Proc. Intern. Geom. Center 2013 **6**(3) 40–54 $d\omega$

Атоми степені 2 на поверхнях з краєм

О.М.Іванюк, О.О.Пришляк

Аннотация Для локальної класифікації m-функцій на поверхнях уведено поняття атома. Описані всі атоми степені 2.

Ключові слова атом m-функції · топологічна класифікація

УДК 517.91

1 Вступ

Нехай M – замкнений орієнтований двовимірний многовид (поверхня). Нехай f – гладка функція на M. Розглянемо гамільтонову динамічну систему, що задається рівнянням $\frac{dx}{dt} = \mathrm{sgrad} f(x), \quad x \in M$. Тоді її траєкторії лежать на компонентах ліній рівня функції f. Ці компоненти називають шарами. Гомеоморфізм поверхні, що відображає шари на шари, називається пошаровою еквівалентністю. Отже, пошарова класифікація функцій задає топологічну класифікацію гамільтонових динамічних систем. На множині всіх функцій можна виділити відкриту скрізь щільну підмножину, яка складається з простих функцій Морса. А.Конрод [3] і Г.Ріб [9] для дослідження функцій ввели граф, який отримується з поверхні після стягування кожного шару до точки. Цей граф є повним топологічним інваріантом простих функцій Морса. В роботі О.Болсінова та А.Фоменка [1] було запропоновано розшарований окіл критичного рівня називати атомом, а граф Ріба, у якого вершинам відповідають атоми, а ребрам компоненти краю атомів, називати молекулою. Це дало змогу побудувати пошарову та топологічну класифікацію довільних функцій Морса.

Для многовидів з краєм аналогом функцій Морса є m-функції. Це такі функції, в яких всі критичні точки є невиродженими і не лежать на краю, а також такі, що обмеження функції на край є функцією Морса.

В роботі [2] О.О. Пришляк класифікував прості m-функції на орієнтованих поверхнях.

Топологічні властивості m-функцій досліджували у роботі [6]. С.Максименко для топологічної класифікації m-функцій використовував графи з інволюцією [5]. Метою роботи є повна пошарова локальна класифікація простих m-функцій на компактних поверхнях з краєм, а також орієнтована пошарова класифікація в околі критичного рівня, яка еквівалентна топологічній класифікації векторного поля косого градієнта $\mathrm{sgrad} f$.

2 Прості функції Морса, m-функція.

Нехай M – гладкий многовид розмірності n, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція. Розглянемо гладку функцію $f(x) = 0$ на гладкому многовиді X^n і нехай $x_1, ..., x_n$ – гладкі регулярні координати в околі точки x.

Означення. Точка $x \in M$ називається *критичною* для функції f, якщо диференціал $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ обертається в нуль в точці x. При цьому $f(x)$ називається *критичним значенням* функції f.

Критична точка називається *невиродженою*, якщо другий диференціал $d^2 f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ невироджений в цій точці.

Означення. Гладка функція називається *функцією Морса*, якщо всі її критичні точки невироджені.

Означення. Функція Морса називається *функцією Морса загального положення*, якщо на поверхні рівня лежить не більше однієї критичної точки.

Функції Морса, які мають рівно по одній критичній точці на кожному критичному рівні, ми будемо називати *простими*.

Нехай M – гладкий компактний n-вимірний многовид з краєм.

Означення. Функція $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ називається *m-функцією*, якщо:

а) усі її критичні точки – невироджені і не лежать на ∂M;

б) край многовиду можна подати у вигляді об'єднання $\partial M = \partial M_- \cup \partial M_0 \cup \partial M_+$ такого, що обмеження f_∂ функції f на ∂M_0 є функція Морса і якщо множина $\partial M_- \neq \emptyset$ ($\partial M_+ \neq \emptyset$), то функція f приймає на ній мінімальне (максимальне) значення. При цьому перетини $V_- = \partial M_- \cap \partial M_0$ і $V_+ =$

$\partial M_+ \cap \partial M_0$ будуть $(n-2)$-вимірними многовидами, які називаються *кутами*, а сама трійка $(M, \partial M, V_- \cup V_+)$ – *многовидом з кутами.*

3 Поняття атома. Прості атоми.

Нехай f – m-функція на поверхні X^2, g – інша m-функція на іншій поверхні Y^2. Питання: коли ці функції на поверхнях можна вважати еквівалентними? Розглянемо пару (X^2, f) і (Y^2, g).

