УДК 514.18

Д. В. Кукуруза, к.т.н.,
С. В. Росоха, д.т.н.,
С. В. Білецький, к.т.н.

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ СКЕЛЕТНИХ КРИВИХ ДЛЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ВІБРОЗАХИСНИХ СИСТЕМ

Національний університет цивільного захисту України, м. Харків

Розглянуто спосіб наближеного визначення скелетних кривих для віброзахисних систем, описаних рівнянням типу Дуффінга.

Постановка проблеми. Аналіз вільних коливань нелінійної системи проводиться з метою визначення залежності, що зв'язує частоту коливань із амплітудою. З аналізу вільних коливань можна почерпнути важливі відомості про поводження системи, досить точно визначити діапазон частот, у якому можлива поява резонансних режимів роботи [1]. Такий аналіз важливий для визначення коефіцієнтів ефективності віброізоляції розглянутої віброзахисної системи, оскільки у описи цих коефіцієнтів входить частота вільних коливань віброзахисних систем при заданій амплітуді.

Залежність, що зв'язує частоту й амплітуду при вільних коливаннях нелінійної системи називають *скелетною кривою*. Залежно від виду пружної характеристики скелетна крива може бути різного типу. Розрізняють скелетні криві жорсткого, м'якого й змішаного типу. Для досліджуваних у даній роботі віброзахисних систем скелетні криві можуть бути жорсткого або змішаного типу.

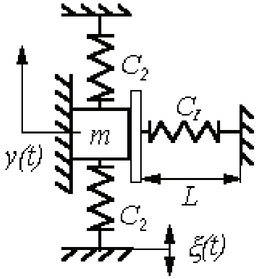

Рис. 1. Принципова схема віброзахисної системи

Огляд літературних джерел. Динамічні процеси, що відбуваються в моделі, представленої на рис. 1, описуються таким нелінійним диференціальним рівнянням типу Дуффінга [2]:

$$m\ddot{y} + 2\beta\,\dot{y} + C_1 y\left(1 - \frac{L+\Delta}{\sqrt{L^2+y^2}}\right) + \frac{C_2 y}{2} = -m\ddot{\xi}(t), \qquad (1)$$

де β — коефіцієнт грузлого опору. При цьому, якщо значення C_1 і C_2 значно різняться, то дане рівняння також можна віднести до класу “жорстких” диференціальних рівнянь.

Для одержання *точного розв’язку* рівняння (1), що зв'язує частоту й амплітуду вільних коливань розглянутих віброзахисних систем, виходять із загальних формул [3]:

$$p=\frac{2\pi}{T}; \qquad T = 2\sqrt{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\int_x^a f(x)dx}}. \tag{2}$$

У нашому випадку

$$f(x)=\frac{1}{m}\left(2C_2+C_1-\frac{C_1(\Delta+L)}{\sqrt{L^2+x^2}}\right)x. \tag{3}$$

Виконавши інтегрування одержуємо

$$\int_x^a f(x)dx=\frac{a^2-x^2}{m}\varphi(x), \tag{4}$$

де $\varphi(x)=\frac{2C_2+C_1}{2}-\frac{C_1(\Delta+L)}{\sqrt{L^2+a^2}+\sqrt{L^2+x^2}}$.

У результаті знаходимо залежність періоду коливань T від амплітуди a:

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)\varphi(x)}}. \tag{5}$$

Інтеграл є невласним, його не беруть в елементарних функціях. Тому для чисельного інтегрування усунемо цю особливість в знаменнику заміною змінної $x=a\sin t$. Така операція дає

$$p=\frac{\pi}{2\sqrt{m}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{2C_2+C_1-\frac{2C_1(\Delta+l)}{\sqrt{L^2+a^2}+\sqrt{L^2+a^2\sin^2 t}}}}} \tag{6}$$

Записаний *розв'язок є точним*, оскільки інтеграл у знаменнику може бути обчислений на комп'ютері з наперед заданою точністю [4]. При $C_1=0$ з (6) слідує відома формула $p=\sqrt{2C_2/m}$ власної частоти коливань лінійного осцилятора. Недоліком точного розв'язку (6) є те, що він не дає замкнутої аналітичної залежності частоти вільних коливань від амплітуди. Тому доцільно одержати такі залежності наближеними методами.

