УДК 518

**Н. М. Аушева**, к.т.н.,
**А. А. Демчишин**, к.т.н.

# ЗГИНАННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ В КОМПЛЕКСНОМУ ПРОСТОРІ ДЕФОРМАЦІЄЮ НАПРЯМНОЇ КРИВОЇ БЕЗ'Є

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»*

***У роботі пропонується метод побудови мінімальних поверхонь на основі деформації напрямної кривої у комплексному просторі. Для побудови поверхні застосовуються ізотропні криві у вигляді Без'є. Знайдені залежності для згинання площини у поверхню. Відображення здійснюється у дійсному або уявному однорідних просторах.***

**Постановка проблеми.** Моделювання мінімальних поверхонь методом Вейєрштрасса [1] спирається на застосування просторових ізотропних кривих, які будуються на основі аналітичних функцій. При побудові просторових кривих на основі плоскої кривої виникає необхідність знаходження інтегралу та взяття кореня. Застосування ізотропних багатокутників дозволяє уникнути таких обчислень, але не дозволяє перетворювати плоскі криві у просторові в інтерактивному режимі. Для позбавлення від цього недоліку задамося метою розробити метод деформації плоскої кривої у просторі.

**Аналіз останніх досліджень.** Автором роботи [1] пропонується використовувати ізотропні криві для моделювання алгебраїчних мінімальних поверхонь. У дисертаційному дослідженні [2] розглядається конструювання гвинтових мінімальних поверхонь та пропонуються способи знаходження ізотропних просторових кривих. Автором знайдені параметричні рівняння просторових кривих нульової довжини та побудовані відповідні мінімальні поверхні. У роботах [3-5] проводиться дослідження побудови мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних дробово-раціональних кривих та кривих Без'є. Дисертацію [6] присвячено розробці нового напряму конструювання поверхонь та їх неперервного згинання в кінцеві форми на основі використання натуральних параметрів.

**Формулювання цілей статті (постановка завдання).** Метою даної роботи є розробка способу формоутворення мінімальних поверхонь на основі деформації плоскої кривої.

**Основна частина.** Побудуємо плоску ізотропну криву Без'є. Умовою ізотропності таких кривих є ізотропність ланок харак-ого багатокутника [3]. Нехай крива Без'є ***n***-го порядку задана у вигляді:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{i}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}), \text{ де } \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{i}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i})!} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{i}} (1-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{i}}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}} = [\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}} \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}]$.

Умова ізотропності плоскої кривої Без'є $\boldsymbol{n}$-го порядку має вигляд:

$$(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}+1}-\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}})=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}+1}-\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}),\ \text{де}\ \ \boldsymbol{i}=0..(\boldsymbol{n}-1). \qquad (2)$$

*Оскільки символ $\boldsymbol{i}$ вже застосовано для позначення порядкового номеру опорної вершини поліному, уявну одиницю позначено символом $\boldsymbol{I}$.*

При роботі з комплексними числами умова (2) визначає дві криві Без'є: одна з яких міститься в дійсному просторі, а друга - в уявному. Будемо задавати довільну дійсну криву Без'є $\boldsymbol{n}$-го порядку та визначати уявну криву Без'є. В цьому випадку кількість рівнянь (2) буде становити $\boldsymbol{2n}$ **.** Для визначення всіх координат додамо дві додаткові умови, а саме - уявні частини вектора $\boldsymbol{r}_0$. В результаті одержимо:

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}+1}=\left[\operatorname{Re}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}+1})+\operatorname{Im}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}+1})\quad \operatorname{Re}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}+1})+\operatorname{Im}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}+1})\right], \qquad (3)$$

де $\operatorname{Im}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}+1})=-\operatorname{Re}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}+1})+\operatorname{Im}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}})+\operatorname{Re}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}})$,

$\operatorname{Im}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}+1})=\operatorname{Re}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}+1})-\operatorname{Re}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}})+\operatorname{Re}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}),\qquad \boldsymbol{i}=0..(\boldsymbol{n}-1)$.

