Сохранение тензора энергии-импульса при конформных отображениях

Е. В. Черевко

Аннотация В статье рассмотрены конформные отображения с условием сохранения тензора энергии-импульса. Получены диффференциальные уравнения таких отображений. Исследованы условия интегрируемости этих уравнений. Найдены другие инварианты таких отображений, доказана инвариантность в этом случае тензоров Римана и Риччи.

Ключевые слова Конформные отображения · Условия интегрируемости · Тензор энергии-импульса

УДК 514.822

1 Вступление

Отображения с сохранением различных геометрических объектов изучались в работах [10], [2], [6], [7], в частности, тензора энергии-импульса в [5]. Цель настоящей статьи — дальнейшее изучение конформных отображений, оставляющих инвариантным тензор энергии-импульса. Особый интерес к последним вызван тем, что при конформных отображениях всегда сохраняется алгебраический тип пространства-времени, согласно классификации Петрова [8].

2 Предварительные сведения

Определение 1 *Римановы пространства* (V_n, g) *и* $(\overline{V}_n, \overline{g})$ *находятся в конформном соответствии, если их метрики связаны соотношением:*

$$\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{ij}(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ – некоторый инвариант.

При этом для для объектов связности Γ_{ij}^k и $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ конформно соответствующих пространств (V_n, g) и $(\overline{V}_n, \overline{g})$ выполняется:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k\varphi_j + \delta_j^k\varphi_i - \varphi^k g_{ij} \tag{2}$$

Инвариант φ должен удолетворять системе дифференциальных уравнений[1]:

$$\nabla_j\varphi_i = \varphi_i\varphi_j - \frac{1}{2}g_{ij}\Delta_1\varphi + \frac{1}{n-2}\left(\overline{R}_{ij} - \frac{\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2(n-1)}\right) - \frac{1}{n-2}\left(R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)}\right) \tag{3}$$

Здесь $\varphi_i = \partial_i\varphi$, $\Delta_1\varphi = \varphi_i\varphi_j g^{ij}$. Далее, $R_{ij} = R_{ij\alpha}^{\alpha}$ и $\overline{R}_{ij} = \overline{R}_{ij\alpha}^{\alpha}$, — соответственно тензоры Риччи пространств V_n и $\overline{V}_n$, а $R = R_{ij}g^{ij}$ и $\overline{R} = \overline{R}_{ij}\overline{g}^{ij}$- их скалярные кривизны. Следуя [3] и [4], дифференцируем ковариантно (3) по x^k в связности Γ пространства (V_n, g):

$$\begin{aligned}\nabla_k\nabla_j\varphi_i = {} & \nabla_k\varphi_i\varphi_j + \varphi_i\nabla_k\varphi_j - g_{ij}g^{\alpha\beta}\nabla_k\varphi_\alpha\varphi_\beta + \\ & + \frac{1}{n-2}\left(\nabla_k\overline{R}_{ij} - \frac{\varphi_k\overline{R}g_{ij}e^{2\varphi}}{n-1} - \frac{\partial_k\overline{R}g_{ij}e^{2\varphi}}{2(n-1)}\right) - \\ & - \frac{1}{n-2}\left(\nabla_k R_{ij} - \frac{\varphi_k Rg_{ij}e^{2\varphi}}{n-1} - \frac{\partial_k Rg_{ij}e^{2\varphi}}{2(n-1)}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

Учитываем, что $\nabla_k\overline{R}_{ij} = \overline{\nabla}_k\overline{R}_{ij} + P_{ki}^{\alpha}\overline{R}_{\alpha j} + P_{kj}^{\alpha}\overline{R}_{i\alpha}$, где
$P_{ij}^k = \delta_i^k\varphi_j + \delta_j^k\varphi_i - \varphi^k g_{ij}$, а отсюда

$$\nabla_k\overline{R}_{ij} = \overline{\nabla}_k\overline{R}_{ij} + \varphi_k\overline{R}_{ij} + \varphi_i\overline{R}_{jk} - \varphi^\alpha\overline{R}_{\alpha j}g_{ik} + \varphi_k\overline{R}_{ij} + \varphi_j\overline{R}_{ik} - \varphi^\alpha\overline{R}_{\alpha i}g_{jk}.$$

