Молекули m-функцій степені 2 на поверхнях з краєм

О.М. Іванюк, О.О. Пришляк

Анотація Ми розглядаємо молекули з атомів степені 2 на поверхнях з краєм. Всі можливі молекули, які можна отримати склеюванням атомів складності 2 m-функцій на поверхнях з краєм, обчислюються трьома способами:

1) Склеювання тих двох атомів між собою, в першому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з другого атома.

2) Склеювання трьох атомів між собою, в першому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з другого атома, і водночас в другому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з третього атома.

3) Склеювання двох атомів складності 2, але беруться не всі критичні точки.

Ключові слова атом m-функції · топологічна класифікація · молекула

УДК 517.91

Вступ

Нехай M – замкнений орієнтований двовимірний многовид (поверхня), f – гладка функція на M. Розглянемо гамільтонову динамічну систему, яка задається рівнянням $\frac{dx}{dt} = \mathrm{sgrad} f(x), \quad x \in M$. Тоді її траєкторії будуть лежати на компонентах ліній рівня функції f. Ці компоненти назвемо шарами. Гомеоморфізм поверхні, що відображає шари на шари, називається пошаровою еквівалентністю. Отже, пошарова класифікація функцій задає топологічну класифікацію гамільтонових динамічних систем. В роботі О.Болсінова та А.Фоменка [1] було запропоновано розшарований окіл критичного рівня називати атомом, а граф Ріба, у якого вершинам відповідають атоми, а ребрам компоненти краю атомів, називати молекулою. Це дало змогу побудувати пошарову та топологічну класифікацію довільних функцій Морса.

Для многовидів з краєм аналогом функцій Морса є m-функції. В роботі [2] отримана класифікація простих (складності 1) m-функцій на орієнтованих поверхнях. В роботі [3] було розглянуто всі можливі атоми складності 2 m-функцій на поверхнях з краєм.

Метою роботи є отримання топологічна класифікація m-функції складності 2 на орієнтованих поверхнях за допомогою молекул, складених з атомів складності 2.

1 Атоми m-функцій.

Нехай M – гладкий многовид розмірності n, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція, $x_1, ..., x_n$ – гладкі регулярні координати в околі точки x.

Нагадаємо, що внутрішня точка $x \in M$ називається *критичною* для функції f, якщо диференціал $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ обертається в нуль в точці x. При цьому $f(x)$ називається *критичним значенням* функції f. Критична точка називається *невиродженою*, якщо другий диференціал $d^2 f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ невироджений в цій точці. Гладка функція на замкненому многовиді називається *функцією Морса*, якщо всі її критичні точки невироджені. Гладка функція на многовиді з краєм називається m-функцією, якщо всі її критичні точки є невиродженими і не лежать на краю, ш така, що обмеження функції на край є функцією Морса.

m-функції f і g на поверхнях M^2 і N^2 будемо називати *пошарово еквівалентними*, якщо існує дифеоморфізм $\lambda : M^2 \longrightarrow N^2$, який переводить зв'язні компоненти ліній рівня функції f в зв'язні компоненти ліній рівня функції g. Будемо казати, що пара (N^2, f) пошарово еквівалентна парі (N^2, g).

Для дослідження пошарової еквівалентності m-функцій в околі їх критичних значень зручно використовувати поняття атому за Фоменком.

Означення. *Атомом* називається окіл критичного шару $P^2 = \{x : -\varepsilon \leq f(x) - c \leq \varepsilon\}$ для достатньо малого ε, розшарований на лінії рівня функції f і який розглядається з точністю до пошарової еквівалентності. f-*атомом* називається атом, для якого фіксовано напрямок зростання функції.

Зауваження. Кожному атому відповідає 2 f-атоми. Вони отримуються один з одного заміною знака функції на атомі. Іноді ці 2 $f-$атоми можуть бути співпадаючими, еквівалентними.

Нагадаємо, що граф Ріба можно отримати з поверхні, ототожнюючи точки, що лежать на одній компоненті рівня. Напрямок зростання функції задає орієнтацію ребер графа Ріба. Для регулярного значення m-функції відповідна лінія рівня складається з кіл, що не перетинаються, та замкнених відрізків. Критичні точки позначимо через c, регулярні точки – через a. Ребра на графі Ріба, що відповідають колам, будемо позначати чорними стрілками, а ті, що відповідають відрізкам – білими. Всі можливі графи атомів з однією критичною точкою зображені на рис. 1.

