DOI 10.15673/2072-9812.2/2014.29619
Proc. Intern. Geom. Center 2014 **7**(2) 20–25 $d\omega$

Нескінченно малі конформні деформації деяких класів поверхонь

Юлія Степанівна Федченко

Анотація Знайдено нову форму основних рівнянь нескінченно малої конформної деформації поверхонь. Виділено тривіальний випадок. Знайдено класи поверхонь, які допускають нетривіальні нескінченно малі конформні деформації.

Ключові слова нескінченно мала конформна деформація, вектор зміщення, поверхні еліптичного типу, поверхні обертання

УДК 514.76

1 Вступ

Нескінченно малі конформні деформації поверхонь були предметом досліджень багатьох науковців [1]-[3]. Зокрема, Фесенко Є.Д. [1] у своїх дослідженнях показала, що замкнені поверхні додатньої гаусової кривини (за деяких обмежень) допускають нетривіальні нескінченно малі конформні деформації та у випадку сфери знайдено вектор зміщення.

У даній роботі вивчаються основні рівняння нескінченно малих конформних деформацій, які представлено через тензорні поля похідної вектора зміщення (на відміну від [1], де основні рівняння представлено через компоненти вектора зміщення), що дозволяє вказати на існування нетривіальних нескінченно малих конформних деформацій деяких класів поверхонь.

Розглянемо поверхню S класу C^3, яка гомеоморфна області G площини, в евклідовому просторі E_3 з векторно-параметричним рівнянням

$\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$ та її деформацію S_ε:

$$\overline{r}_\varepsilon = \overline{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \overline{U}(x^1, x^2),$$

де $\overline{U}(x^1, x^2)$ - вектор зміщення, а ε -нескінченно малий параметр.

Означення 1 *Нескінченно малу деформацію поверхні S називатимемо нескінченно малою конформною деформацією, якщо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні S пропорційні коефіцієнтам першої квадратичної форми деформованої поверхні S_ε з точністю до нескінченно малих величин вище першого порядку відносно параметру деформації ε.*

Система основних рівнянь нескінченно малих конформних деформацій має наступний вигляд [1]:

$$\delta g_{ij} = 2\varphi g_{ij}, \tag{1}$$

де g_{ij}, δg_{ij}-коефіцієнти першої квадратичної форми та їх варіації відповідно, $\varphi(x^1, x^2)$- деяка функція.

Означення 2 *Функцію φ, що зустрічається в рівняннях (1) називатимемо функцією конформності.*

За умови $\varphi = c = const$ нескінченно мала конформна деформація називається тривіальною.

Таким чином, з (1) маємо, що тривіальні нескінченно малі конформні деформації є нескінченно малими гомотетіями (у випадку $c = 0$ деформація є згинанням).

Представлення похідної вектора зміщення $\overline{U}_i$ за базисом $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{n}$ при нескінченно малих конформних деформаціях [3] має наступний вигляд:

$$\overline{U}_i = c_{i\alpha}\left(\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha \overline{n}, \tag{2}$$

де $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{T}{}^{\beta\alpha}$, T^α - деякі тензорні поля на поверхні, що задовольняють наступну систему рівнянь [3]:

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta}\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha = 0; \\ \nabla_\alpha \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta = \varphi_\alpha c^{\alpha\beta}; \\ \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}) = 0; \\ \varphi_i = \partial_i \varphi. \end{cases} \tag{3}$$

Тут b_{ij}- коефіцієнти другої квадратичної форми, $b^i_j = b_{j\alpha}g^{\alpha i}$, c_{ij} - дискримінантний тензор поверхні, $c^{ij} = g^{i\alpha}g^{j\beta}c_{\alpha\beta}$, ∇ - знак коваріантної похідної на базі метричного тензора g_{ij}. Всі індекси тут і надалі незалежно набувають значень $1, 2$.

2 Дослідження системи рівнянь (3).

У даному пункті проведемо дослідження системи рівнянь (3), яка є системою основних рівнянь для нескінченно малих конформних деформацій.

З рівняння $(3)_3$ маємо [4], що

$$\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} = tg^{\alpha\beta}, \tag{4}$$

$t(x^1, x^2)$ - деяка функція.