Символами ∇ и $\overline{\nabla}$ мы обозначаем ковариантные производные соответственно в связностях Γ и $\overline{\Gamma}$. Альтернируя (4) по k, j, используя тождество Риччи

$$\nabla_k\nabla_j\varphi_i - \nabla_j\nabla_k\varphi_i = \varphi_\alpha R_{ijk}^{\alpha} \tag{5}$$

после приведения подобных, получаем:

$$(n-3)\varphi_\alpha C_{ijk}^{\alpha} = \overline{\nabla}_\alpha C_{ijk}^{\alpha} - \nabla_\alpha C_{ijk}^{\alpha}. \tag{6}$$

Здесь C_{ijk}^h - тензор Вейля конформной кривизны:

$$\begin{aligned}C_{ijk}^h \overset{\text{def}}{=} {} & R_{ijk}^h + \frac{1}{n-2}\left(\delta_j^h R_{ik} - \delta_k^h R_{ij} + g_{ik}R_j^h - g_{ij}R_k^h\right) + \\ & + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}\right),\end{aligned} \tag{7}$$

а $\nabla_\alpha C^\alpha_{ijk}$ и $\overline{\nabla}_\alpha C^\alpha_{ijk}$- соответственно дивергенции тензора Вейля в связностях $\mathit{\Gamma}$ и $\overline{\mathit{\Gamma}}$:

$$\nabla_\alpha C^\alpha_{ijk} = \frac{n-3}{n-2}\left(\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} + \frac{1}{2(n-1)}\left(\nabla_k R g_{ik} - \nabla_j R g_{ij}\right)\right) \tag{8}$$

$$\overline{\nabla}_\alpha C^\alpha_{ijk} = \frac{n-3}{n-2}\left(\overline{\nabla}_k \overline{R}_{ij} - \overline{\nabla}_j \overline{R}_{ik} + \frac{1}{2(n-1)}\left(\overline{\nabla}_k \overline{R}\overline{g}_{ik} - \overline{\nabla}_j \overline{R}\overline{g}_{ij}\right)\right)$$

Уравнения (6) представляют собой условия интегрируемости системы (3). Таким образом, справедлива

Теорема 1 *Если (V_n, g) и $(\overline{V}_n, \overline{g})$, $(n > 3)$ находятся в конформном соответствии, то инвариант φ и дивергенции тензора конформной кривизны в связностях, согласованных с метриками этих пространств, должны удовлетворять условию*

$$(n-3)\varphi_\alpha C^\alpha_{ijk} = \overline{\nabla}_\alpha C^\alpha_{ijk} - \nabla_\alpha C^\alpha_{ijk}.$$

□

Будем называть правую часть (6)

$$D_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\nabla}_\alpha C^\alpha_{ijk} - \nabla_\alpha C^\alpha_{ijk}$$

конформной деформацией дивергенции тензора Вейля. Свернем (5) с $\varphi^i = g^{i\alpha}\nabla_\alpha\varphi$.

$$\varphi^i\left(\overline{\nabla}_\alpha C^\alpha_{ijk} - \nabla_\alpha C^\alpha_{ijk}\right) = (n-3)\varphi^i\varphi_\alpha C^\alpha_{ijk}. \tag{9}$$

В силу свойств тензора Вейля правая часть равна нулю. Таким образом, получаем:

Следствие 1 *Если (V_n, g) и $(\overline{V}_n, \overline{g})$, $(n > 3)$ находятся в конформном соответствии, то конформная деформация дивергенции тензора Вейля обладает следующим свойством:*

$$\varphi^i D_{ijk} = \varphi^i\left(\overline{\nabla}_\alpha C^\alpha_{ijk} - \nabla_\alpha C^\alpha_{ijk}\right) = 0.$$

□

3 Условия инвариантности тензора энергии-импульса при конформных отображениях

Известно ([9], [12]), что поля тяготения в пространстве (V_n, g) описываются уравнениями Эйнштейна:

$$R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} = -\frac{8\pi k}{c^4} T_{ij}.$$