Означення. m-функції f і g на поверхнях X^2 і Y^2 будемо називати *пошарово еквівалентними*, якщо існує дифеоморфізм $\lambda : X^2 \longrightarrow Y^2$, який переводить зв'язні компоненти ліній рівня функції f в зв'язні компоненти ліній рівня функції g. Пара (X^2, f) пошарово еквівалентна парі (Y^2, g).

Треба дослідити пошарову еквівалентність m-функцій в околі їх критичних значень.

Атом – це топологічний тип особливості m-функції. Іншими словами, атом – це топологічний тип зв'язної компоненти околу особливого шару m-функції на поверхні. Кожна m-функція визначає розшарування з особливостями на поверхні. Його шарами можна вважати компоненти зв'язності рівня функції. В околі кожного регулярного шару це розшарування тривіально – прямий добуток кола на відрізок.

Означення. *Атомом* називається окіл P^2 критичного шару, який задається нерівністю $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для достатньо малого ε, розшаровану на лінії рівня функції f і яка розглядається з точністю до пошарової еквівалентності $P^2 = \{x : -\varepsilon \leq f(x) - c \leq \varepsilon\}$.

Якщо критичне значення c – локальний мінімум чи локальний максимум, то атом називається *атомом A*. Якщо критичне значення c – сідлове, то відповідний атом називається *сідловим.*

Атом називається *простим*, якщо m-функція в парі (P^2, f) – проста. Решта атомів називається *складними.*

Атом називається *орієнтованим* або *неорієнтованим* в залежності від того, чи є поверхня P^2 орієнтованою чи неорієнтованою.

Нехай c – критичне значення функції f на X^2 і c' – критичне значення функції g на Y^2. Розглянемо їх особливі шари: $f^{-1}(c)$ і $g^{-1}(c')$ і припустимо, що ці шари зв'язні.

Означення. m-функції f і g називаються *пошарово оснащено еквівалентними* в околі своїх особливих шарів $f^{-1}(c)$ і $g^{-1}(c')$, якщо існують два додатні числа ε і ε' і дифеоморфізм $\lambda : f^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \longrightarrow g^{-1}(c'-\varepsilon', c'+\varepsilon')$, який переводить лінії рівня функції f в лінії рівня функції g і який зберігає напрямок росту функцій, тобто λ відображає область $(f > c)$ в область $(g > c')$.

Розглянемо пару (P^2, f), де P^2 – зв'язна компактна поверхня з непорожнім краєм ∂P^2, а f – m-функція на ній, яка має рівно одне критичне значення C, причому $f^{-1}(c-\varepsilon) \cup f^{-1}(c+\varepsilon) = \partial P^2$. Клас оснащеної пошарової еквівалентності цієї пари (P^2, f) називається *f-атомом* чи оснащеним атомом.

Зауваження. Кожному атому відповідає 2 f-атоми. Вони отримуються один з одного заміною знака функції на атомі. Іноді ці 2 атоми можуть бути співпадаючими, еквівалентними.

Означення. *f-атомом* називається атом з попереднього означення, для якого фіксовано розбиття кілець на додатні і від'ємні.

Зрозуміло, що на f-атомі в попередньому означенні можна задати m-функцію, для якої граф K буде її критичним рівнем (наприклад, нульовим), поверхня P^2 буде множиною точок x таких, що $-\varepsilon \leq f(x) \leq \varepsilon$.

Функція f буде додатною на додатних кільцях і від'ємною на від'ємних кільцях.

Найпростішими прикладами атомів є околи максимумів, мінімумів і сідлових критичних точок на поверхнях. При переході через критичний рівень m-функції загального положення виникають перебудови рівнів [2] (рис.1-5).

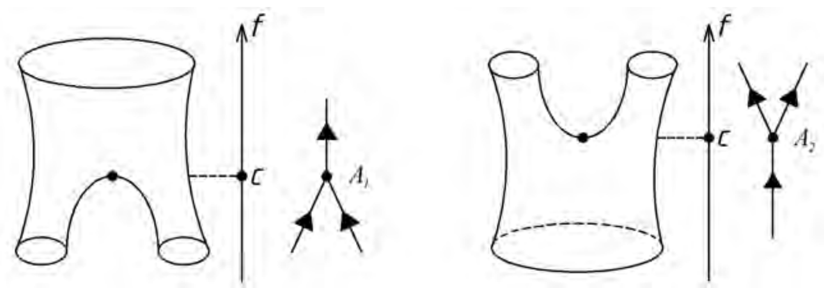

Рис. 1.

1. В момент перебудови змінюється кількість компонент зв'язності (рис.2).

2. Кількість компонент рівня не змінюється (рис.3).

3. Лінія рівня в момент перебудови – коло (рис.4).

4. Лінія рівня в момент перебудови є відрізком (рис.5).