Підставимо вираз для $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta}$ з рівняння (4) у рівняння $(3)_2$ та здійснемо множення на d^s_β, де $d^s_\beta = d^{s\alpha}g_{\alpha\beta}$, $d^{s\alpha} = \frac{1}{K}c^{si}c^{\alpha j}b_{ij}$. Як результат отримаємо, що

$$T^s = t_\alpha d^{s\alpha} - \varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta. \tag{5}$$

Оскільки тензорні поля $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta}$, T^s мають задовольняти $(3)_1$, тоді матимемо умову на функції t, φ:

$$\nabla_s(t_\alpha d^{s\alpha}) - \nabla_s(\varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta) + 2Ht = 0. \tag{6}$$

Таким чином, справедлива теорема.

Теорема 1 *Для того, щоб нескінченно мала деформація поверхні S ($K \neq 0$) класу C^3 була конформною, необхідно і достатньо, щоб на поверхні існували функції t, φ, які задовольняють рівняння (6). Тоді тензорні поля $\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta}$, T^s похідної вектора зміщення (2) мають вигляд (4),(5).*

З'ясуємо, коли нескінченно мала конформна деформація буде тривіальною.

З означення тривіальних нескінченно малих конформних деформацій маємо, що $\varphi = const$. Тоді представлення тензорних полів (4), (5) приймають наступний вигляд:

$$\overset{\circ}{T}^{\alpha\beta} = tg^{\alpha\beta}, T^s = t_\alpha d^{s\alpha}. \tag{7}$$

Рівняння (6), з урахуванням сталості функції конформності, матиме вигляд:

$$\nabla_s(t_\alpha d^{s\alpha}) + 2Ht = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) називається характеристичним рівнянням поля обертань при нескінченно малих згинаннях поверхні (рівняння Вейнгартена), а розв'язки даного рівняння - характеристичними функціями [5].

Справедлива теорема.

Теорема 2 *Для того, щоб деформація поверхні S $(K \neq 0)$ класу C^3 була тривіальною нескінченно малою конформною деформацією, необхідно і достатньо, щоб існували стала конформна функція φ та характеристична функція t. Тоді тензорні поля мають представлення (7).*

3 Існування нетривіальних нескінченно малих конформних деформацій поверхонь

Розглянемо рівняння (6), яке містить в якості невідомих функцію конформності φ та функцію t.

Нехай вважатимемо, що функцію конформності φ нам задано і оскільки нас цікавить існування нетривіальних нескінченно малих конформних деформацій на поверхнях, то природньо вимагати, щоб функція конформності $\varphi \neq 0$.

Як результат, отримаємо рівняння

$$\nabla_s(t_\alpha d^{s\alpha}) + 2Ht = \nabla_s(\varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta), \tag{9}$$

права частина якого є відомою функцією. Рівняння (9) - це неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно функції t з дискримінантом, знак якого залежить від знаку гаусової кривини.

Таким чином, рівняння (9) є:

- рівняння еліптичного типу у випадку $K > 0$;
- рівняння гіперболічного типу у випадку $K < 0$.

Отримане рівняння еліптичного типу досліджено у роботі [6], де показано, що на поверхнях еліптичного типу таке рівняння має розв'язок, що залежить від довільної функції $\omega(x^1, x^2)$ класу C^3. Справедлива теорема.

Теорема 3 *Довільна поверхня S класу C^4 еліптичного типу $(K \neq 0)$ допускає нетривіальні нескінченно малі конформні деформації в достатньо малій області $\overline{G}$. Тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^s залежать від двох функцій $\varphi(x^1, x^2)$ класу C^2 та $\omega(x^1, x^2)$ класу C^3.*

Проведемо дослідження рівняння (6) за умови, що функція t - відома характеристична функція. У результаті отримаємо рівняння на знаходження функції конформності φ:

$$\nabla_s(\varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta) = 0. \tag{10}$$

Теорема 4 *Якщо функція конформності $\varphi \neq 0$ є розв'язком диференціального рівняння (10), а функція t - характеристичною функцією на поверхні S $(K \neq 0)$, тоді існує нетривіальна нескінченно мала конформна деформація поверхні. Тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^s знаходяться за формулами (4), (5).*

У розгорнутому вигляді (у лініях кривини) рівняння (10) набуває вигляду

$$\nabla_2\varphi_1(d_1^1 - d_2^2) - \varphi_1(\nabla_1 d_2^1 + \nabla_2 d_2^2) + \varphi_2(\nabla_1 d_1^1 + \nabla_2 d_1^2) = 0. \tag{11}$$

Проведемо дослідження рівняння (11) на поверхні обертання: $\overline{r} = (ucosv, usinv, f(u))$ $(K \neq 0, d_1^1 - d_2^2 \neq 0)$.

