНм², що відповідає частоті основного тону коливань:

$$\begin{aligned} n_{x,1} &= (1/2\pi) \sqrt{3EI / (m H^3)} = \\ &= (1/2\pi) \sqrt{3 \cdot 639 \cdot 10^3 / (5 \cdot 50^3)} = 0,881 \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Характеристичний максимум та характеристична інтенсивність випадкових процесів середньої швидкості вітру та швидкісного напору визначаються за формулами (12) і (13) із використанням співвідношень (24)

$$\begin{aligned} \gamma_{0,U} &= 6,797; & \lambda_{0,U} &= 1,533; \\ \gamma_{0,w} &= 12,554; & \lambda_{0,w} &= 0,462. \end{aligned}$$

Коефіцієнт динамічної чутливості споруди при середній швидкості вітру, що відповідає рівню $\gamma_{0,U}$, тобто, м/с:

$$\begin{aligned}\xi_u &= 7,788, \\ S_{u,ref}(n_{x,1}, H) &= 0,04 \text{ сек.}, \\ Z_g &= 1,156.\end{aligned}$$

Характеристичний максимум динамічної реакції споруди за виразом (37)

$$\gamma_{0,u} = \sqrt{2 \ln \left[\frac{0,881 \cdot 600 \cdot 1,156}{1 + 1,156} \right]} = 3,361.$$

Коефіцієнт ζ_g за формулою (36)

$$\zeta_g = 2 \cdot 0,12 \cdot \sqrt{1 + 1,156} = 0,351.$$

Математичне сподівання \bar{R} і стандарт \hat{R} статичної реакції споруди

$$\Delta_F = \phi_w(H) C_D A = 1,621 \cdot 2,0 \cdot 10 = 32,42, \text{ м}^2,$$

$$\begin{aligned}\eta_{d,x} &= \frac{1}{m (2\pi n_{x,1})^2} = \\ &= \frac{1}{5 (2 \cdot 3,14 \cdot 0,881)^2} = 65,2 \text{ мм/кН}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \bar{w} \Delta_F \eta_{r,x} = 12 \cdot 65,2 \cdot 32,42 \cdot 10^{-3} = \\ &= 25,37 \text{ мм}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \bar{w} V_w \Delta_F \eta_{r,x} = \\ &= 12 \cdot 1,6 \cdot 65,2 \cdot 32,42 \cdot 10^{-3} = 40,6 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Коефіцієнти сумісної дії вітрового потоку, за формулами (42) та (43):

$$\Phi_1 = 1 + 1,6 \left(12,554 + \frac{0,577}{0,462} \right) = 23,085,$$

$$\Phi_2 = 1 + 0,351 \left(3,361 + \frac{0,577}{3,361} \right) = 2,240.$$

Математичне сподівання $\bar{R}_{\Sigma, \max}$ і стандарт $\hat{R}_{\Sigma, \max}$ реакції споруди з урахуванням дії обох складових вітрового потоку:

$$\bar{R}_{\Sigma, \max} = 1311 \text{ мм}, \hat{R}_{\Sigma, \max} = 265 \text{ мм}.$$

Параметри розподілу Гумбеля

$$\alpha_{n,R} = 4,85 \cdot 10^{-3} \text{ 1/мм};$$

$$u_{n,R} = 1192 \text{ мм}.$$

За формулою (44) при

$$R_{\Sigma, \max} = \frac{H}{100} = 500 \text{ мм} \text{ остаточно отримаємо}$$

ймовірність неперевищення даного рівня протягом $T_{ef} = 20$ років:

$$F(T_{ef}) = F_{\Sigma, R} = \exp\{-\exp[-4,85 \cdot 10^{-3} \times (500 - 1192)]\} = 3,75 \cdot 10^{-13}.$$

Тобто стрижень із даним поперечним перерізом можна вважати абсолютно ненадійним. Збільшивши поперечний переріз до $D_b = 100$ см, матимемо ймовірність безвідмовної роботи $F(T_{ef}) = 0,087$, а при $D_b = 120$ см – $F(T_{ef}) = 0,946$.

Якщо запроєктувати суцільностінчастий стрижень без урахування стохастичної мінливості середнього вітру на розрахункове значення $\gamma_{0,U} \hat{U} + \bar{U} = 21,74$ м/с (саме із таких міркувань виконано нормування середнього швидкісного напору у ДБН [21]), то імовірність безвідмовної роботи стрижня для $D_b = 120$ см складатиме при індексі безпеки $\beta_{d,x} = 5,524$ – $F(T_{ef}) = 0,99989$, а якщо запроєктувати без урахування пульсацій швидкісного напору – $F(T_{ef}) = 0,999991$, тобто показники надійності будуть занадто переоцінені.