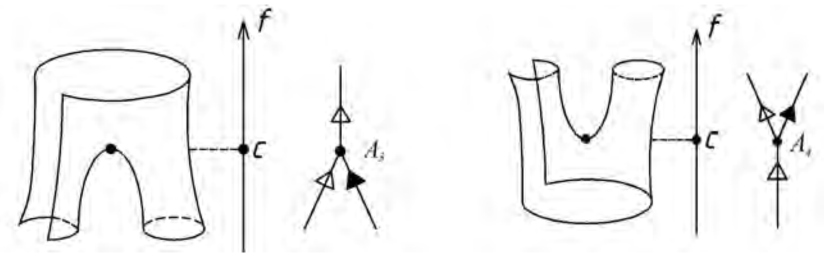

Рис. 2.

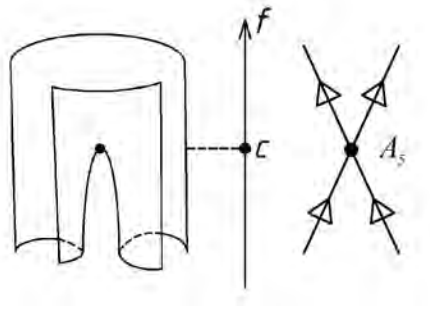

Рис. 3.

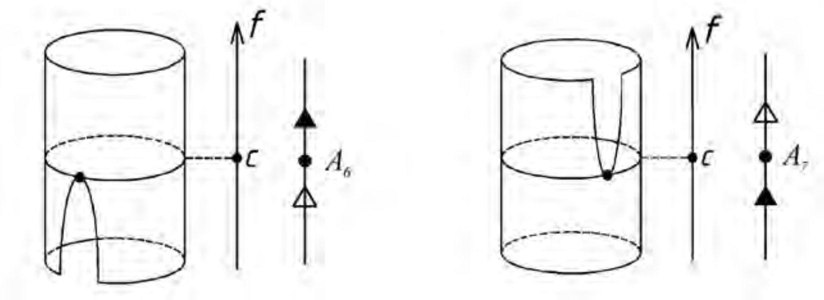

Рис. 4.

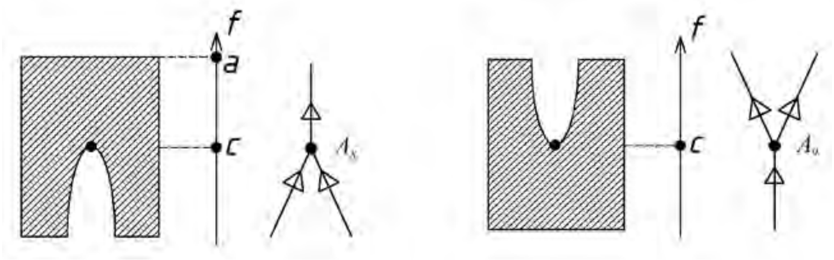

Рис. 5.

4 Атоми складності 2.

Розглянемо всі можливі лінії рівнів m-функцій на заданій орієнтованій поверхні скінченного типу. Для регулярного значення m-функції відповідна лінія рівня складається з неперетинних між собою кіл та замкнених відрізків. Опишемо їх перебудови при переході через особливий рівень. Критичні точки позначатимемо через c, регулярні точки – через a. Ребра на графі Ріба, що відповідають колам, будемо позначати чорними стрілками, а ті, що відповідають відрізкам – білими.

Розпочнемо з внутрішніх критичних точок. Якщо регулярний рівень до проходження критичного значення був об'єднанням кіл, то ми отримаємо атоми, які були описані вище. Розглянемо ситуацію, коли серед регулярних рівнів є відрізок. Тоді атом буде мати вигляд компонент регулярного рівня, помножених на відрізок з приклеєними смужками.

Розглянемо всі можливі атоми складності 2 m-функцій на поверхнях з краєм. Можливі такі випадки:

1. В момент перебудови змінюється кількість компонент зв'язності ліній рівня (рис.6-13).

На рис.6 відрізок і коло переходять у коло, і навпаки: коло переходить у відрізок і коло. Ми отримали на краю максимум (мінімум) і внутрішню сідлову критичну точку. Як атоми вони однакові, але як f-атоми різні.