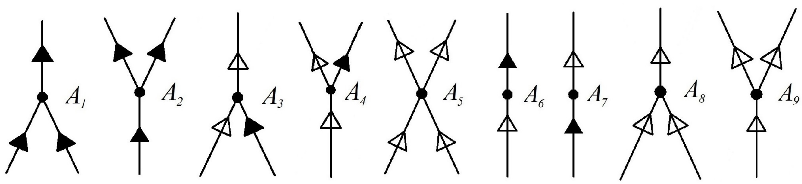

Рис. 1.

Всі можливі атоми складності 2 m-функцій на поверхнях з краєм розглянуто в роботі [3] (рис.2-5).

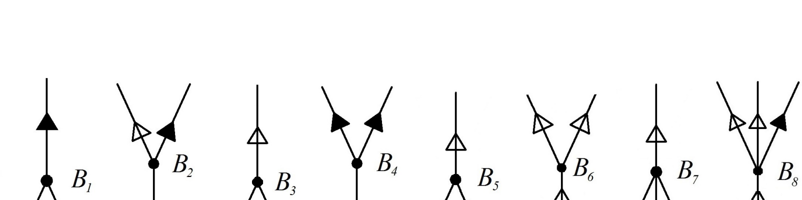

Рис. 2.

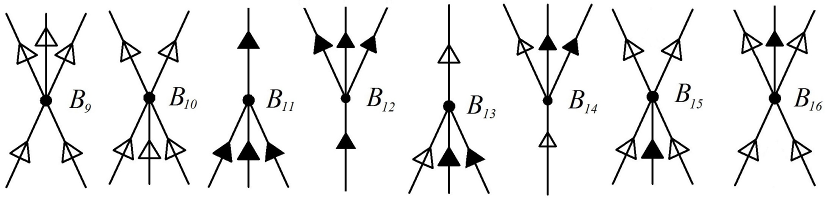

Рис. 3.

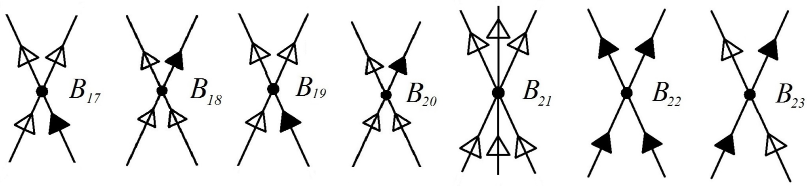

Рис. 4.

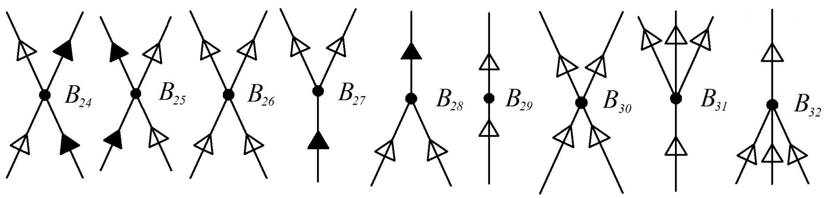

Рис. 5.

2 Молекули.

Нехай на поверхні X^2 задана функція Морса f. Її лінії рівня розшаровують поверхню, тобто виникає розшарування з особливостями. Розглянемо всі критичні значення c_i функції f і відповідні їм критичні рівні $f^{-1}(c_i)$. Кожному такому рівню відповідає деякий атом. При цьому граничні околи атомів з'єднані циліндрами, які є однопараметричними сім'ями неособливих зв'язних ліній рівня. Зобразимо розшарування у вигляді графа, за вершини якого візьмемо атоми. Це означає, що кожній вершині графа поставлений у відповідність деякий атом, причому вказано взаємно-однозначну відповідність між граничними околами атомів і ребрами графа, які дотикаються до даної вершини-атома. Кінці атомів з'єднані ребрами, які відповідають однопараметричним сім'ям регулярних околів (рис.6).

Означення. Описаний граф назвемо *f-молекулою W*, яка відповідає парі (X^2, f).

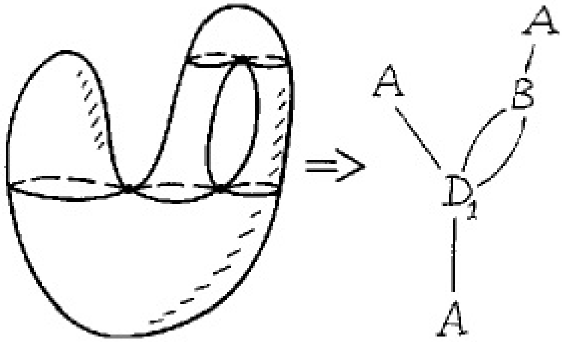

Рис. 6.