Здесь символом T_{ij} обозначен дважды ковариантний тензор энергии-импульса, c — скорость света в вакууме, и k - гравитационная константа. Можно выбрать такую систему единиц, в которой это уравнение имеет вид:

$$R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} = -T_{ij}. \tag{10}$$

Кроме того, заметим, что в дальнейшем, будем считать размерность изучаемых пространств $n > 3$. Мы исследуем преобразования тензора энергии-импульса при конформных отображениях пространств $(V_n, g) \to (\overline{V}_n, \overline{g})$. Подобным образом, в работах ([6], [7]) изучаются отображения, относительно которых тензор Эйнштейна

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{n}$$

остается инвариантным. Целью же нашего изучения является, собственно, тензор

$$S_{ij} = -T_{ij} = R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2},$$

который в некоторых классических источниках, например в [11], также именуется тензором Эйнштейна.

Исходя из (10), деформацию тензора энергии-импульса можна записать как:

$$\overline{T}_{ij} - T_{ij} = R_{ij} - \frac{Rg_{ij}}{2} - \overline{R}_{ij} + \frac{\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2}. \tag{11}$$

Принимая во внимание требование сохранения, т. е. $\overline{T}_{ij} = T_{ij}$ из (11) имеем:

$$\overline{R}_{ij} - R_{ij} = \frac{\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2} - \frac{Rg_{ij}}{2}. \tag{12}$$

Запишем (3) с учетом (12):

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi + \frac{\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2(n-1)} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)} \tag{13}$$

Дифференцируем ковариантно (13) по x^k в связности Γ пространства (V_n, g):

$$\begin{aligned}\nabla_k\nabla_j\varphi_i =&\nabla_k\varphi_i\varphi_j + \varphi_i\nabla_k\varphi_j - \varphi_m g^{ml}\nabla_k\varphi_l g_{ij} + \frac{\partial_k\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2(n-1)} + \frac{\varphi_k\overline{R}\overline{g}_{ij}}{n-1} - \frac{\partial_k R g_{ij}}{2(n-1)} =\\ &= \left(\varphi_i\varphi_k - \frac{1}{2}g_{ik}\Delta_1\varphi + \frac{\overline{R}\overline{g}_{ik}}{2(n-1)} - \frac{Rg_{ik}}{2(n-1)}\right)\varphi_j + \varphi_i\nabla_k\varphi_j -\\ &- \varphi_m g^{ml}\left(\varphi_l\varphi_k - \frac{1}{2}g_{lk}\Delta_1\varphi + \frac{\overline{R}\overline{g}_{lk}}{2(n-1)} - \frac{Rg_{lk}}{2(n-1)}\right)g_{ij} +\\ &+ \frac{\partial_k\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2(n-1)} + \frac{\varphi_k\overline{R}\overline{g}_{ij}}{n-1} - \frac{\partial_k R g_{ij}}{2(n-1)} = \varphi_i\varphi_k\varphi_j - \frac{1}{2}g_{ik}\Delta_1\varphi\varphi_j +\\ &+ \frac{\varphi_j\overline{R}\overline{g}_{ik}}{2(n-1)} - \frac{\varphi_j R g_{ik}}{2(n-1)} + \varphi_i\nabla_k\varphi_j - \frac{1}{2}g_{ij}\Delta_1\varphi\varphi_k + \frac{\varphi_k\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2(n-1)} +\\ &+ \frac{\varphi_k R g_{ij}}{2(n-1)} + \frac{\partial_k\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2(n-1)} - \frac{\partial_k R g_{ij}}{2(n-1)}\end{aligned} \tag{14}$$

Альтернируя (14) по j и k, применив тождество Риччи (5), получаем:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = \frac{1}{n-1}(\frac{1}{2}\partial_k\overline{R}\overline{g}_{ij} - \frac{1}{2}\partial_j\overline{R}\overline{g}_{ik} - \frac{1}{2}\partial_k R g_{ij} + \frac{1}{2}\partial_j R g_{ik} + R(\varphi_k g_{ij} - \varphi_j g_{ik})). \tag{15}$$