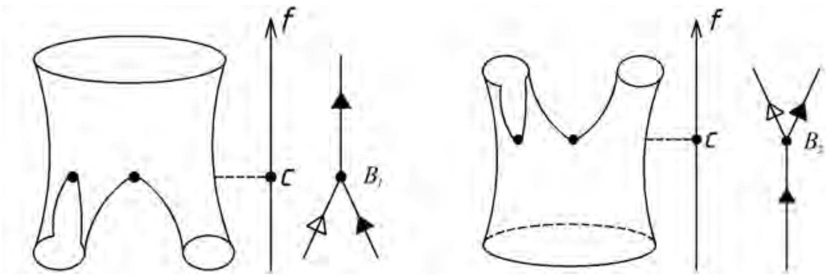

Рис. 6.

На рис.7 два кола переходять у відрізок, і навпаки: відрізок переходить у два кола. Ми отримали на краю мінімум (максимум) і внутрішню сідлову критичну точку. Як атоми вони однакові, але як f-атоми різні.

На рис.8 два відрізки переходять у відрізок, і навпаки: відрізок переходить у два відрізки. Ми отримали на краю максимум (мінімум) і внутрішню сідлову критичну точку. Як атоми вони однакові, але як f-атоми різні.

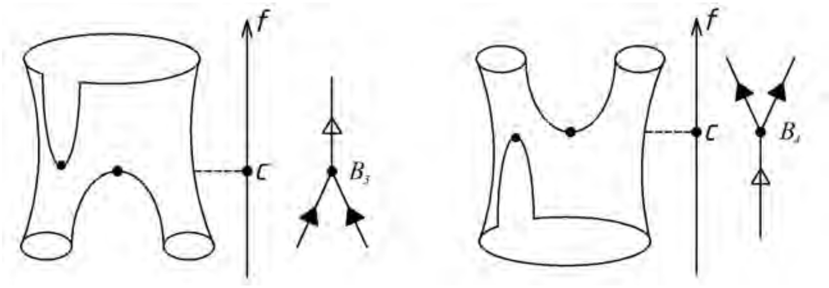

Рис. 7.

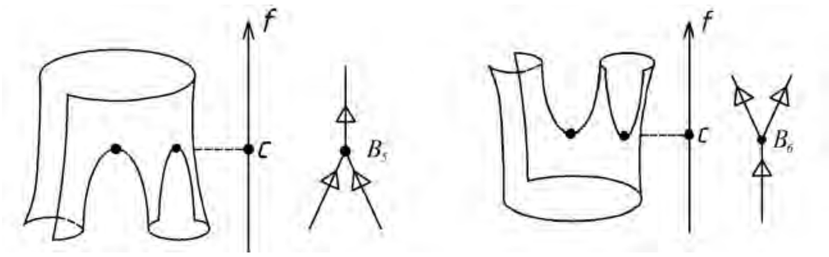

Рис. 8.

На рис.9 два відрізки і коло переходять у відрізок, і навпаки. Тут одному атому відповідає два f-атоми.

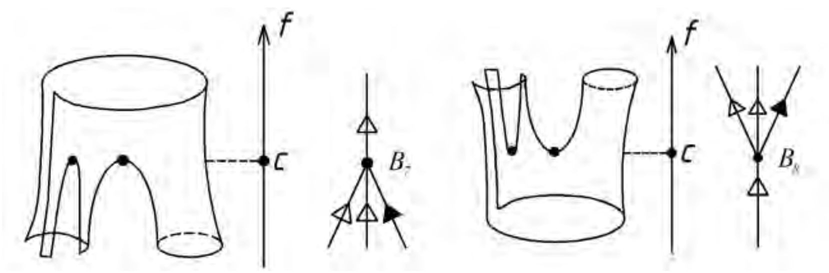

Рис. 9.

На рис.10 два відрізки переходять у три відрізки, і навпаки. Тут одному атому відповідає два f-атоми.

На рис.11 три кола переходять в одне коло, і навпаки. Тут одному атому відповідає два f-атоми [1].

На рис.12 відрізок і два кола переходять у відрізок, і навпаки. Як атоми вони однакові, але як f-атоми різні.

На рис.13 два відрізки і коло переходять у два відрізки, і навпаки. Тут одному атому відповідає два f-атоми.

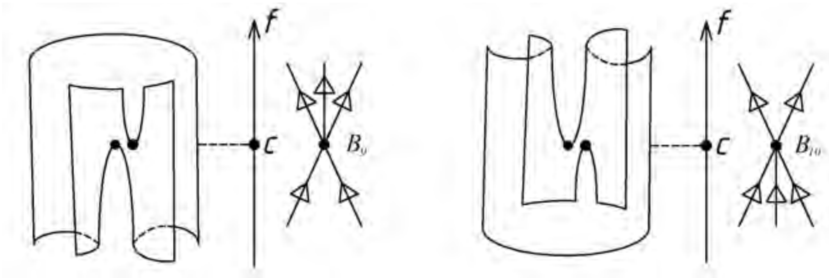

Рис. 10.

