УДК 515.2

С. В. Тютюнников,
О. Л. Ситабдієва, к.т.н.

РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА – ШАРПІ

ДВНЗ «Ужгородський національний університет» (м.Ужгород)
ООО «Планпроект Аделя» (м. Севастополь)

Наведено спосіб розв'язання методом Лагранжа – Шарпі диференціального рівняння з частинними похідними, призначеного для опису відбивальних поверхонь.

Постановка проблеми. У сучасних приладах і спорудах поширені різноманітні відбивачі, призначені для концентрування в заданих точках простору відбитих від них променів [4]. На ефективність функціонування перерахованих пристроїв істотно впливають геометричні форми їхніх відбивних поверхонь. Серед таких поверхонь особливу увагу привертають *еліпсоїди*. Цьому сприяє їх загальновідома фокальна властивість – промені, що вийшли з одного *точкового фокуса*, після відбиття мають зібратися в іншому *точковому фокусі*. Однак на практиці важко реалізувати точкове джерело променів, оскільки в номенклатурі виробів переважають трубчасті (або торові) джерела і приймачі випромінювання. Тому доцільними будуть дослідження, спрямовані на розширення традиційних форм відбивачів.

На рис. 1 наведено схему відбивальної системи, розташовану в системі координат *Oxyz*. Тут $S\ (x_S, y_S, z_S)$ – точка джерела випромінювання; $T(x, y, z)$ – точка на відбивальній поверхні; $A(x_A, y_A, z_A)$ – точка на приймачі відбитого випромінювання.

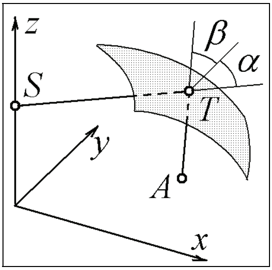

Рис. 1. Схема відбивальної системи

Вважатимемо, що форму відбивача можна описати рівнянням у вигляді $z = z(x, y)$. Для складання диференціального рівняння, якому задовольняє функція $z(x, y)$, визначимо три вектори, що характеризують відбиття: вектор нормалі до опуклої частини поверхні відбивача $\vec{n} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}$ в точці *T*, вектор, що падає на поверхню відбивача $\vec{ST} = \{x - x_S, y - y_S, z - z_S\}$, та вектор, який за напрямом є протилежним стосовно відбитого променя $\vec{AT} = \{x - x_A, y - y_A, z - z_A\}$.

На основі тотожності виразів для обчислення косинусів кутів α і β, одержуємо шукане диференціальне рівняння в частинних похідних [1, 2]

$$\frac{(x-x_S)\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}+(y-y_S)\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}+z_S-z(x,y)}{\sqrt{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2+(z(x,y)-z_S)^2}}-$$

$$-\frac{(x-x_A)\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}+(y-y_A)\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}+z_A-z(x,y)}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+\left(z(x,y)-z_A\right)^2}}=0 \quad . \tag{1}$$

або, використовуючи позначення Монжа $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}, q=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot$, маємо

$$f(x,y,z,p,q)\equiv\frac{p(x-x_S)+q(y-y_S)+z_S-z}{\sqrt{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2+(z-z_S)^2}}-$$

$$-\frac{p(x-x_A)+q(y-y_A)+z_A-z}{\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+\left(z-z_A\right)^2}}=0 \quad . \tag{2}$$

Рівняння поверхні відбивача можна визначати шляхом розв’язання відносно функції $z = z(x, y)$ диференціального рівняння (2) з граничною умовою

$$x = \varphi(t); \qquad y = \psi(t); \qquad z = \eta(t). \tag{3}$$

Тоді задана просторова крива (3) повинна належати знайденій відбивальній поверхні.