Условие (16) можна записать иначе:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} - \varphi_\alpha\frac{R}{n-1}(\delta^\alpha_k g_{ij} - \delta^\alpha_j g_{ik}) = \frac{1}{2(n-1)}(\partial_k\overline{R}\overline{g}_{ij} - \partial_j\overline{R}\overline{g}_{ik} - \partial_k R g_{ij} + \partial_j R g_{ik}),$$

или:

$$\varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk} = \frac{1}{2(n-1)}(\partial_k\overline{R}\overline{g}_{ij} - \partial_j\overline{R}\overline{g}_{ik} - \partial_k R g_{ij} + \partial_j R g_{ik}), \tag{16}$$

где

$$Z^h_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} R^h_{ijk} - \frac{R}{n-1}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}). \tag{17}$$

Известно, что если пространства (V_n, g) и $(\overline{V}_n, \overline{g})$, $(n > 3)$ находятся в конформном соответствии, их тензоры кривизны связаны следующим образом [1], [3]:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k\varphi_{ij} - \delta^h_j\varphi_{ik} + g^{hl}(\varphi_{lk}g_{ij} - \varphi_{lj}g_{ik}) + (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})\Delta_1\varphi, \tag{18}$$

где $\varphi_{ij} = \nabla_j\varphi_i - \varphi_i\varphi_j$. Из (13) можно вразить φ_{ij}:

$$\varphi_{ij} = -\frac{1}{2}g_{ij}\Delta_1\varphi + \frac{\overline{R}\overline{g}_{ij}}{2(n-1)} - \frac{Rg_{ij}}{2(n-1)},$$

и подставить в (18). Группируя слагаемые, соответствующие объектам пространства $\overline{V}_n$ справа, а соответствующие V_n слева, получаем:

$$\overline{Z}^h_{ijk} = Z^h_{ijk},$$

где Z^h_{ijk} определен в (17). Таким образом, получена следующая

Теорема 2 *Если* (V_n, g) *и* $(\overline{V}_n, \overline{g})$, $(n > 3)$ *находятся в конформном соответствии, так, что тензор энергии-импульса сохраняется при отображении, должно выполняться условие:*

$$\varphi_\alpha Z^\alpha_{ijk} = \frac{1}{2(n-1)}(\partial_k \overline{R}\overline{g}_{ij} - \partial_j \overline{R}\overline{g}_{ik} - \partial_k R g_{ij} + \partial_j R g_{ik}),$$

причем, тензор

$$Z^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{R}{n-1}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik})$$

является также инвариантным. □

Мы покажем, что требование инвариантности тензора энергии-импульса требует выполнения более сильных условий. Свернем тензор Z^h_{ijk} по индексам h и k:

$$Z^\alpha_{ij\alpha} = R^\alpha_{ij\alpha} - \frac{R}{n-1}(\delta^\alpha_\alpha g_{ij} - \delta^\alpha_j g_{i\alpha}) = R_{ij} - R g_{ij}$$

Очевидно, что полученная свертка $Z^\alpha_{ij\alpha} = R_{ij} - R g_{ij}$ также должна быть инвариантна при конформных отображениях. Отсюда получаем, что тензор Риччи R_{ij} также будет в этом случае сохраняться, поскольку, линейная комбинация инвариантов с постоянными коэффициентами, также будет инвариантна:

$$R_{ij} = -2T_{ij} - Z^\alpha_{ij\alpha} = 2R_{ij} - R g_{ij} - R_{ij} + R g_{ij}.$$

Аналогично можно показать инвариантность произведения $R g_{ij}$. Таким образом, система уравнений (13) приобретает вид:

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi. \tag{19}$$

Дифференцируем ковариантно (19) по x^k в связности Γ пространства (V_n, g):