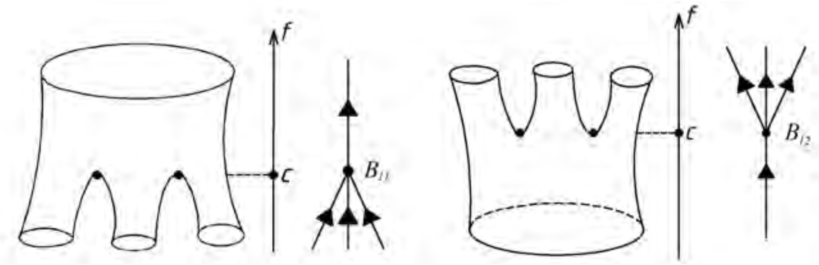

Рис. 11.

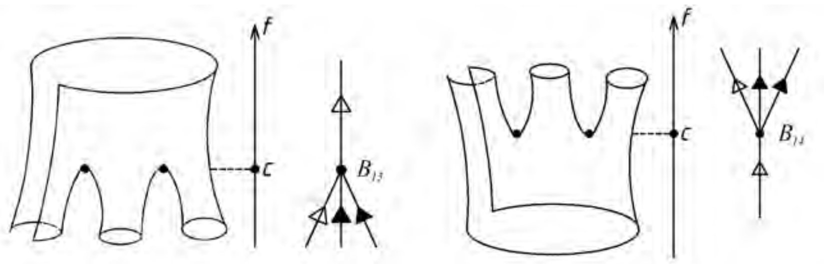

Рис. 12.

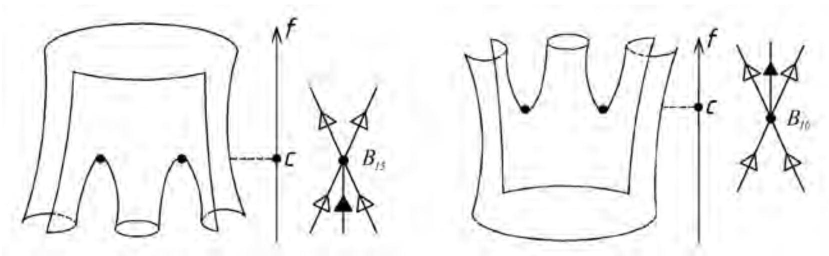

Рис. 13.

2. В момент перебудови не змінюється кількість компонент зв'язності ліній рівня (рис.14-19).

Відрізок і коло переходить у два відрізки, і навпаки. Як f-атоми вони різні (рис.14,15).

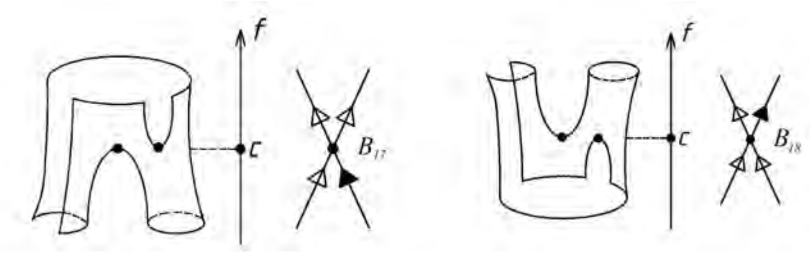

Рис. 14.

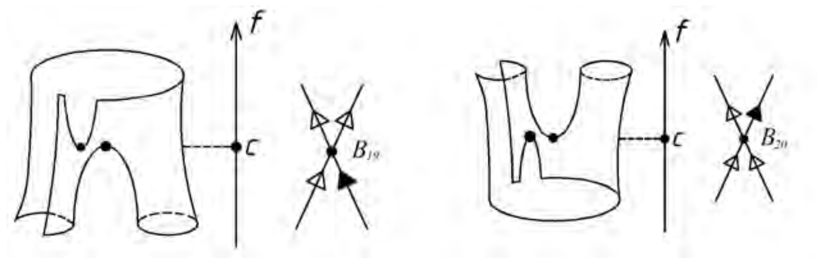

Рис. 15.

На рис.16 три відрізки переходять у три відрізки. Регулярні лінії рівня m-функції тут складаються з трьох компонент зв'язності як до перебудови, так і після неї. Тому графи, що відповідають атомам складності 2 матимуть хрестоподібний вигляд (одна вершина валентності 6). Цьому атому відповідає один f-атом.