Огляд літературних джерел. В роботах [5, 6] розглянуто питання визначення фокальної поверхні (з двома точковими фокусами), яка б спиралася на задану просторову криву. Було розроблено метод обчислення координат точок на відбивальній поверхні з точковими джерелом і приймачем променів. При цьому вважається, що виконується закон відбиття Декарта-Снеліуса, і що форму „математично гладкого” відбивача можна описати рівнянням $z = z(x, y)$. Для складання диференціального рівняння в частинних похідних, якому б задовольняла функція $z(x, y)$, було використано тотожність виразів для обчислення косинусів кутів падіння і відбиття променя (1).

Вираз (1) покладено в основу диференціального рівняння відносно функції $z = z(x, y)$ для опису поверхні відбивача. Розв’язувати зазначене диференціальне рівняння необхідно з граничною умовою, що є параметричним рівнянням граничної лінії. Тоді задана просторова крива повинна належати знайденій поверхні. Пошук форми відбивальної поверхні шляхом розв’язання диференціального рівняння в частинних похідних є складною задачею [2]. Тому актуальним буде розробка способу для визначення координат точок відбивальної поверхні за умови, що точки джерела і збігу променів розташовані на заданих кривих.

Постановка завдання. Розробити спосіб розв’язання диференціального рівняння з частинними похідними виду (2) методом Лагранжа – Шарпі.

Основна частина. Розглянемо шляхи розв’язання рівняння (2), яке для зручності позначимо як

$$f(x,y,z,p,q)=0 \tag{4}$$

Метод Лагранжа – Шарпі [3] полягає у побудові іншого рівняння в частинних похідних першого порядку

$$g(x, y, z, p, q, a) = 0, \tag{5}$$

де a – довільна постійна, такого що систему рівнянь (4) і (5) можна розв’язати відносно p і q, а також за умови, що диференціал інтегрований

$$dz = pdx + qdy\,. \tag{6}$$

Основний етап у цьому випадку полягає у тому, щоб знайти рівняння (5). Якщо воно знайдено, то ми можемо розв’язати його відносно p і q разом з (4), підставити ці вирази в (6) і потім проінтегрувати. Оскільки одержаний інтеграл буде містити дві довільні постійні a і b, то він буде повним інтегралом рівняння в частинних похідних (4). Тому що рівняння (4) і (5) сумісні, то повинна виконуватися умова

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,p)} + \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,q)} + p\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,p)} + q\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,q)} = 0\,,$$

або

$$f_p\frac{\partial g}{\partial x} + f_q\frac{\partial g}{\partial y} + (pf_p + qf_q)\frac{\partial g}{\partial z} - (f_x + pf_z)\frac{\partial g}{\partial p} - (f_y + qf_z)\frac{\partial g}{\partial q} = 0.$$

Таким чином, допоміжні рівняння мають вигляд:

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-(f_x + pf_z)} = \frac{dq}{-(f_y + qf_z)}. \tag{7}$$

Якщо ми зможемо знайти розв’язок (7), що містить p або q, або їх сумісно, то цей розв’язок можна буде обрати як диференціальне рівняння (5). Він також буде містити довільну постійну. Отже, розв’язуючи рівняння (4) і (5) відносно p і q, ми зможемо підставити ці вирази в (6) і одержати шуканий розв’язок інтегруванням.

Приклад 1. Використовуючи метод Лагранжа – Шарпі, розв’язати рівняння в частинних похідних

$$(p^2 + q^2)y = qz. \tag{8}$$

Дане рівняння має вигляд $f(x, y, z, p, q) \equiv (p^2 + q^2)y - qz = 0.$

Беручи частинні похідні, маємо:

$$f_p = 2py, \quad f_q = 2qy - z, \quad f_z = -q, \quad f_x = 0, \quad f_y = p^2 + q^2.$$

Допоміжні рівняння Лагранжа – Шарпі мають вигляд:

$$\frac{dx}{2py} = \frac{dy}{2qy - z} = \frac{dz}{2y(p^2 + q^2) - qz} = \frac{dp}{pq} = \frac{dq}{-p^2}.$$

З рівності останніх двох членів слідує

$$\frac{dp}{q} = \frac{dq}{-p} \quad \Rightarrow \quad pdp + qdq = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 + q^2 = a^2. \tag{9}$$