ВИСНОВКИ

1. Методологія оцінки статистичних характеристик максимумів випадкових процесів має багато пропозицій, проте їх застосування ускладнюється внаслідок складності математичного апарату і об'єму обчислювальних процедур. Інноваційний підхід у визначенні показників надійності висотних споруд будь-якого типу [22] полягає у застосуванні наближеного методу, модель

якого стосовно максимумів середньої швидкості вітру та швидкісного напору задекларована в даній статті. Її застосування дозволяє значно спростити обчислювальний процес із забезпеченням достатньої точності розрахунку.

2. Розгляд вітрового потоку у формі двох стаціонарних випадкових процесів робить за необхідне розглядати реакцію споруд також через синтез двох випадкових складових. Запропонована методика сполучення двох складових вітрового впливу з отриманням простих виразів для знаходження статистичних характеристик максимумів реакції.

3. Чисельні розрахунки показали доцільність використання отриманих аналітичних виразів для інтегральної функції розподілу максимумів реакції споруди та можливість їх безпосереднього практичного застосування при встановленні показників надійності висотних споруд.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Bilyk S., 2016.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data. Underwater technologies. Industrial and civil engineering, Vol.04, 89-96.
2. **Van der Hoven, 1956.** Power Spectrum of Horizontal Wind Speed in the Frequency Range From 0.0007 to 900 Cycles per Hour. Journal of Meteorology, Nr.14, 160-164.
3. **Liepmann H.W., 1952.** On the Application of Statistical Concepts to the Buffeting Problem. Aerodynamics Science, Nr.19, 793-822.
4. **Solari G., 1986.** 3-D Response of Buildings to Wind Action. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Nr.23, 379-393.
5. **Kasperski M., Niemann H., 1992.** The L.R.C. (Load Response-Correlation) Method a General Method for Estimating Unfavorable Wind Load Distributions for Linear and Non-linear structural behavior. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Nr.41-44, 1753-1763.
6. **Holmes J.D., 1994.** Along-Wind Response of Lattice Towers: Part I – Derivation of Expressions for Gust Response Factors. Engineering Structures, Vol.16, 287-292.
7. **Махінько А.В., 2006.** Надійність елементів металоконструкцій під дією випадкових

змінних навантажень. Розширений автореферат канд. дисертації. Полтава, ПолтНТУ, 24.

8. **Гумбель Э., 1965.** Статистика экстремальных значений. Москва, Мир, 450.
9. **Болотин В.В., 1971.** Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. Москва, Стройиздат, 255.
10. **Болотин В.В., 1965.** Статистические методы в строительной механике Москва, Стройиздат, 279.
11. **Лидбеттер М., Линдгрэн Г., Росен Х., 1989.** Экстремумы случайных последовательностей и процессов. Москва, Мир, 392.
12. **Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф., 1988.** Вероятностные методы в строительном проектировании. Москва, 584.
13. **Пашинський В.А., 1999.** Методологія нормування навантажень на будівельні конструкції. Розширений автореферат докторської дисертації. Полтава, ПДТУ, 33.
14. **Пичугин С.Ф., 2009.** Надёжность стальных конструкций производственных зданий. Полтава, АСМИ, 459.
15. **Райзер В.Д., 1998.** Теория надежности в строительном проектировании. Москва, Россия, Ассоциация строит. вузов, 304.
16. **Cornell C.A., 2001.** A First-Order Reliability Theory for Structural Design. Solid Mechanics Division. Ontario, Canada, University of Waterloo, 56-64.
17. **Пичугин С.Ф., 1994.** Надёжность стальных конструкций производственных зданий. Дисс... д.т.н., Киев, 489.
18. **Вентцель Е.С., 2001.** Теория вероятностей. Москва, Россия, Высш. школа, 575.
19. **Махінько А.В., 2012.** Імовірнісний розрахунок баштових опор зв'язку. Полтава, Україна, Норд Комп'ютер, 409.
20. **Жлуктенко В.І., 2000.** Теорія ймовірностей і математична статистика. Київ, Україна, КНЕУ, 304.
21. **Система** забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Навантаження і впливи. Норми проектування, 2006. ДБН В.1.2-2:2006 від 1 січня 2007. Київ, Сталь, 120.
22. **Сукач М., 2016.** Друга міжнародна науково-практична конференція Підводні технології. Підводні технології, Вип.04, 4-15.

REFERENCES

1. **Bilyk S., 2016.** Determination of critical load of elastic steel column based on experimental data.