На першому малюнку (рис.17) два кола переходять у два кола. Регулярні лінії рівня m-функції тут складаються з двох компонент зв'язності як до перебудови, так і після неї. Тому графи, що відповідають атомам складності 2 матимуть хрестоподібний вигляд (одна вершина валентності 4). Цьому атому відповідає один f-атом. А на другому малюнку коло і відрізок переходить у відрізок і коло.

На першому малюнку (рис.18) відрізок і коло переходить у відрізок і коло, а на другому коло і відрізок переходить у коло і відрізок. Тут одному атому відповідає два f-атоми.

На рис.19 два відрізки переходять у два відрізки. Регулярні лінії рівня m-функції тут складаються з двох компонент зв'язності як до перебудови,

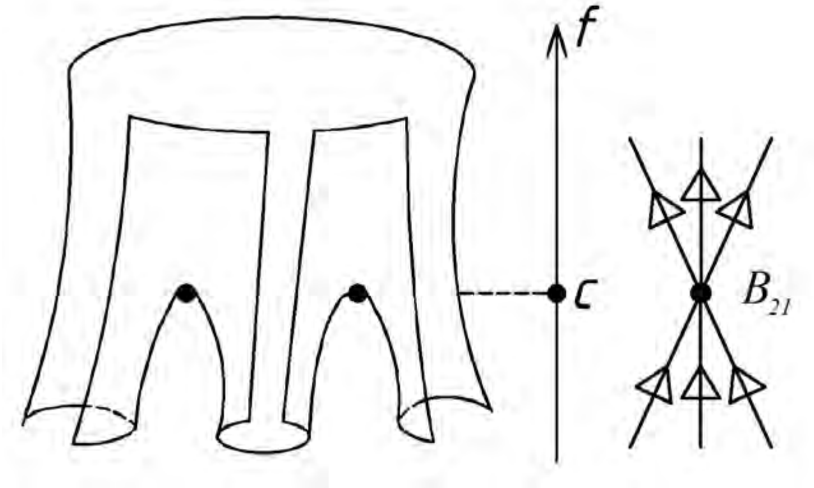

Рис. 16.

Рис. 17.

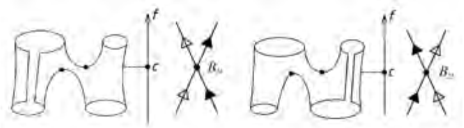

Рис. 18.

так і після неї. Тому графи, що відповідають атомам складності 2 матимуть хрестоподібний вигляд (одна вершина валентності 4). Цьому атому відповідає один f-атом.

3. Лінія рівня в момент перебудови – коло (рис.20,21).

Лінії рівня m-функції до перебудови (у випадку мінімуму) – кола. На графі це відображається ребром першого роду (чорна стрілка). Безпосередньо в момент перебудови лінія рівня є колом. Отже, коло переходить у два відрізки. Одному атому відповідають два f-атоми (рис.20). Ми отримали два локальні екстремуми (мінімуми і максимуми).

Лінія рівня m-функції до перебудови – відрізок. На графі це відображається ребром другого роду (біла стрілка). Безпосередньо в момент пере-

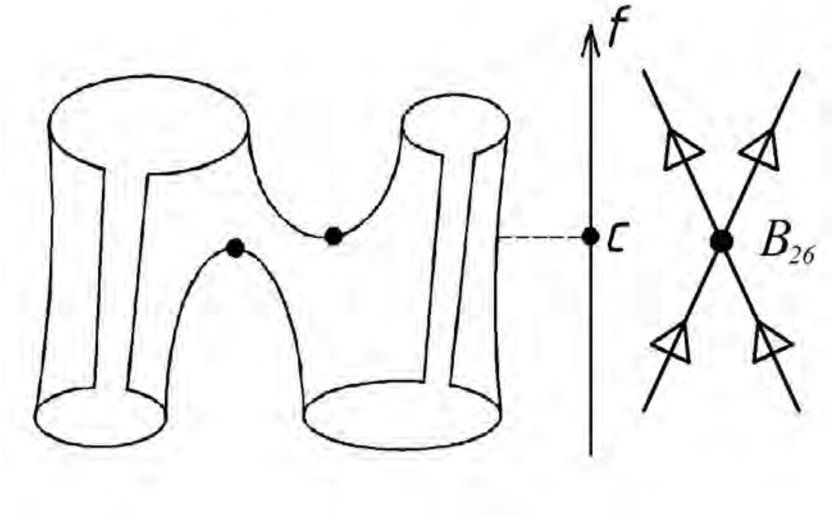

Рис. 19.