Постановка завдання. Розробити спосіб наближеного визначення скелетних кривих для розглянутих на рис. 1 віброзахисних систем, які описані рівнянням типу Дуффінга.

Основна частина. Одним із наближених методів розв'язання рівняння (1), є метод Я.Г. Пановко [3]. Відповідно до нього

$$p = \left(\frac{5}{ma^5} \int_0^a x^3 f(x)\,dx \right)^{1/2} . \qquad (7)$$

Підставивши вираз (3) в (7) знаходимо

$$p = \left(\frac{1}{m} \left(\left(2C_2 + C_1\right) + \frac{5C_1(\Delta + L)}{8a^5} \left(a\sqrt{a^2 + L^2}\left(3L^2 - 2a^2\right) - \right.\right.\right. \qquad (8)$$

$$\left.\left.\left. - 3L^4 \ln\left(\frac{a}{L} + \sqrt{1 + \left(\frac{a}{L}\right)^2} \right) \right) \right) \right)^{1/2} .$$

Іншим підходом до побудови наближеної залежності є метод Бубнова-Гальоркіна [5]. Відповідно до нього

$$p^2 = \frac{4}{\pi m a} \int_0^{\pi/2} f\left(a \sin t\right) \sin t\,dt . \qquad (9)$$

Для нашого завдання, з урахуванням (3) метод дає

$$p = \left(\frac{1}{m} \left(2C_2 + C_1 - \frac{4C_1(\Delta + L)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{l^2 + a^2 \sin^2 t}} dt \right) \right)^{1/2} . \qquad (10)$$

Інтеграл, що входить до виразу (10), не обчислюється в елементарних функціях. Тому розглянутий метод не дає замкнутої аналітичної залежності частоти від амплітуди. Рівною мірою це стосується й методу Крилова-Боголюбова [6], використання якого також приводить до формули (10). Інтеграл, що розміщений в ній $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{l^2 + a^2 \sin^2 t}} dt$ з будь-якою точністю можна обчислити на комп'ютері [6]. Виконавши перетворення, знаходимо

$$I(a) = \frac{\sqrt{L^2 + a^2}}{a^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon \sin^2 t}\,dt - \frac{L^2}{a^2\sqrt{L^2 + a^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - \varepsilon \sin^2 t}} =$$

$$= \frac{\sqrt{L^2 + a^2}}{a^2} E(\varepsilon) - \frac{L^2}{a^2\sqrt{L^2 + a^2}} K(\varepsilon), \qquad (11)$$

де $\varepsilon = \frac{a^2}{a^2 + L^2}$; $K(\varepsilon)$, $E(\varepsilon)$ — еліптичні інтеграли 1-го і 2-го роду.

Крім розглянутих, відомі також методи побудови скелетних кривих, де не потрібно обчислювати інтеграли. Використаємо два з них. За методом Кулікова [5], з урахуванням (3) знаходимо

$$p = \left(\frac{1}{a} f(a) \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{m} \left(2C_2 + C_1 - \frac{C_1(\Delta + L)}{\sqrt{L^2 + a^2}} \right) \right)^{1/2} . \qquad (12)$$

За методом Ципкіна [5] одержуємо

$$p=\left(\frac{2}{3a}\left(f\left(a\right)+f\left(\frac{a}{2}\right)\right)\right)^{1/2}=\left(\frac{1}{m}\left(2„_{2}+„_{1}-\frac{2}{3}C_{1}\left(\Delta+L\right)\times\right.\right. \tag{13}$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{1}{\sqrt{L^{2}+a^{2}}}+\frac{1}{\sqrt{4L^{2}+a^{2}}}\right)\right)\right)^{1/2}.$$