Означення. Дві молекули W і W' будемо вважати f-*однаковими*, якщо існує гомеоморфізм одного графа на інший, який переводить ребра в ребра, атоми в атоми, причому цей гомеоморфізм продовжується на самі атоми. Це означає, що гомеоморфізму ребер відповідає гомеоморфізм відповідних їм граничних околів атомів і цей гомеоморфізм повинен продовжуватися з межі атома всередину, тобто на весь атом.

Теорема. Нехай (X^2, f) і (X'^2, f') – дві орієнтовані поверхні з функціями Морса, і W, W' – відповідні їм молекули. Тоді пари (X^2, f) і (X'^2, f') пошарово еквівалентні із збереженням орієнтації тоді і тільки тоді, коли молекули W і W' однакові.

Розглянемо молекули функцій, які містять чотири і п'ять критичних точок.

Теорема. Всі молекули з чотирма і п'ятьма критичними точками можна отримати:

1) склеївши 2 атоми складності 2;

2) склеївши 3 атоми складності 2;

3) склеївши між собою не всі критичні точки атомів складності 2.

Отримані молекули ізоморфні одній з молекул у таблиці:

1) склеюємо 2 атоми	$B_1 \longrightarrow B_2, B_1 \longrightarrow B_{18}, B_1 \longrightarrow B_{20}, B_1 \longrightarrow B_{23}, B_1 \longrightarrow B_{24}$ $B_3 \longrightarrow B_4, B_3 \longrightarrow B_{22}$ $B_4 \longrightarrow B_{29}$ $B_5 \longrightarrow B_6, B_5 \longrightarrow B_{17}, B_5 \longrightarrow B_{19}, B_5 \longrightarrow B_{26},$ $B_5 \longrightarrow B_{27}, B_5 \longrightarrow B_{30}$ $B_6 \longrightarrow B_{29}$ $B_7 \longrightarrow B_8, B_7 \longrightarrow B_{16}$ $B_{10} \longrightarrow B_{31}$ $B_{11} \longrightarrow B_{12}$ $B_{13} \longrightarrow B_{14}$ $B_{15} \longrightarrow B_8$ $B_{17} \longrightarrow B_2$ $B_{18} \longrightarrow B_6, B_{18} \longrightarrow B_{27}$ $B_{19} \longrightarrow B_2$ $B_{20} \longrightarrow B_6, B_{20} \longrightarrow B_{27}$ $B_{22} \longrightarrow B_4$ $B_{23} \longrightarrow B_2$ $B_{24} \longrightarrow B_2$ $B_{25} \longrightarrow B_2$ $B_{26} \longrightarrow B_6, B_{26} \longrightarrow B_{27}$ $B_{28} \longrightarrow B_6, B_{28} \longrightarrow B_{17}, B_{28} \longrightarrow B_{19}, B_{28} \longrightarrow B_{27},$ $B_{28} \longrightarrow B_{26}, B_{28} \longrightarrow B_{30}$ $B_{29} \longrightarrow B_3, B_{29} \longrightarrow B_5$ $B_{30} \longrightarrow B_6, B_{30} \longrightarrow B_{27}$ $B_{32} \longrightarrow B_9, B_{32} \longrightarrow B_{31}$
2) склеюємо 3 атоми	$B_1 \longrightarrow B_{18} \longrightarrow B_6, B_1 \longrightarrow B_{20} \longrightarrow B_6,$ $B_1 \longrightarrow B_{18} \longrightarrow B_{27}, B_1 \longrightarrow B_{20} \longrightarrow B_{27},$ $B_1 \longrightarrow B_{23} \longrightarrow B_2, B_1 \longrightarrow B_{24} \longrightarrow B_2$ $B_3 \longrightarrow B_4 \longrightarrow B_{29}, B_3 \longrightarrow B_{22} \longrightarrow B_4$ $B_5 \longrightarrow B_6 \longrightarrow B_{29},$ $B_5 \longrightarrow B_{17} \longrightarrow B_2, B_5 \longrightarrow B_{19} \longrightarrow B_2,$ $B_5 \longrightarrow B_{26} \longrightarrow B_6, B_5 \longrightarrow B_{26} \longrightarrow B_{27},$ $B_5 \longrightarrow B_{30} \longrightarrow B_6, B_5 \longrightarrow B_{30} \longrightarrow B_{27}$ $B_7 \longrightarrow B_8 \longrightarrow B_{29}, B_7 \longrightarrow B_{16} \longrightarrow B_6$ $B_{13} \longrightarrow B_{14} \longrightarrow B_{29}$ $B_{28} \longrightarrow B_{17} \longrightarrow B_2, B_{28} \longrightarrow B_{19} \longrightarrow B_2,$ $B_{28} \longrightarrow B_{26} \longrightarrow B_6, B_{28} \longrightarrow B_{30} \longrightarrow B_6$ $B_{29} \longrightarrow B_3 \longrightarrow B_4, B_{29} \longrightarrow B_5 \longrightarrow B_6$ $B_{32} \longrightarrow B_9 \longrightarrow B_6, B_{32} \longrightarrow B_{31} \longrightarrow B_{29}$
3) не всі точки	$B_1 \longrightarrow B_8, B_1 \longrightarrow B_{14}, B_1 \longrightarrow B_{16}, B_1 \longrightarrow B_{29}$