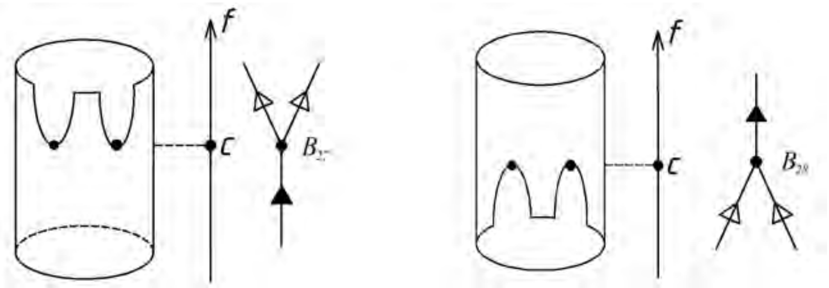

Рис. 20.

будови лінія рівня є колом. Отже, відрізок переходить у відрізок. Цьому атому відповідає один f-атом (рис.21).

4. Лінія рівня в момент перебудови є відрізком (рис.22,23).

Граф має вигляд чотириноги, оскільки до проходження максимуму (мінімуму) прообрази регулярних точок мають дві компоненти зв'язності, і після перебудови прообрази регулярних точок складаються з двох компонент зв'язності – замкнених інтервалів. Цьому атому відповідає один f-атом (рис.22).

На рис.23 один відрізок переходить у три відрізки, і навпаки. Цьому атому відповідає два f-атоми.

Теорема. *(Про локальну класифікацію)* Кожен атом складності 2 m-функції на поверхні з краєм є одним з дев'ятнадцяти атомів, або одним з тридцяти двох f-атомів ($B_1 - B_{32}$).

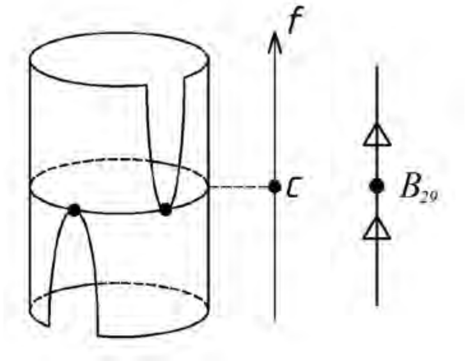

Рис. 21.

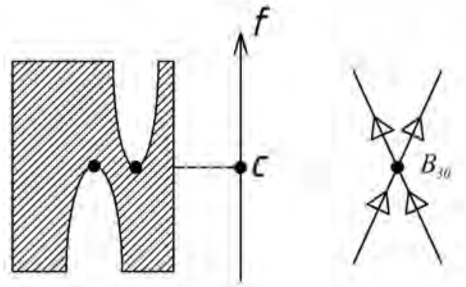

Рис. 22.

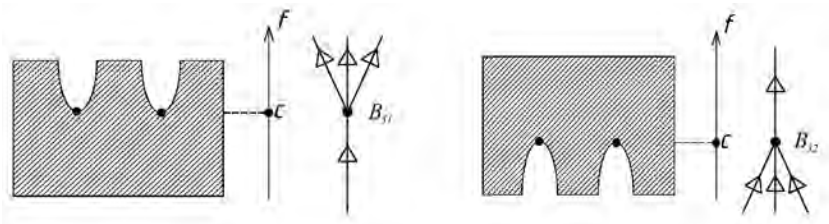

Рис. 23.

Доведення. Можливі два випадки: є гранична критична точка або ні.

1) Якщо немає граничної критичної точки, то обидві критичні точки внутрішні сідлові, отже, атом – це два склеєні околи цих точок. Окіл має вигляд криволонійного восьмикутника. Можливе склеювання тільки непарних сторін. Нумеруємо їх та розглядаємо всі можливі варіанти склеювання, після чого отримуємо всі атоми без граничних точок.

2) Якщо є гранична точка, то атом гомеоморфний простому атому, у якого частина границі продавлена всередину (з неї зроблено виріз). Розглядаємо всі можливі вирізи. З графа A_1 отримаємо B_1 і B_3, з графа A_2 – B_2

і B_4, з графа A_3 – B_5, B_7, B_{17}, B_{19}, з графа A_4 – B_6, B_8, B_{18}, B_{20}, з графа A_5 – B_9 і B_{10}, з графа A_6 – B_{28}, B_{29}, з графа A_7 – B_{27}, B_{29}. З графа A_8 отримуємо B_{32}, B_{30}, а з A_9 – B_{31}, B_{30}. З графа B_{11} отримуємо B_{13}, B_{15} і B_{21}, з графа B_{12} – B_{14}, B_{16}, а з графа B_{22} – B_{23}, B_{24}, B_{25} і B_{26}.

