УДК 515.2

С. А. Устенко, к.т.н.,
О. Ю. Агарков

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФОРМУЛ СЕРРЕ-ФРЕНЕ

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

Пропонується метод моделювання просторових кривих із застосуванням рівнянь Серре-Френе, які інтегруються числовим методом Рунге-Кутта за умови, що кривина і скрут підпорядковуються кусково-лінійним залежностям від довжини дуги обводу.

Постановка проблеми. Криві лінії широко використовуються у різних галузях науки і техніки. Вони поширені в геометричному моделюванні різних технічних об’єктів. Кривими лініями описуються обводи суден, літаків, автомобілів, профілі лопаток турбін і компресорів тощо. Поява нових сфер застосування кривих ліній вимагає від фахівців з прикладної геометрії створення нових методів їх генерації. Отже, проблема розробки методів геометричного моделювання кривих ліній і, особливо, просторових є актуальною. Вона має теоретичне і практичне значення.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Геометричному моделюванню кривих ліній та їх дослідженню присвячено достатньо публікацій [1–6]. Вагомий внесок в дослідження плоских і просторових кривих ліній зроблено професором С.Ф. Пилипакою та його учнями.

Треба відзначити, що більшість відомих публікацій присвячена дослідженню плоских кривих. Так, у роботах [1–3] плоскі криві моделюються за умови, що задано характер розподілу кривини від довжини дуги, який може бути лінійним, параболічним або кубічним. Подібний же підхід застосовано в роботі [5] при побудові просторової кривої. Для придання кривій просторовості додатково розглядається її скрут, залежність якого від довжини дуги прийнята лінійною.

Формування цілей статті. Метою статті є розробка методу моделювання просторових кривих числовим інтегруванням рівнянь Серре-Френе методом Рунге-Кутта та застосуванням додаткових умов, за які приймаються кусково-лінійні залежності кривини і скруту кривої від її довжини.

Основна частина. Відомо [4], що в довільній точці M просторової кривої можна провести дотичну $\boldsymbol{t}$, нормаль $\boldsymbol{n}$ і бінормаль $\boldsymbol{b}$. Попарно ці вектори утворюють три площини: стичну, нормальну і спрямну (рис. 1).

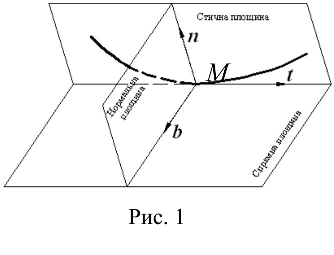

Рис. 1

Сукупність трьох прямокутних координатних осей і трьох координатних площин називають *супроводжуючим тригранником* просторової кривої в точці M.

Вважаючи криву віднесену до

параметра s:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s),$$

можна і вектори супроводжуючого тригранника також вважати такими, що залежать від параметра s:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(s), \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(s), \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(s).$$

Серре і Френе розклали похідні від векторів $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ по дузі s і отримали наступні співвідношення:

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k\boldsymbol{n}; \\ \dfrac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -k\boldsymbol{n} + T\boldsymbol{b}; \\ \dfrac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -T\boldsymbol{n}. \end{cases} \tag{1}$$

Компоненти векторів $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ і їх похідні можна записати наступним чином:

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{dX}{ds}; \\ t_2 = \dfrac{dY}{ds}; \\ t_3 = \dfrac{dZ}{ds}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{dt_1}{ds} = kn_1; \\ \dfrac{dt_2}{ds} = kn_2; \\ \dfrac{dt_3}{ds} = kn_3; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{db_1}{ds} = -Tn_1; \\ \dfrac{db_2}{ds} = -Tn_2; \\ \dfrac{db_3}{ds} = -Tn_3; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{dn_1}{ds} = -kt_1 + Tb_1; \\ \dfrac{dn_2}{ds} = -kt_2 + Tb_2; \\ \dfrac{dn_3}{ds} = -kt_3 + Tb_3. \end{cases}$$

Для числової реалізації та виконання розрахунків представимо вектори $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ через їх компоненти, які позначимо літерою z з відповідним індексом, що буде змінюватися у межах від 1 до 9. Тобто, матимемо:

$$\boldsymbol{t} = \{z_1, z_2, z_3\}; \quad \boldsymbol{n} = \{z_4, z_5, z_6\};$$
$$\boldsymbol{b} = \{z_7, z_8, z_9\}.$$