Після підстановки значень (3) у вираз (1) будемо мати ізотропну криву у комплексному просторі.

Побудуємо ізотропну сітку у комплексному просторі. Для цього виконаємо в рівнянні (1) заміну: $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$. Комплексна функція $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})$ визначає конформне відображення. Після відокремлення дійсної та уявної частини будемо мати сітки на площині. Коефіцієнти першої квадратичної форми конформного відображення задовольняють умовам: $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{G}=0$ та $\boldsymbol{F}=0$.

Розглянемо процес згинання плоскої ізотропної сітки в комплексному просторі на основі деформації напрямної кривої. Інтерес складає така деформація, при якій довжина кривої залишиться незмінною (ізотропною). В процесі згинання коефіцієнти першої квадратичної форми залишаються незмінними, таким чином поверхня залишиться мінімальною. В якості приклада, скористаємося кривою Без'є $\boldsymbol{3}$-го порядку. Загальні умови ізотропності для просторової кривої в цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{cases}\sum\limits_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)^2=0,\\ \sum\limits_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=0,\\ 2\sum\limits_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2+\sum\limits_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)=0,\\ \sum\limits_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=0,\\ \sum\limits_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)^2=0.\end{cases} \qquad (4)$$

Для просторової кривої повинні виконуватись умови: $\sum\limits_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2\neq 0$ та $\sum\limits_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_0)^2\neq 0$.

Для розв’язання рівнянь (4) задамо довільні координати трьох вершин характеристичного чотирикутника $\boldsymbol{r_i} = [\boldsymbol{x_i} \quad \boldsymbol{y_i} \quad \boldsymbol{z_i}]$, $z_1 = z_0$, $\boldsymbol{i} = 0..2$. В результаті одержимо:

$$z_3 = \frac{2(\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1)(z_2 - z_1)}{(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_0)} + z_2,$$
$$\boldsymbol{x}_3 = \frac{-(z_2 - z_1)^2 - (\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1)^2}{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)} + \boldsymbol{x}_2, \tag{5}$$
$$\boldsymbol{y}_3 = \frac{-2(z_2 - z_1)^2 - (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_{02})}{(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_0)} + \boldsymbol{y}_2.$$

Якщо $z_2 = z_0$ будемо мати плоску ізотропну сітку. При завданні $z_2 = z_2(\boldsymbol{w})$, одержимо сімейство мінімальних поверхонь.

Для дослідження деформації кривої та моделювання мінімальних поверхонь створено програмне забезпечення, яке реалізовано у інтегрованому середовищі розробки MS Visual Studio з використанням об’єктно-орієнтованої мови програмування MS Visual C++. Інтерфейс керування графічним процесором реалізовано згідно зі специфікацією протоколу OpenGL 1.1. Системний рівень операцій вводу-виводу при роботі з операційною системою, який включає функції: створення та управляння вікнами додатку, відстеження подій комп’ютерної миші, реалізований із застосуванням функцій бібліотеки GLUT 3.7.

Розроблена програмна система вирішує задачі розрахунку: базисних точок ізотропної кривої у вигляді Без’є, дійсної та уявної частин мінімальної поверхні, коефіцієнтів першої квадратичної форми частин мінімальної поверхонь ($\boldsymbol{E} - \boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{F}$).

До складу програмного забезпечення входять :

- інтерактивний модуль деформації напрямної кривої Без’є у дійсному просторі;
- модуль розрахунку дійсної та уявної частини мінімальної поверхні;
- модуль розрахунку коефіцієнтів першої квадратичної форми;
- візуалізатор поверхонь.

Інтерактивне згинання поверхні виконується в режимі реального часу (рис.1), як наслідок зміни положення точок базису характеристичного чотирикутника дійсної кривої. За для виконання умови ізотропності у комплексному просторі, дії користувача при роботі з нульовою та першою точкою обмежуються умовою $z_1 = z_0$. Результуючими даними роботи системи є зображення на дисплеї комп’ютера, та файли з даними звіту розрахунків і параметрів напрямної кривої.