З (8) і (9) маємо $q = \dfrac{a^2 y}{z}\cdot$ З рівняння (9) випливає, що

$$p^2 = a^2 - q^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{a}{z}\sqrt{z^2 - a^2 y^2}.$$

Отже, рівність $dz = pdx + qdy$ дає:

$$zdz = a\sqrt{z^2 - a^2 y^2}dx + a^2 ydy \quad \Rightarrow adx = \frac{1}{2}\frac{d(z^2 - a^2 y^2)}{\sqrt{z^2 - a^2 y^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad ax = \sqrt{z^2 - a^2 y^2} - b \quad \Rightarrow \quad z^2 - a^2 y^2 = (ax+b)^2.$$

Перепозначивши константи, маємо шуканий розв'язок у вигляді $(x+b)^2 + y^2 = az^2$.

Приклад 2. Розв'язати методом Лагранжа – Шарпі рівняння

$$z^2 = pqxy. \tag{10}$$

Рівняння запишемо у вигляді $f(x,y,z,p,q) \equiv pqxy - z^2 = 0.$
Частинне диференціювання дає

$$f_p = qxy, \quad f_q = pxy, \quad f_z = -2z, \quad f_x = pqy, \quad f_y = pqx,$$

і допоміжні рівняння Лагранжа – Шарпі приймають вигляд

$$\frac{dx}{qxy} = \frac{dy}{pxy} = \frac{dz}{2pqxy} = \frac{dp}{p(2z - qy)} = \frac{dq}{q(2z - px)}. \tag{11}$$

Беручи крайні рівності і розглядаючи різниці чисельників і знаменників дробів, що входять до них, маємо:

$$\frac{\frac{dp}{p} - \frac{dq}{q}}{-qy + px} = \frac{\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}}{px - qy} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{d} + \frac{dq}{q},$$

звідки

$$px = a^2 qy, \tag{12}$$

де a – довільна постійна. Тут позначення константи через a^2 правомірно, оскільки з рівняння (10) випливає, що px і qy одного знака.

Підставляючи це співвідношення в (10), одержуємо:

$$z^2 = a^2 q^2 y^2 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{z}{ay} \text{ і } p = \frac{az}{x}.$$

Таким чином, $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{adx}{x} + \dfrac{1}{a}\dfrac{dy}{y}$, отже, $\ln|z| = \ln\left|bx^a y^{\frac{1}{a}}\right|$ або $z = bx^a y^{\frac{1}{a}}$,

Що і є шуканим розв'язком.

Приклад 3. Розв'язати методом Лагранжа – Шарпі:

$$p = (z + qy)^2. \tag{13}$$

Перепишемо рівняння у вигляді $f(x, y, z, p, q) \equiv (z + qy)^2 - p = 0.$ Допоміжні рівняння Лагранжа – Шарпі мають вигляд:

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{2y(z+qy)} = \frac{dz}{-p+2qy(z+qy)} = \frac{dp}{-2p(z+qy)} = \frac{dq}{-4q(z+qy)}. \tag{14}$$

З рівності другого і п'ятого членів маємо:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dq}{-2q} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{a}{y^2}. \tag{15}$$

Підставляючи це в (13), одержуємо $p = \left(z + \frac{a}{y}\right)^2$. Таким чином, з рівності $dz = pdx + qdy$ слідує, що

$$dz = \left(z + \frac{a}{y}\right)^2 dx + \frac{a}{y^2}dy \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{d\left(z + \frac{a}{y}\right)}{\left(z + \frac{a}{y}\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{z + \frac{a}{y}} = b \quad \Rightarrow \quad x + \frac{y}{a + yz} = b.$$

Це є шуканий розв'язок.