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_j \varphi_i =& \nabla_k \varphi_i \varphi_j + \varphi_i \nabla_k \varphi_j - \varphi_m g^{ml} \nabla_k \varphi_l g_{ij} = \\ &= \left(\varphi_i \varphi_k - \frac{1}{2} g_{ik} \Delta_1 \varphi\right) \varphi_j + \varphi_i \nabla_k \varphi_j - \varphi_m g^{ml} \left(\varphi_l \varphi_k - \frac{1}{2} g_{lk} \Delta_1 \varphi\right) g_{ij} = \\ &= \varphi_i \varphi_k \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ik} \Delta_1 \varphi \varphi_j + \varphi_i \nabla_k \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi \varphi_k.\end{aligned} \tag{20}$$

Альтернируя (20) по j и k, применив тождество Риччи (5), получаем:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0. \tag{21}$$

Из (19) можно выразить φ_{ij}:

$$\varphi_{ij} = \nabla_j \varphi_i - \varphi_i \varphi_j = -\frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi,$$

и подставить в (18).Приводя подобные, получаем:

$$\overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk},$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 3 *Если* (V_n, g) *и* $(\overline{V}_n, \overline{g})$, $(n > 3)$ *находятся в конформном соответствии, так, что тензор энергии-импульса сохраняется при отображении, инвариант* φ*, порождающий отображение должен довлетворять системе дифференциальных уравнений:*

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi,$$

условия интегрируемости которой имеют вид:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0.$$

При этом, тензор Римана R^h_{ijk}*, тензор Риччи* R_{ij}*, произведение* Rg_{ij} *также являются инвариантными.* □

Заметим, некоторые из приведенных результатов были частично получены в [5], а именно, аналоги (19) и (21).

Полученные результаты обобщим следующим образом. Назовем тензор

$$\mathfrak{E}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij} - \kappa R g_{ij}. \tag{22}$$

обобщенным тензором Эйнштейна. Повторив выкладки для (22), получаем:

Теорема 4 *Если* (V_n, g) *и* $(\overline{V}_n, \overline{g})$, $(n > 3)$ *находятся в конформном соответствии, так, что обобщенный тензор Эйнштейна* $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ *сохраняется при отображении, причем* $\kappa \neq \frac{1}{n}$*, то инвариант* φ*, порождающий отображение, должен довлетворять системе дифференциальных уравнений:*

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi,$$

условия интегрируемости которой имеют вид:

$$\varphi_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0.$$

При этом, тензор Римана R^h_{ijk}*, тензор Риччи* R_{ij}*, произведение* Rg_{ij} *также являются инвариантными.* □

Список литературы

1. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: ИЛ, 1948.
2. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М., МПГУ, 2003, 495 с.
3. Синюков Н.С. Геодезические отображення римановых пространств. М., Наука, 1979.
4. Brinkmann, H. IV.: Riemann spaces conformal to Einstein spaces. Mathematische Annalen, vol. 91, pp. 269-278.
5. Киосак В. А. Конформные отображения с сохранением тензора энергии-импульса, // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. 2011. № 26. С. 98—104.
6. Chepurna, O., Kiosak, V., Mikeš J. Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor. J. Appl. Math. Aplimat 3, 1 (2010), 253–258.
7. Чепурная Е. Е. , Киосак В. А. *Инвариантные преобразования с сохранением геодезических.*,-Proc. Intern. Geom. Center 2011 4(2) 36-42.
8. Крамер Д. , Штефанн Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна/Под ред. Э. Шмутцера: Пер. с англ.—М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц *Теория поля*// Наука. 1988. 512 с
10. J. Mikeš,A. Vanžurovà,I. Hinterleitner I.*Geodesic mappings and some generalizations.*,-Palacky University Press, Olomouc, 2009, 304p. Изв. вузов. Матем., 1994, № 3, 50–52
11. А. З. Петров *Новые методы в общей теории относительности*// Наука. 1966. 496 с
12. П. К. Рашевский *Риманова геометрия и тензорный анализ*// Наука. 1967. 664 с

Е. В. Черевко

Одеський національний економичний університет, Одеса, Україна.

E-mail: cherevko@usa.com

Eugen Cherevko

Conformal transformations preserving the stress-energy tensor

We study conformal mappings preserving the stress-energy tensor. We have derived corresponding partial differential equations. Integrability conditionsare obtained. In addition to the stress-energy tensor we get other invariants for the mappings, including the well known Riemann and Ricci tensors.