УДК 514.7

Н.М. Аушева, к.т.н., доц.
А.А. Демчишин, к.т.н.

ПОБУДОВА ПОВЕРХОНЬ З ОРТОГОНАЛЬНИМИ КООРДИНАТНИМИ СІТКАМИ НА ОСНОВІ ІЗОТРОПНИХ КРИВИХ

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

У роботі запропоновано новий метод побудови плоских ортогональних та ізотермічних координатних сіток на основі ізотропних кривих Без'є 3-го порядку. Отримано умови утворення таких сіток із застосуванням конформного та квазіконформного відображення. Наведено приклад використання існуючого способу одержання просторової ортогональної сітки на основі плоскої.

Постановка проблеми. При конструюванні поверхонь часто виникає питання одержання поверхонь з конкретним типом координатної сітки, яка володіє специфічними властивостями. Ці властивості, як правило, спрощують вирази першої та другої квадратичних форм поверхні. Постійне доповнення апарату формоутворення таких сіток, призводить до полегшення розв'язання прикладних задач, які спираються на диференціальні властивості поверхонь.

Аналіз останніх досліджень. Вільгельмом Бляшке [1] - автором використання ізотропних кривих для моделювання мінімальних поверхонь, знайдено параметричні рівняння просторових кривих нульової довжини та побудовано відповідні алгебраїчні мінімальні поверхні.

Конструюванню і перетворенню поверхонь із збереженням ортогональності сіток координатних ліній та ліній кривини присвячено дисертацію [2]. Розглянуто послідовність утворення плоских ортогональних сіток різними способами, перетворення їх у поверхні та подальше конформне перетворення одержаних поверхонь із збереженням вказаних властивостей. Авторами роботи [3] пропонується з плоскої ортогональної сітки утворити поверхню, віднесену до сімей ортогональних координатних ліній, на основі розподілення однієї сім'ї плоскої сітки по висоті.

У роботах [4-6] проводиться дослідження побудови мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих та кривих Без'є. В монографії [7] пропонується розглядати застосування функцій комплексної змінної для графічного подання узагальнених паралельних множин у вигляді сіток квазіпаралельних ліній.

Аналіз зазначених робіт свідчить, що побудова координатних сіток зі специфічними властивостями є досить кропітким завданням. Кожний з методів є адаптованим до конкретної прикладної задачі.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою даної роботи є розробка способу конструювання поверхонь, віднесених до сімей ортогональних координатних ліній, на основі ізотропних кривих Без'є *3*-го порядку. Використання кривих Без'є дозволить зробити метод генерації сітки гнучким до зміни умов фізичного процесу.

Основна частина. Будемо будувати сітки на основі плоских кривих. В якості керуючої кривої візьмемо криву Без'є $\boldsymbol{n}$-го порядку:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{i}=0}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}), \text{ де } \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{i}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j})!} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{j}} (1-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}} = \lfloor \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}} \quad \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{j}} \rfloor$

Умова ізотропності плоскої кривої Без'є $\boldsymbol{n}$-го порядку має вигляд:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}+1} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{j}+1} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{j}}), \\ (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}+1} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{j}}) = -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{j}+1} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{j}}), \\ (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}) = -\boldsymbol{I}(\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{n}}) \end{cases} \tag{2}$$

де $\boldsymbol{j} = 0..(\boldsymbol{n}-1)$.

Конформне відображення. Розглянемо кубічну ізотропну криву Без'є в наступному вигляді - підставимо в рівняння (1) вирази (2), в якості параметра $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{v}$:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}_0(1-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})^3 + 3\boldsymbol{x}_1(1-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})^2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}) + 3\boldsymbol{x}_2(1-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})^2 + \boldsymbol{x}_3(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})^3 \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{y}_0(1-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})^3 + 3(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{y}_0)(1-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})^2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v}) + \\ 3(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{y}_0)(1-\boldsymbol{u}-\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})^2 + (\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2) + \\ \boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{v})^3 \end{gathered} \tag{3}$$

Відокремлюючи дійсну частину від уявної, одержимо дві сітки на площині. Розрахуємо коефіцієнти першої квадратичної форми для сітки, що побудована на основі дійсної частини. Для цього візьмемо частинні похідні від функцій (3):

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 3((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)-2(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{u}^2 + 6(-(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0) + \\ (\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1))\boldsymbol{u} - 3((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)-2(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{v}^2 + 3(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0) \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 6(-(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)+2(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)-(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} + 6((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0) - \\ (\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1))\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 6(-(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)+2(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)-(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} + 6((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0) - \\ (\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1))\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -3((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)-2(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{u}^2 - 6(-(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0) + \\ (\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1))\boldsymbol{u} + 3((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)-2(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{v}^2 - 3(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0) \end{gathered} \tag{4}$$