Далі, для повноти досліджень, розглянемо рівняння, що містять тільки p і q. Нехай дане рівняння в частинних похідних $f(p,q) = 0$. Тоді допоміжні рівняння Лагранжа – Шарпі мають вигляд:

$$\frac{dx}{f_p} = \frac{dy}{f_q} = \frac{dz}{pf_p + qf_q} = \frac{dp}{-(f_x + pf_z)} = \frac{dq}{-(f_y + qf_z)}.$$

Оскільки $f_x = f_y = f_z = 0$, ми маємо $\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} \quad \Rightarrow \quad p = a \quad$ и $\quad q = b$. Оскільки $f(p,q) = 0$, то $f(a,b) = 0$, і в загальному випадку b можна виразити у вигляді $b = \varphi(a)$. Таким чином, $p = a$ и $q = \varphi(a)$. Диференціал $dz = pdx + qdy$ приймає вид $dz = adx + \varphi(a)dy$, відкіля, перепозначивши константи, маємо шуканий розв'язок $z = ax + \varphi(a)y + b.$

Приклад 4. Розглянемо рівняння $p + q = pq.$ Тут

$$f \equiv p + q - pq = 0 \tag{16}$$

містить тільки p і q.

З рівнянь Лагранжа – Шарпі маємо $p = a, \quad q = b.$ Підставляючи ці вирази в (16), одержуємо $a + b - ab = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a}{a-1}.$ Таким чином, $dz = pdx + qdy$ приводить до шуканого розв'язку $z = ax + \frac{a}{a-1}y + b$ або $(a-1)(ax - z) + ay = c.$

Проведені дослідження показали складність застосування методу Лагранжа – Шарпі до розв'язання рівняння (2), який полягає у пошуку рівняння вигляду (5). Цей шлях розв'язку доцільний лише для аналітично не складних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Більш універсальним для розв'язання рівняння в частинних похідних є метод Якобі [3]. Нехай задано рівняння

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{17}$$

Будемо шукати розв'язок в неявному вигляді $u(x, y, z) = 0$, де u – функція, що залежить тільки від *x, y, z*. Тоді $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$ отже, $p = -\frac{u_1}{u_3}, u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, u_3 = \frac{\partial u}{\partial z}.$ Аналогічно, $q = -\frac{u_2}{u_3}, u_2 = \frac{\partial u}{\partial y}.$ Підставляючи ці вирази для p і q у (17), одержуємо рівняння виду

$$f(x, y, z, u_1, u_2, u_3) = 0, \tag{18}$$

у якому залежна змінна *u* відсутня.

У методі Якобі вводяться ще два рівняння в частинних похідних:

$$g(x, y, z, u_1, u_2, u_3, a) = 0, \tag{19}$$

$$h(x, y, z, u_1, u_2, u_3, b) = 0, \tag{20}$$

де *a* і *b* – довільні постійні, такі що рівняння (18), (19) і (20) можна розв'язати відносно u_1, u_2, u_3 , і диференціал

$$du = u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz \tag{21}$$

інтегрований.

Рівняння (18), (19) і (20) повинні бути попарно сумісні. Таким чином, повинно виконуватися

$$[f, g] = 0, \quad [g, h] = 0, \quad [h, f] = 0,$$

де прийнято позначення

$$[f, g] = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, u_1)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, u_2)} + \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, u_3)}.$$

Умова $[f, g] = 0$ сумісності рівнянь (18) і (19) розкривається у вигляді

$$f_{u_1}\frac{\partial g}{\partial x} + f_{u_2}\frac{\partial g}{\partial y} + f_{u_3}\frac{\partial g}{\partial z} - f_x\frac{\partial g}{\partial u_1} - f_y\frac{\partial g}{\partial u_2} - f_z\frac{\partial g}{\partial u_3} = 0. \tag{22}$$

Це лінійне рівняння в частинних похідних першого порядку. Отже, його розв'язок задається допоміжними рівняннями

$$\frac{dx}{f_{u_1}} = \frac{dy}{f_{u_2}} = \frac{dz}{f_{u_3}} = \frac{du_1}{-f_x} = \frac{du_2}{-f_y} = \frac{du_3}{-f_z}. \tag{23}$$

Будь-які два розв'язки рівнянь (23), що містять u_1, u_2 або u_3, будуть служити як рівняння (19) і (20) при виконанні умов сумісності. Розв'яжемо рівняння (18), (19) і (20) відносно u_1, u_2 і u_3 і підставимо ці вирази в (21). Інтегрування цього диференціала дасть шукане рішення [3].