Компоненти z_1, z_2, z_3 є похідними від координат X, Y, Z точки просторової кривої від довжини дуги s. Їх можна записати у наступному вигляді:

$$z_1 = \frac{dX}{ds}; \quad z_2 = \frac{dY}{ds}; \quad z_3 = \frac{dZ}{ds}. \tag{2}$$

З першого рівняння системи (1) будемо мати:

$$\frac{dz_1}{ds} = kz_4, \quad \frac{dz_2}{ds} = kz_5, \quad \frac{dz_3}{ds} = kz_6,$$

з другого рівняння:

$$\frac{dz_4}{ds} = -kz_1 + Tz_7; \quad \frac{dz_5}{ds} = -kz_2 + Tz_8; \quad \frac{dz_6}{ds} = -kz_3 + Tz_9,$$

і, нарешті, з третього рівняння цієї системи можна записати:

$$\frac{dz_7}{ds} = -Tz_4; \quad \frac{dz_8}{ds} = -Tz_5; \quad \frac{dz_9}{ds} = -Tz_6.$$

Отже, маємо систему із дев’яти звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Додаємо до неї десяте рівняння, яке має вигляд

$$z_{10} = s,$$

а також три рівняння у вигляді (2).

Повна система, яка описує просторову криву, складається із тринадцяти рівнянь. Для її числового розв’язання застосуємо метод Рунге-Кутта четвертого порядку у вигляді, удосконаленому Ральстоном [7] та доповненому предіктор-коректор методом, модифікованим Хеммінгсом. Програма, що реалізує цей метод, є високоефективною і швидкозбіжною. Результатом її роботи є координати X, Y, Z точок кривої.

Нижня і верхня границі інтервалу інтегрування, вихідне значення приросту незалежної величини та максимальна похибка виконання розрахунків задаються з вихідними даними.

До цієї програми додається підпрограма розрахунку правих частин похідних формул Серре-Френе. У цій підпрограмі використовуються кусково-лінійні залежності кривини і скруту від довжини дуги. Параметри S_2 і S_3 (рис. 2) відповідають значенням довжини дуги, де відбувається злам епюр кривини і скруту. Максимальні значення кривини K і скруту T на цих епюрах позначені літерами φ і ψ.

На підставі запропонованого методу моделювання просторових кривих розроблено програму розрахунків і візуалізації на екрані монітора отриманих результатів. Графічні дані формувалися таким чином, щоб вони у підсумку відповідали прийнятому в нарисній геометрії методу побудови трикартинних комплексних креслень. Прийнято, що крива, яка моделюється, починається з точки з нульовими координатами.

Деякі отримані результати моделювання просторових кривих показані на рис. 3–6. Вони мають чисто ілюстративний характер, демонструють можливості запропонованого метода моделювання просторових кривих на базі формул Серре-Френе і кусково-лінійних законів зміни кривини та скруту.

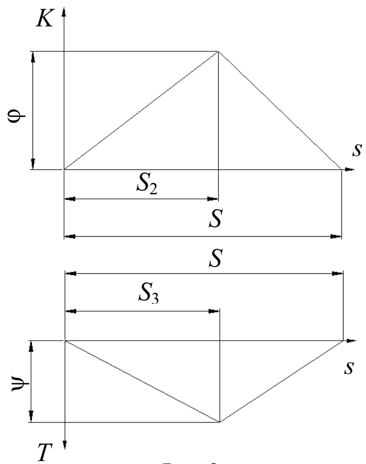

Рис. 2

Для остаточного встановлення працездатності розробленого метода моделювання просторових кривих були побудовані коло та гвинтова лінія. На рис. 7 показано комплексне креслення кола, отриманого розробленою програмою. По трьох довільних точках кривої побудовано трикутник, навколо якого описане коло. Як видно всі розрахункові точки повністю збігаються з колом, описаним навколо трикутника.