Аналізуючи (4) будемо мати:

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{5}$$

Одержані рівняння (5) підставимо у вирази для першої квадратичної форми:

$$F = x_u(u,v)x_v(u,v) + y_u(u,v)y_v(u,v) = x_u(u,v)y_u(u,v) - y_u(u,v)x_u(u,v) = 0,$$

$$E = x_u(u,v)^2 + y_u(u,v)^2 = y_v(u,v)^2 + y_u(u,v)^2,$$

$G = x_v(u,v)^2 + y_v(u,v)^2 = y_u(u,v)^2 + y_v(u,v)^2$, тобто $E = G$.

Значення $F = 0$ свідчить, що побудована сітка є ортогональною, в той час, як $E = G$ доводить, що сітка є ізотермічною.

Квазіконформне відображення. Дослідимо сітку, побудовану на основі квазіконформного відображення $x + Iy = ku + Iv$ та ізотропної кубічної кривої Без'є. Слідуючи підходу одержання виразу (5), прийдемо до рівнянь (6):

$$kx_v(u,v) = y_u(u,v), \quad x_u(u,v) = -ky_v(u,v) \tag{6}$$

Тепер розрахуємо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$F = -ky_v(u,v)x_v(u,v) + kx_v(u,v)y_v(u,v) = 0,$$

$$E = k^2(x_v(u,v)^2 + y_v(u,v)^2),$$

$G = x_v(u,v)^2 + y_v(u,v)^2$, тобто $E = k^2 G$.

Сітка буде ортогональна, але не ізотермічна.

Проведемо дослідження сітки, яка побудована за допомогою відображення $t = u + Ivk$, одержимо:

$$x_v(u,v) = ky_u(u,v), \quad kx_u(u,v) = -y_v(u,v) \tag{7}$$

Розрахуємо коефіцієнти для першої квадратичної форми:

$$F = x_u(u,v)ky_u(u,v) - y_u(u,v)kx_u(u,v) = 0,$$

$$E = x_u(u,v)^2 + y_u(u,v)^2,$$

$G = k^2(y_u(u,v)^2 + x_u(u,v)^2)$, тобто $k^2 E = G$.

Сітка буде ортогональна, але не ізотермічна.

Приклад 1. Продемонструємо побудову сітки на основі ізотропної кривої Без'є *3*-го порядку, якщо задані наступні значення: $x_{0\mathrm{Re}} = 1.0$, $x_{1\mathrm{Re}} = 2.0$, $x_{2\mathrm{Re}} = 4.0$, $x_{3\mathrm{Re}} = 7.0$, $y_{0\mathrm{Re}} = 3.0$, $y_{1\mathrm{Re}} = 1.0$, $y_{2\mathrm{Re}} = 3.0$, $y_{3\mathrm{Re}} = 1.0$, $x_{0\mathrm{Im}} = 2.0$, $y_{0\mathrm{Im}} = 3.0$. Невідомі уявні координати точок будемо знаходити на основі виразу (2): $x_{1\mathrm{Im}} = 4.0$, $y_{1\mathrm{Im}} = 4.0$, $x_{2\mathrm{Im}} = 2.0$, $y_{2\mathrm{Im}} = 6.0$, $x_{3\mathrm{Im}} = 4.0$, $y_{3\mathrm{Im}} = 9.0$. В якості параметра:

- підставимо $t = u + Iv$ (рис. 1а):

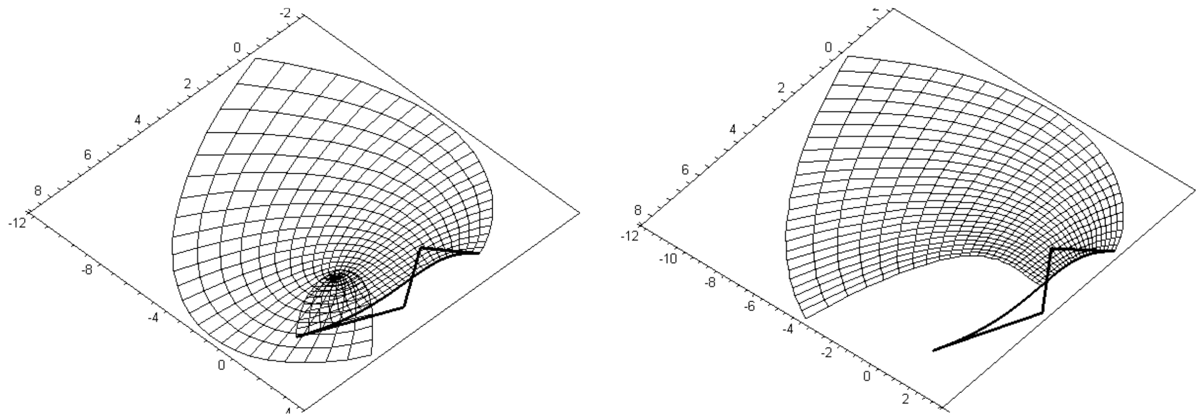
$$x(u,v) = 1 - 6v - 3v^2 + 3u^2 + 24uv + 3u - 24u^2v + 8v^3,$$