Вирази коефіцієнтів першої і другої квадратичних форм, дискримінантних тензорів, символів Кристофеля тощо для поверхні обертання мають такий вигляд:

$$g_{11} = 1 + f'^2, g_{12} = 0, g_{22} = u^2,$$

$$b_{11} = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}, b_{12} = 0, b_{22} = \frac{uf'}{\sqrt{1+f'^2}},$$

$$c^{12} = -c^{21} = \frac{1}{u\sqrt{1+f'^2}}, c^{11} = c^{22} = 0,$$

$$d_1^1 = \frac{(1+f'^2)^{3/2}}{f''}, d_2^1 = d_1^2 = 0, d_2^2 = \frac{u\sqrt{1+f'^2}}{f'},$$

$$\mathit{\Gamma}_{11}^1 = \frac{f'f''}{1+f'^2}, \mathit{\Gamma}_{12}^2 = \frac{1}{u}, \mathit{\Gamma}_{22}^1 = -\frac{u}{1+f'^2}, \mathit{\Gamma}_{11}^2 = \mathit{\Gamma}_{12}^1 = \mathit{\Gamma}_{22}^2 = 0.$$

Перевіркою можна переконатися, що функція

$$\varphi = K(v)e^{-\int \frac{3f'^2f''^2 - f'f''' - f'^3f'''}{(f'+f'^3-uf'')f''}du} + N(u),$$

де $K(v)$, $N(u)$ - довільні функції, є розв'язком рівняння (11).

Таким чином, на поверхні обертання існує не нульова функція конформності, яка задовольняє рівняння (10) і при наявності характеристичної функції на поверхні можна говорити (за теоремою 4) про існування нетривіальних нескінченно малих конформних деформацій поверхонь обертання.

В якості такої характеристичної функції візьмемо $t = 0$. Тоді тензори деформації набувають вигляду

$$\overset{\circ}{T}{}^{11} = \overset{\circ}{T}{}^{12} = \overset{\circ}{T}{}^{22} = 0, \tag{12}$$

$$T^1 = K'(v)\frac{1+f'^2}{uf''}e^{-\int \frac{3f'^2f''^2 - f'f''' - f'^3f'''}{(f'+f'^3-uf'')f''}du}, \tag{13}$$

$$T^2 = -K(v)\frac{(3f'f''^2 - f''' - f'^2f''')}{(f'+f'^3-uf'')f''}e^{-\int \frac{3f'^2f''^2 - f'f''' - f'^3f'''}{(f'+f'^3-uf'')f''}du} - \frac{N'(u)}{f'}. \tag{14}$$

Справедлива теорема.

DOI 10.15673/2072-9812.2/2014.29619

Теорема 5 *Поверхня обертання* $\overline{r} = (ucosv, usinv, f(u))$ $(K \neq 0, d_1^1 - d_2^2 \neq 0)$ *допускає нетривіальну нескінченно малу конформну деформацію. Тензорні поля* $\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^s *мають вигляд (12)-(14).*

Література

1. Е. Д. Фесенко. Бесконечно малые конформные деформации замкнутых поверхностей положительной гауссовой кривизны // Изв. вузов Матем. 1969. № 3. С.72 – 77.
2. В. Т. Фоменко. Об одном свойстве конформных бесконечно малых деформаций многомерных поверхностей в римановом пространстве// Мат. заметки. 1996. Т.59, Вып. 2. С.284 – 290.
3. Ю. С. Федченко. Про нескінченно малі конформні деформації мінімальних поверхонь зі збереженням середньої кривини// Proc. Intern.Geom.Center 2012. № 5(3). С.24 – 31.
4. Л. Л. Безкоровайна. Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки:навчальний посібник.-Одеса:Астропринт, 1999.-168 с.
5. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции.-М:Наука, 1988.-512 с.
6. Л. Л. Безкоровайна. Структура множини розв'язків системи рівнянь для загальної нескінченно малої деформації. //Л. Л. Безкоровайна, Т.Ю.Вашпанова/ Укр. мат. журн. 2010. т.62., № 7 - С. 878 – 884.

Юлія Степанівна Федченко
ОНАХТ, Одеса, Україна
E-mail: `Fedchenko_Julia@ukr.net`

Julia Fedchenko
Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, Ukraine.

On infinitesimal conformal deformations of surfaces

A new form of basic equations for conformal deformations is found. The equations involve tensor fields of displacement vector only. Conditions for trivial deformations as well as infinitesimal conformal deformations are studed.