Хоча B_{26} і B_{30} як атоми різні, але як f-атоми вони однакові (два відрізки переходить у два відрізки). B_{17} і B_{19}, B_{18} і B_{20} як f-атоми однакові, але різні як атоми.

Ми можемо робити розрізи двома способами. Можна вирізати смужку, не змінюючи при цьому складності атома. Або ми робимо виріз в простому атому, збільшуючи складність на одиницю.

Ми можемо вирізати смужку по діагоналі в B_{24} і B_{25}, але отримаємо атоми, які ізоморфні B_{16} і B_{15} відповідно. Вирізаючи смужку в B_{26}, ми отримуємо атом, ізоморфний B_{21}. Таким чином вище описані всі можливі атоми складності два.

Розглянемо хрест (рис.24) [1], і будемо склеювати сторони. Усіх склейок буде обмежена кількість, перебравши які ми отримаємо всі атоми. Якщо ми не склеюємо сторони, то це відповідає вирізаній смужці. Всіх можливих способів склейки буде тридцять два, а отже, існує тридцять два атоми складності 2. Якщо ми заклеїмо всі сторони, то отримаємо атоми, пераховані у роботі О.Болсінова та А.Фоменка [1].

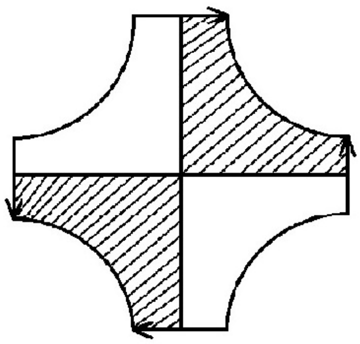

Рис. 24.

Отримані атоми не ізоморфні між собою, оскільки вони не гомеоморфні, мають не гомеоморфні критичні рівні або не гомеоморфні верхні та нижні краї.

Висновки

У роботі розглянуто всі можливі атоми складності 2 m-функцій на поверхнях з краєм, узагальнено результати О.В.Болсінова і А.Т.Фоменко, О.О.Пришляка і В.В.Шарка, наведено локальну топологічну класифікацію обмежених m-функцій складності 2 на орієнтованих поверхнях з краєм.

Отримані результати можуть бути використані для глобальної класифікації m-функцій складності 2, а також як початковий етап для дослідження атомів більшої складності. Всі ці результати застосовуються при дослідженні векторних полів косого градієнта на многовидах з краєм.

Література

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Изд. Дом "Удмуртский университет". – Т.1, Т.2. – 1999. – с.66-99.
2. Пришляк О.О., Пришляк К.О., Міщенко К.І., Лукова Н.В. Класифікація простих m-функцій на орієнтованих поверхнях: Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2011. – №1 (104). – с.1-12.
3. Кронрод А.С. О функциях двух переменных /А.С.Кронрод// Успехи мат.наук. – 1950. – вып.5(35), с.24-134.
4. Кулинич Е.В. О графах как критических уровнях функции на поверхности /Е.В.Кулинич, А.О.Пришляк// Некоторые вопросы совр.мат. Т.25.К.: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – с.102-108.
5. Максименко С.И. Классификация m-функций на поверхностях /С.И.Максименко// Укр.мат.журн. – 1999. – Т.51, №8. – с. 1129-1135.
6. Міщенко К.І. Класифікація m-функцій загального положення на некомпактних поверхнях скінченного типу /К.І.Міщенко// Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка (Серія: фізико-математичні науки). – 2006. – Вип.3. – с.36-42.
7. Пришляк А.О. О некритическом продолжении функции, заданной на границе трехмерной области /А.О.Пришляк, Е.А.Пришляк, Е.Н.Вятчанинова// Геометрія та топологія функцій на многовидах: зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2010. – Т.7 – с.144-157.
8. Prishlyak A.O. Morse functions with finite number of singularities on a plane. Methods of func. and topology. – 2002. – Vol.8, №1. – p.75-78.
9. Reeb G. Sur les points singuliers de une forme de pfaff completement integrable ou de une function numerique /G.Reeb// Comptes Rendus Hebdomadaires des Seaces de Academie des Sciences. – 1954/ – Vol.222. – p.847-849.

О.М.Іванюк, О.О.Пришляк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.

E-mail: oxana801@yandex.ua, prishlyak@yahoo.com

Oksana M. Ivanyuk, Alexandr O.Ptishlyak

Atoms of degree 2 on the surfaces with boundary

We define p-graph and describe how it changes under isotopy of projections for classification of maps of 2-manifolds into plane. The problem of graph implementation and maps classification was considered.