Приклад 5. Використовуючи метод Якобі, розв'язати рівняння

$$p^2 x + q^2 y = z. \tag{24}$$

Покладемо $p = -\frac{u_1}{u_3}$ і $q = -\frac{u_2}{u_3}$. Рівняння (24) приймає вигляд:

$$xu_1^2 + yu_2^2 - zu_3^2 = 0. \tag{25}$$

Отже, маємо такі допоміжні рівняння Якобі:

$$\frac{dx}{2u_1 x} = \frac{dy}{2u_2 y} = \frac{dz}{-2u_3 z} = \frac{du_1}{-u_1^2} = \frac{du_2}{-u_2^2} = \frac{du_3}{-u_3^2}.$$

З рівності першого і четвертого членів маємо: $xu_1^2 = a$, аналогічно $yu_2^2 = b$, відкіля, з огляду на (25), одержуємо: $u_1 = \sqrt{\frac{a}{x}}$, $u_2 = \sqrt{\frac{b}{y}}$ і $u_3 = \sqrt{\frac{a+b}{z}}$.

Співвідношення $du = u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz$ приймає вигляд:

$$du = \sqrt{\frac{a}{x}}dx + \sqrt{\frac{b}{y}}dy + \sqrt{\frac{a+b}{z}}dz,$$

відкіля маємо шуканий розв'язок

$$u = 2\sqrt{ax} + 2\sqrt{by} + 2\sqrt{(a+b)z} + c. \tag{26}$$

Розглянутий метод Якобі дозволяє одержати аналітичний розв'язок диференціального рівняння в частинних похідних лише у випадку, коли можливо скласти допоміжні рівняння.

Але для рівняння виду (2) такі рівняння матимуть надто громіздкий вигляд, і визначити їх розв'язки в замкнутому аналітичному вигляді складно. Тому для спрощення аналітичних перетворень необхідно використовувати математичного процесора Maple [5, 6].

Висновок. На даному етапі досліджень у середовищі математичного процесора Maple за допомогою оператора PDEplot можна побудувати лише наочне зображення відбивальної поверхні, яка спирається на задану граничну криву, а для визначення координат її точок необхідно складати додаткову програму.

Тому в подальшому задачу пропонується зводити до розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь.

Література

1. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. / *Курант Р.* – М.: Наука.-т.2.-1970.-672с.

2. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. / *Федорюк М.В.* - М.: Наука. - 1985. – 448 с.

3. *Шарма Дж.Н.* Уравнения в частных производных для инженеров. / *Шарма Дж.Н., Сингх К.* – М.: Техносфера, 2002. – 320 с.

4. *Дворецкий А.Т.* Геометрическое моделирование отраженных энергетических потоков в гелиотехнике. – Дисс. доктора техн. наук: 05.05.01. / *Дворецкий А.Т.* – Симферополь, 2001. – 335 с.

5. *Сітабдієва О.Л.* Про форму відбивальної поверхні, якій належить дана просторова лінія // Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, екологія, дизайн. Сборник научных трудов. / *Сітабдієва О.Л.* - Киев: КНУТИД, 2004. – С. 120-129

6. *Сітабдієва О.Л.* Геометрична форма відбивальної поверхні, яка б спиралася на задану просторову лінію / *Сітабдієва О.Л.* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КНУБА, 2004. Вип. 74. – С. 275 – 281

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА - ШАРПИ

С.В.Тютюнников, О.Л.Ситабдиєва

Приведен способ решения методом Лагранжа - Шарпи дифференциального уравнения с частными производными, предназначенного для описания отражательных поверхностей.

THE SOLUTION OF THE EQUATION WITH QUOTIENTS DERIVATIVES THE LAGRANGE-SHARPIE METHOD

S. Tutunnikov, O. Sitabdieva

The decision method by Lagrange-Sharpie method of a differential equation with the private derivatives, intended for the description of reflective surfaces is given.