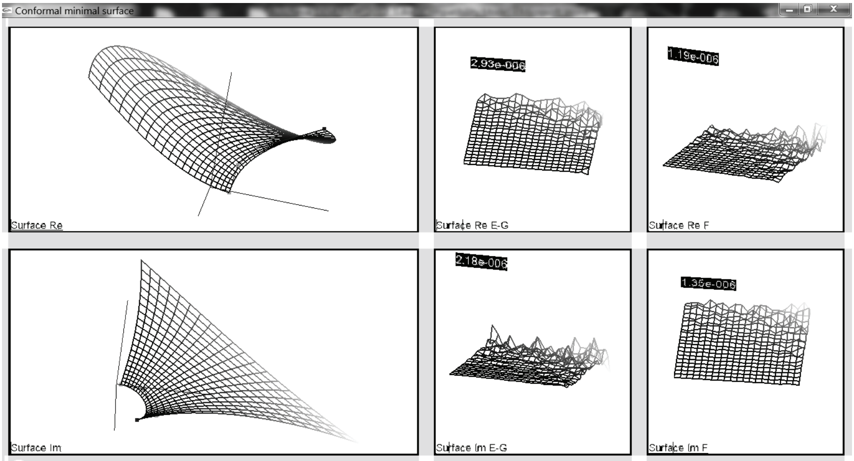


Рис.1. Приклад роботи програмної системи згинання мінімальних поверхонь (зліва – дійсна та уявна частини мінімальної поверхні, справа – графіки коефіцієнтів першої квадратичної форми)

**Висновки.** Дослідження показали, що мінімальну поверхню можна одержати на основі деформації плоскої ізотропної кривої. Деформація кривої здійснюється в комплексному просторі, в той же час зберігається умова ізотропності, тобто довжина кривої залишається незмінною. В результаті деформації кривої одержується сімейство мінімальних поверхонь. Для проведення досліджень створено програмне забезпечення, яке дозволяє в інтерактивному режимі проводити деформацію кривої в режимі реального часу. Подальші дослідження пов’язані з деформацією кривих, які зберігають довжину в комплексному та дійсному просторах.

## Література

1. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна / В. Бляшке. - Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935.- 330 с.

2. *Коровіна І. О.* Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка” / І.О. Коровіна. - К.: КНУБА, 2012.- 19 с.

3. *Аушева Н. М.* Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без`є / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.-Вип.88.-К.:КНУБА, 2011р.- С.57-61.

4. *Аушева Н.М.* Моделювання мінімальних поверхонь Без`є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський

державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.50.-Мелітополь: ТДАТУ, 2011. - С.105-109.

5. *Аушева Н.М.* Ізотропні дробово-раціональні криві третього порядку / Н.М. Аушева, Г.А. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.53.- Мелітополь: ТДАТУ, 2012. - С.3-6.

6. *Пилипака С.Ф.* Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка" / С.Ф. Пилипака. - К.: КНУБА, 2000.- 35 с.

## ИЗГИБАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЕФОРМАЦИЕЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ БЕЗЬЕ

***Н. Н. Аушева, А. А. Демчишин***

В работе предлагается метод построения минимальных поверхностей на основе деформации направляющей кривой в комплексном пространстве. Для построения поверхности применяются изотропные кривые в форме Безье. Найдены зависимости для изгибания плоскости в поверхность. Отображение осуществляется в действительном или мнимом однородных пространствах.

## BENDING OF MINIMAL SURFACES IN THE COMPLEX SPACE BY DEFORMATION OF THE GUIDING BEZIER CURVE

***N. Ausheva, A. Demchyshyn***

The paper proposed a method for construction of minimal surfaces basing on deformation of the guiding curve in the complex space. Isotropic curves in a Bezier form are used to construct the surface. Dependencies for bending a plane into a surface were found. Visualization was performed in real or imaginary homogeneous spaces.