Доведення

1) Склеюємо ті 2 атоми між собою, в першому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з другого атома.

Спочатку до атома B_1 приклеюємо B_2. Отримаємо молекулу, яка має 4 критичні точки (рис.7).

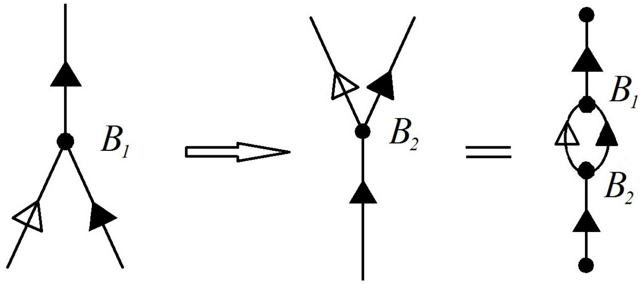

Рис. 7.

Потім приклеюємо B_{18}, B_{20}, B_{23}, B_{24}. Так як B_{18} і B_{20} ізоморфні ([3]), то й отримані молекули з п'ятьма критичними точками, що утворені з цих атомів, будуть ізоморфними. У B_{23} і B_{24} виходить один відрізок і одне коло, так само як і входить коло і відрізок в B_1. Отримаємо молекули з п'ятьма критичними точками.

До B_2, в якому входить одне коло, можемо приклеїти B_1, B_{11} і B_{28}, тому що у них виходить одне коло. Але ми отримаємо молекули, в яких шість і сім критичних рівнів (рис.8).

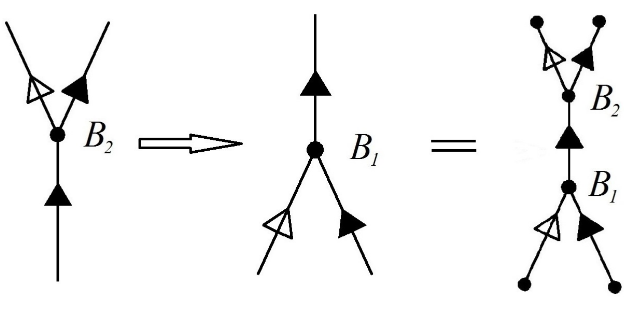

Рис. 8.

Тому надалі ми не будемо рахувати ті молекули, в яких більше п'яти критичних точок.

До B_3 приклеюємо B_4 і B_{22}. Отримуємо молекули з чотирма і п'ятьма критичними рівнями відповідно.

B_4 склеюємо з B_{29}. В перший атом входить один відрізок, а в другому атомі виходить один відрізок.

Аналогічно склеюємо B_5 з B_6, B_{17}, B_{19}, B_{26}, B_{27}, B_{30}. Молекули, отримані приклеюванням атомів B_{17} і B_{19}, будуть ізоморфними, так як самі атоми ізоморфні між собою.

До атома B_7 можна приклеїти атом B_8 двома способами: спочатку склеюємо два відрізки і коло, а потім перекручуємо два відрізки в одному з атомів і приклеюємо до них інші два відрізки. Ми отримаємо дві різні молекули з чотирма критичними точками, так як не існує гомеоморфізму, який би переводив ребра в ребра, атоми в атоми.