$$y(u,v) = 3 - 3v - 12v^2 + 12u^2 - 6uv - 6u + 24uv^2 - 8u^3.$$

- підставимо $t = 0.5u + Iv$ (рис. 1б):

$$x(u,v) = 1 - 6v - 3v^2 + 0.75u^2 + 12uv + 1.5u - 6u^2v + 8v^3,$$

$$y(u,v) = 3 - 3v - 12v^2 + 3u^2 - 3uv - 3u + 12uv^2 - u^3.$$



а) б)

Рис.1. Дійсна частина плоскої сітки при завданні:
а) $t = u + Iv$; б) $t = 0.5u + Iv$

Для того, щоб з плоскої ортогональної сітки утворити поверхню, яка буде віднесена до ортогональної *u*-*v*-сітки, потрібно одну сім'ю плоскої сітки розподілити по висоті z по деякому закону. Такий спосіб формування поверхні застосовано в своїх роботах Дзюбою та Ковальовим. У відповідності до зазначеного методу, рівняння $z = z(u, v)$ має бути залежне тільки від однієї змінної: $z = z(u)$ або ж $z = z(v)$. В такому випадку частинна похідна функціональної залежності z буде дорівнювати нулю, і форма F, при переході від плоскої ортогональної сітки до просторової, не зміниться, тобто буде дорівнювати нулю, отже поверхня буде віднесена до сімей ортогональних координатних ліній.

Розглянемо дійсну частину сітки на основі ізотропною кривою Без'є та додамо залежність $z = z(u)$ у вигляді функції (1):

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}(x_0(1-t)^3 + 3x_1(1-t)^2 t + 3x_2(1-t)t^2 + x_3 t^3), \\ y(t) &= \mathrm{Re}(y_0(1-t)^3 + 3(I(x_1 - x_0) + y_0)(1-t)^2 t + 3(I(x_2 - x_1) + I(x_1 - \\ &\quad x_0) + y_0)(1-t)t^2 + (I(x_3 - x_2) + I(x_2 - x_1) + I(x_1 - x_0) + y_0)t^3), \\ z(t) &= \mathrm{Re}(z_0(1-u)^3 + 3z_1(1-u)^2 u + 3z_2(1-u)u^2 + z_3 u^3), \end{aligned} \qquad (8)$$

де $t = u + Iv$, або $t = u + Ivk$, або $t = ku + Iv$.

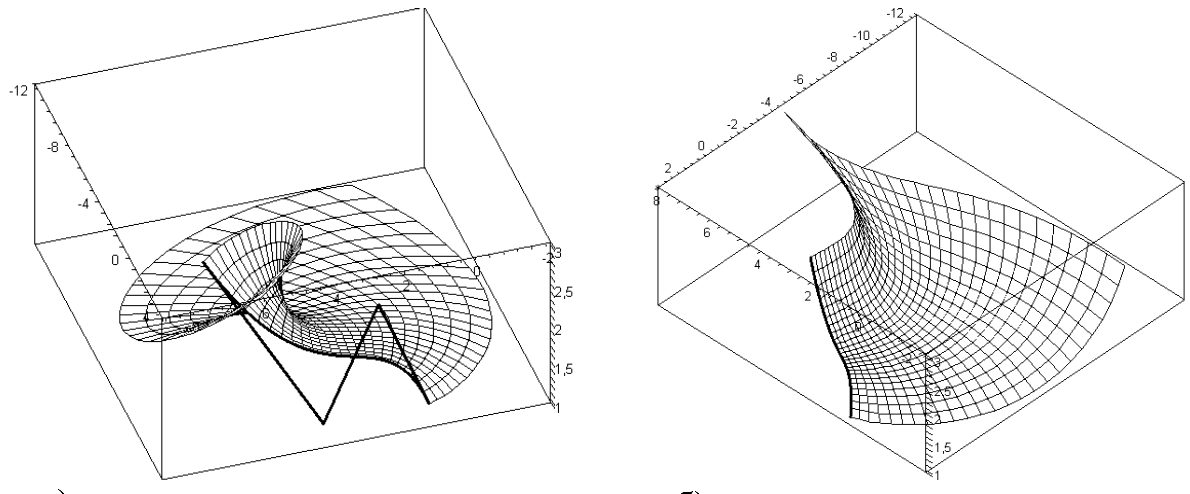
Для випадків $t = u + Iv$ та $t = u + Ivk$ будемо мати поверхню з напрямною просторовою кривою Без'є, а для випадку $t = ku + Iv$ просторова крива буде мати задану проекцію на сітці.