- Underwater technologies. Industrial and civil engineering, Vol.04, 89-96.
2. **Van der Hoven, 1956.** Power Spectrum of Horizontal Wind Speed in the Frequency Range From 0.0007 to 900 Cycles per Hour. Journal of Meteorology, Nr.14, 160-164.
 3. **Liepmann H.W., 1952.** On the Application of Statistical Concepts to the Buffeting Problem. Aerodynamics Science, Nr.19, 793-822.
 4. **Solari G., 1986.** 3-D Response of Buildings to Wind Action. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Nr.23, 379-393.
 5. **Kasperski M., Niemann H., 1992.** The L.R.C. (Load Response-Correlation) Method a General Method for Estimating Unfavorable Wind Load Distributions for Linear and Non-linear structural behavior. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Nr.41-44, 1753-1763.
 6. **Holmes J.D., 1994.** Along-Wind Response of Lattice Towers: Part I – Derivation of Expressions for Gust Response Factors. Engineering Structures, Vol.16, 287-292.
 7. **Makhinko A.V., 2006.** Nadijnist' elementiv metalokonstrukcij pid dieju vipadkovih zmynnih navantazhen' Rozshirenij avtoreferat kandidats'koї disertacii. Poltava, PoltNTU, 24 (in Ukrainian).
 8. **Gumbel Je, 1965.** Statistika jekstremal'nyh znachenij. Moskva, Mir, 450 (in Russian).
 9. **Bolotin V.V., 1971.** Primenenie metodov teorii veroyatnostej i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzhenij. Moskva, Strojizdat, 255 (in Russian).
 10. **Bolotin V.V., 1965.** Statisticheskie metody v stroitel'noj mehanike Moskva, Strojizdat, 279 (in Russian).
 11. **Lidbetter M., Lindgren G., Rosen, H., 1989.** Jekstremumy sluchajnyh posledovatel'nostej i processov. Moskva, Mir, 392 (in Russian).
 12. **Augusti G., Baratta A., Kashiati F., 1988.** Veroyatnostnye metody v stroitel'nom proektirovanii. Moskva, 584 (in Russian).
 13. **Pashinskij V.A., 1999.** Metodologija normuvannja navantazhen' na budivel'ni konstrukcii. Rozshirenij avtoreferat doktorskoj disertacij, Poltava, PDTU, 33 (in Russian).
 14. **Pichugin S.F., 2009.** Nadjozhnost stalnyh konstrukcij proizvodstvennyh zdaniy. Poltava, ASMI, 459 (in Russian).
 15. **Rajzer V.D., 1998.** Teorija nadezhnosti v stroitel'nom proektirovanii. Moskva, Asociacija stroitel'nyh vuzov, 304 (in Russian).
 16. **Cornell C.A., 2001.** A First-Order Reliability Theory for Structural Design. Solid Mechanics Division. Ontario, Canada, University of Waterloo, 56-64.
 17. **Pichugin S.F., 1994.** Nadezhnost stalnyh konstrukcij proizvodstvennyh zdaniy. Diss... d.t.n. Kiev, KGTUSA, 489 (in Russian).
 18. **Ventcel E.S., 2001.** Teorija veroyatnostej. Moskva, Rossija, Vysshaja shkola, 575 (in Russian).
 19. **Makhinko A.V., 2012.** Imovirnisnij rozrahunok bashtovih opor zv'jazku. Poltava, Ukraina, Nord Kompjuter, 409 (in Russian).
 20. **Zhluktenko V.I., 2000.** Teorija jmovirnostej i matematichna statistika. Kyiv, Ukraina, KNEU, 304 (in Russian).
 21. **Sistema zabezpechennja nadijnosti ta bezpeki budivel'nih ob'ektiv. Navantazhennja i vplivi. Normi proektuvannja, 2006.** DBN V.1.2-2:2006 vid 1 sichnja 2007. Kyiv, Stal', 120 (in Russian).
 22. **Sukach M., 2016.** Druga mizhnarodna naukovo-praktichna konferencija Pidvodni tehnologii. Pidvodni tehnologii, Vyp.04, 4-15 (in Russian).

Probabilistic design of high-rise buildings with two stochastic components of wind velocity

Anton Makhinko, Nataliya Makhinko

Summary. This paper proposes a consistent method for the stochastic analysis of high-rise building under along-wind aerodynamic actions. Stochastic actions are related to spatial-temporal changeability of wind velocity and spatial dependence of aerodynamic coefficient. Instantaneous stochastic wind velocity is given by the sum of a macro-meteorological component, defined as the stochastic mean wind velocity on average time interval, and a micro-meteorological component, defined as the stochastic atmospheric longitudinal turbulence. The probabilistic design of high-rise buildings is carried out with the account of stochastic properties of structure material. Consecutive statement illustrates the simplicity and precision of this method. Because of this simplicity and precision, the method is suitable for use in design offices as a means of providing rapid estimates of the stochastic dynamic response and reliability estimation of the high-rise buildings.

Key words. The wind velocity stochastic process, gust factor, characteristic intensity, frequency characteristics.