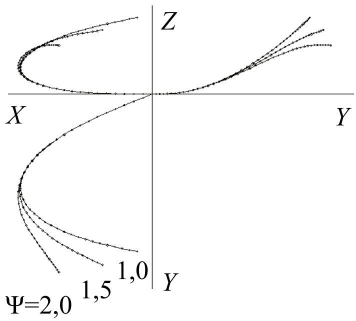

Рис. 3

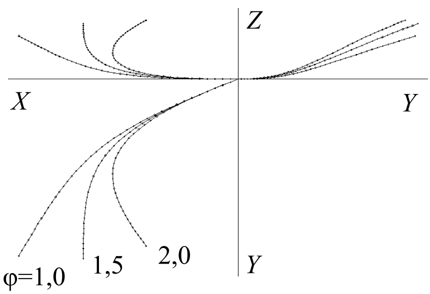

Рис. 4

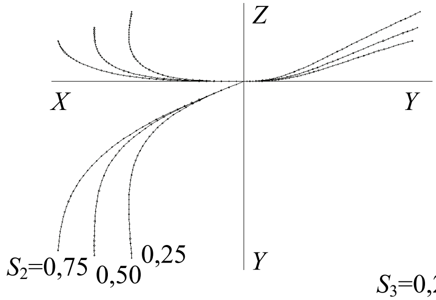

Рис. 5

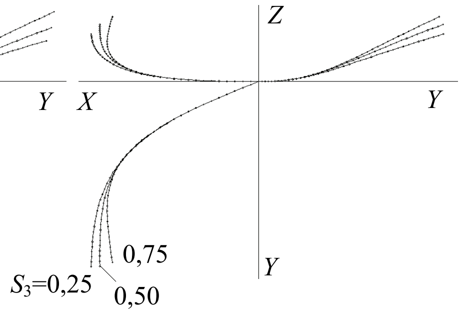

Рис. 6

На рис. 8 наведено трикартинне креслення гвинтової лінії, а праворуч показано аксонометричну проекцію цієї кривої.

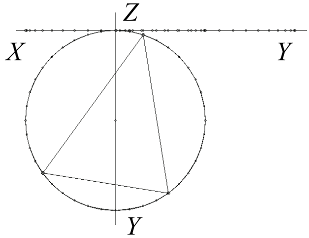

Рис. 7

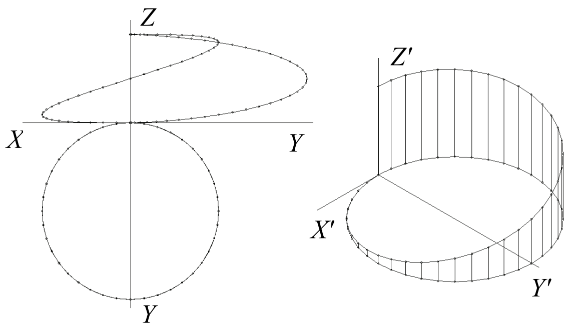

Рис. 8

Зрозуміло, що при моделюванні цих кривих кривина була величиною сталою, а для гвинтової лінії додатково константою був скрут.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Запропонований метод геометричного моделювання просторових кривих ліній, який базується на застосуванні рівнянь Серре-Френе і кусково-лінійних графіків залежностей кривини і скруту, продемонстрував можливість моделювання кривих у широкому діапазоні варіювання параметрів, які визначають форму кусково-лінійних графіків кривини і скруту.

Подальші дослідження мають бути спрямовані на забезпечення проходження просторових кривих через визначені точки із заданими кутами нахилу дотичних.

Література

1. *Борисенко В.Д.* Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням лінійного елемента кривини / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, В.Є. Спіцин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С. 43–49.
2. *Борисенко В.Д.* Геометричне моделювання плоских криволінійних обводів за заданим параболічним законом розподілу їх кривини / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, В.С. Комар // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2007. Вип.4. – Том 35. – С. 26–31.
3. *Борисенко В.Д.* Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу із застосуванням кубічного закону розподілу його кривини / В.Д. Борисенко, С.А. Устенко, В.С. Комар // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 79. – С. 52–57.
4. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии / П.К. Рашевский. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.
5. *Устенко С.А.* Геометричне моделювання просторових кривих ліній заданих кривини та скруту / С.А. Устенко // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Х.: ХДУХТ, 2011. – Вип. 29. – С. 86–90.
6. *Фокс А.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
7. *Ralston Wilf.* Mathematical methods for digital computers. – Wiley, New York – London, 1960. – P. 95–109.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОРМУЛ СЕРРЕ-ФРЕНЕ

С.А. Устенко, А.Ю. Агарков

Предлагается метод моделирования пространственных кривых с применением уравнений Серре-Френе, интегрируемым числовым методом Рунге-Кутта при условии, что кривизна и кручение кривой кусочно-линейно зависят от длины дуги обвода.

GEOMETRICAL MODELING OF SPATIAL CURVES WITH THE USE OF FORMULAS OF SERRE-FRENE

S.A. Ustenko, A.Yu. Agarkov

The method of spatial curves modeling is offered with the use of equations of Serre- Frene, which are integrated by the numerical method of Runge-Kutta on condition that curvature and twisting submit piece-linear dependences on length of arc.