Для склеювання атомів B_{10} і B_{31} існує шість способів. Ми фіксуємо перші відрізки в кожному з них, а наступні два спочатку склеюємо, а потім перекручуємо. Так само фіксуємо другий відрізок і третій. Ми отримаємо шість молекул з п'ятьма критичними точками, які будуть різними, бо не існує гомеоморфізму, який би переводив ребра в ребра, а атоми в атоми.

Склеїти атоми B_{32} і B_9 також можна шістьма способами. Зафіксуємо перші відрізки в кожному з них, а наступні два спочатку приклеїмо, а потім перекрутимо. Так само зафіксуємо другий відрізок і третій. Отримаємо шість молекул з п'ятьма критичними точками, які не будуть однаковими, бо не існує відповідного гомеоморфізму.

Для склейки B_{32} і B_{31} існує три способи. Ще три інші склейки дадуть нам молекули, які будуть ізоморфними з першими трьома.

Таким самим чином робиться склейка всіх інших атомів складності 2.

2) Склеюємо 3 атоми між собою, в першому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з другого атома, і водночас в другому з яких кількість ребер, що входить, співпадає з кількістю ребер, що виходить з третього атома.

Розглядаємо атом B_1. Оскільки в нього входить один відрізок і одне коло, то до нього можна приклеїти B_{18} і B_{20}, в яких виходить так само один відрізок і одне коло. А тоді можна приклеїти ще й атом B_6 і B_{27}, в яких виходить два відрізка. Отримаємо молекулу, яка має п'ять критичних точок (рис.9).

До атома B_1 можна ще приклеїти B_{23}, а до них ще й B_2, а також B_{24} з B_2.

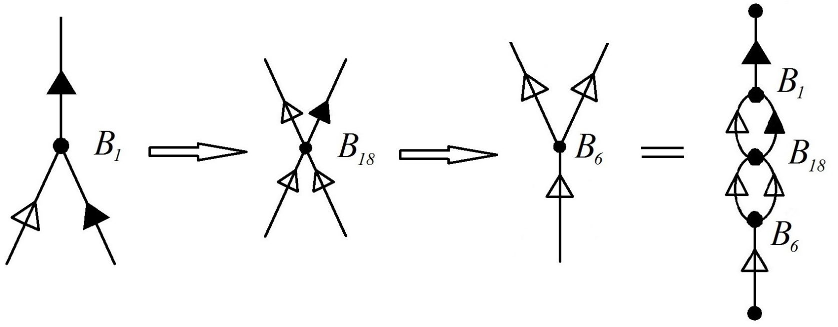

Рис. 9.

До B_3 можна приклеїти B_4, так як в перший заходить два кола, а в другому виходить так само два кола. А до них ще й B_{29}, тому що з нього виходить один відрізок, а в B_4 входить один відрізок. Аналогічно до B_3 – B_{22} з B_4.

Враховуючи описані способи в попередньому пункті, для склеювання атомів B_7 з B_8 і з B_{29}, B_{32} з B_9 і з B_6, B_{32} з B_{31} і з B_{29} існує відповідно два, шість і три способи, а отже буде по дві, шість і три молекули.

Такі ж склейки робимо і з іншими атомами складності 2. Але вибираємо тільки ті три атоми, які після склеювання утворюють молекулу, що містить не більше пяти критичних точок.

3) Беремо два атоми складності 2, але будемо склеювати не всі критичні точки.

Спочатку до B_1 будемо приклеювати B_8. Так як з другого атома виходить два відрізки, а в перший заходить один відрізок, то ми приклеїмо між собою тільки один раз відрізки і кола (рис.10).

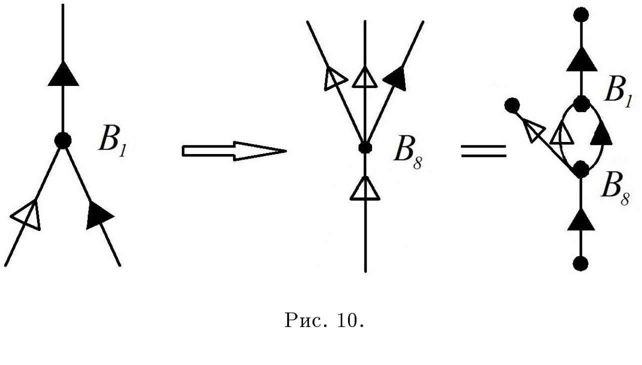

Рис. 10.