Таким чином, із розглянутих п'яти способів, у трьох вдалося знайти розв’язки у замкнутому вигляді. Проаналізуємо точність наближених розв’язків [7]. У табл. 1. наведено результати розрахунків при використанні різних методів лінеаризації й точного розв’язку рівняння (1) при таких параметрах системи: $m=1,\ C_1=40,\ C_2=10,\ \Delta=5,\ L=10.$

Таблиця 1

Значення частот, отримані для рівняння (1) різними методами

a	Гальоркін	Пановко	Ципкін	Куліков	Точне
1	0,4729	0,5013	0,4727	0,5457	0,4627
3	1,3849	1,3538	1,3814	1,5907	1,3567
5	2,2091	2,1653	2,1955	2,5168	2,1684
7	2,9193	2,8701	2,8903	3,2933	2,8723
9	3,5146	3,4656	3,4684	3,9246	3,4660
11	4,0076	3,9622	3,9457	4,4317	3,9603

З табл. 1. видно, що значення, близькі до точного на всьому інтервалі амплітуд, дає метод Ципкіна. При відносно великих значеннях амплітуд коливань більш високу точність дає метод Пановка. Найменш точним із всіх розглянутих є метод Кулікова.

З аналізу наведених результатів можна зробити висновок про перевагу застосування методів Пановка й Ципкіна. Порівнюючи формули (5) і (13) можна рекомендувати (13), якщо не потрібно високої точності та необхідна простота розв’язку, і (7) якщо потрібно одержати розв’язок високої точності для більших амплітуд коливань.

Висновок. Математичним описом дії механічних систем із проклацуванням є рівняння типу Дуффінга. Запропонований метод розв’язання рівнянь типу Дуффінга, оснований на визначенні залежності частоти коливань від амплітуди за умови кубічної нелінійності.

Література

1. *Алабужев П.М.* Виброзащитные системы с квазинулевой жесткостью. / *Алабужев П.М., Гритчин А.А., Ким Л.И* — Л.: Машиностроение, Ленинградское отд–ние, 1986 г. 96 с.

2. *Гринченко Е.Н.* Использование уравнения Дуффинга для исследования виброзащитной системы с квазинулевой жесткостью // *Гринченко Е.Н., Пиксасов М.М.* / Геометричне та комп’ютерне моделювання – Харків: ХДУХТ,

2007. – Вип.17.–С. 268-277.

3. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. / *Пановко Я. Г.* - Л.: Политехника. 1990. - 272 с.

4. *Бабаков И.М.* Теория колебаний / *Бабаков И.М.* - М.: Наука, 1965 г. 620 с., ил.

5. *Филиппов А.П.* Колебания механических систем. / *Филиппов А.П.* - К.: — Наукова думка, 1965 г.

6. *Куценко Л.М.* Геометричне моделювання нестійкості фазових траєкторій рівняння Дуффінга // *Куценко Л.М., Грінченко Є.М.* / Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2007. Вип. 4. - Т. 36. - С. 22-28.

7. *Ольшанський В.П.* О линеаризации при расчетах виброзащитных систем с квазинулевой жесткостью // *Ольшанський В.П., Гринченко Е.Н.* / Динамика и прочность машин. Харьков, ХГПУ, 1998.- Вып. 56- С.111–118

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СКЕЛЕТНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМ

Д. В. Кукуруза, С. В. Росоха, С. В. Билецкий

Рассмотрен способ приближенного определения скелетных кривых для виброзащитных систем, описанных уравнениями типа Дуффинга.

APPROXIMATE METHODS OF CREATION OF SKELETAL CURVES FOR THE FREE OSCILLATIONS SYSTEMS PROTECTIVE FROM VIBRATIONS

D. V.Kukuruza, S. V.Rosoha, S. V.Biletsky

The method of approximate determination of skeletal curves for the systems protective from vibrations described by the equations such as Duffing is considered.