Таку ж саму склейку робимо B_1 з B_{14}, B_{16} і B_{29}.

B_3 будемо склеювати з B_{12}. Так як з другого атома виходить три кола, а в перший заходить два кола, то ми склеюємо між собою тільки два кола. Аналогічно B_3 з B_{14}.

До B_5 будемо приклеювати B_8. Так як з другого атома виходить два відрізки і коло, а в перший заходить два відрізки, то ми приклеїмо між собою два відрізки. Аналогічно робиться склейка B_5 з B_{29} і B_{31}.

Роблячи вищеописані дії, ми склеюємо наступні атоми таким самим способом: до B_7 приклеюємо B_6, B_{27}, до B_{13} – B_2, B_4, до B_{28} – B_{29}, B_{31}.

Таким способом склеювання ми отримали молекули з п'ятьма критичними точками.

Зауваження. Остання теорема задає всі можливі m-функції на орієнтованій поверхні з краєм, у яких не більше 5 критичних точок (функції або її обмеження на край) складності не більше 2.

Висновки

У статті узагальнено результати О.В.Болсінова і А.Т.Фоменко, О.О.Пришляка і В.В.Шарка.

В роботі розглянуто всі можливі молекули з чотирма і п'ятьма критичними точками, які можна отримати склеюванням атомів складності 2.

Отримані результати можуть бути використані для глобальної класифікації m-функцій складності 2. Оскільки такі функції виникають в однопараметричних сім'ях m-функцій, то результати даної роботи можна застосувати до вивчення таких сімей.

Автори також мають надію, що результати дданої роботи будуть сприяти вивченню m-функцій більшої складності.

Література

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Изд. Дом "Удмуртский университет". – Т.1, Т.2. – 1999. – с.66-99.
2. Пришляк О.О., Пришляк К.О., Міщенко К.І., Лукова Н.В. Класифікація простих m-функцій на орієнтованих поверхнях: Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2011. – №1 (104). – с.1-12.
3. *Іванюк О.М., Пришляк О.О.* Атоми степені 2 на поверхнях з краєм: Proc. Intern. Geom. Center. – 2013. – Vol.6, №3. – с.40–53.
4. Кронрод А.С. О функциях двух переменных /А.С.Кронрод// Успехи мат.наук. – 1950. – вып.5(35), с.24-134.
5. Кулинич Е.В. О графах как критических уровнях функции на поверхности /Е.В.Кулинич, А.О.Пришляк// Некоторые вопросы совр.мат. Т.25.К.: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – с.102-108.
6. Максименко С.И. Классификация m-функций на поверхностях /С.И.Максименко// Укр.мат.журн. – 1999. – Т.51, №8. – с. 1129-1135.

7. Міщенко К.І. Класифікація m-функцій загального положення на некомпактних поверхнях скінченного типу /К.І.Міщенко// Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка (Серія: фізико-математичні науки). – 2006. – Вип.3. – с.36-42.
8. Пришляк А.О. О некритическом продолжении функции, заданной на границе трехмерной области /А.О.Пришляк, Е.А.Пришляк, Е.Н.Вятчанинова// Геометрія та топологія функцій на многовидах: зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2010. – Т.7 – с.144-157.
9. Prishlyak A.O. Morse functions with finite number of singularities on a plane. Methods of func. and topology. – 2002. – Vol.8, №1. – p.75-78.
10. Reeb G. Sur les points singuliers de une forme de pfaff completement integrable ou de une function numerique /G.Reeb// Comptes Rendus Hebdomadaires des Seaces de Academie des Sciences. – 1954/ – Vol.222. – p.847-849.

О.М. Іванюк, О.О. Пришляк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
E-mail: oxana801@yandex.ua, prishlyak@yahoo.com

Oksana M. Ivanyuk, Alexandr O.Prishlyak

Molecules of m-function of degree 2 on the surfaces with boundary

We introduce molecules for m-function of degree 2 on the surfaces with boundary. All possible molecules are received by gluing of atoms of complexity 2 of m-functions on surfaces with boundary are given by three ways: 1) We glue two atoms together in the first of which the number of edges, that is, the same as the number of edges emanating from the second atom. 2) We glue three atoms together, the first of which is the number of edges, that is, the same as the number of edges emanating from the second atom, while the second of which is the number of edges, that is, the same as the number of edges emanating from the third atom. 3) We glue two atoms of complexity 2 but do not take all critical points.