Якщо задати залежність $z = z(v)$, то поверхня буде побудована на основі плоскої кривої.

Приклад 2. Побудуємо поверхні на основі плоскої сітки, використовуючи значення координат ізотропної кривої з *прикладу 1*. В якості функції залежності третьої координати візьмемо:

$$z(u) = (1-u)^3 + 6(1-u)^2 u + 3(1-u)u^2 + 3u^3. \qquad (9)$$

Результуючі поверхні відображено на рис.2а,б. Просторова крива Без'є, із залежністю координати аплікат $z = z(u)$, буде напрямною у випадку $t = u + Iv$ та $t = u + Ivk$, для випадку $t = 0.5u + Iv$ - напрямну необхідно обчислювати іншими методами. На рис. 3 зображено графік поведінки функції F, з якого можна зробити висновок, що сітка ортогональна.



а) б)

Рис.2. Поверхня на основі плоскої ізотропної сітки при завданні:
а) $t = u + Iv$; б) $t = 0.5u + Iv$

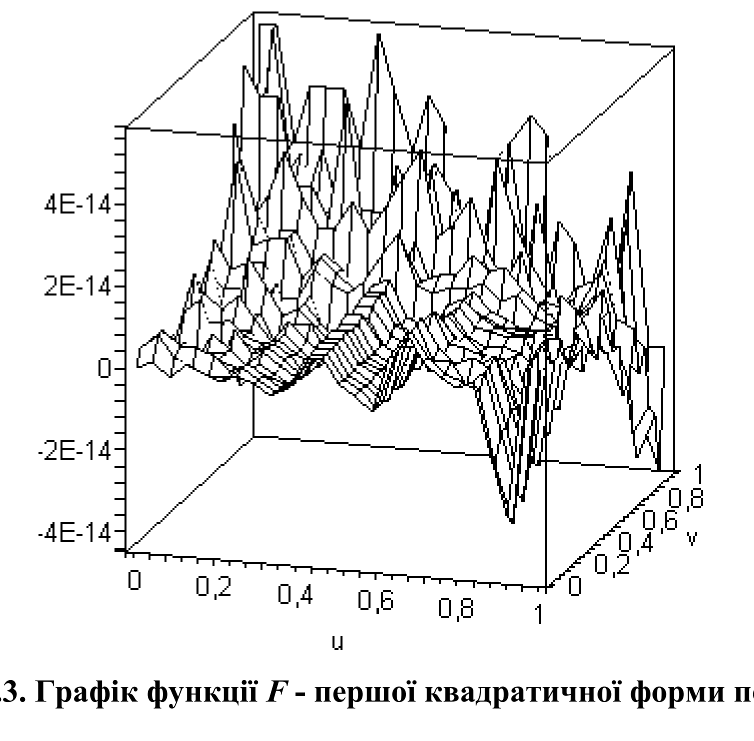


Рис.3. Графік функції *F* - першої квадратичної форми поверхні (8)

Висновки. Дослідження показали, що застосування конформного та квазіконформного відображення до ізотропної кривої Без'є породжує сітки на площині з властивістю ортогональності та ізотермічності, що відкриває нові можливості до вирішення фізичної задачі гідродинаміки ідеальної рідини і аеродинаміки малих швидкостей. В свою чергу, застосування функції однієї змінної для розподілу висот плоскої сітки утворює просторову сітку зі збереженням її ортогональності, що дає підстави її застосування при формуванні моделі в задачі теплопровідності.

Література:

1. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна / В. Бляшке. - Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. - 330 с.
2. Дзюба В. В. Конструювання і перетворення поверхонь із збереженням ліній кривини: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка" / В.В. Дзюба. - К.: КНУБА, 2008. - 21 с.
3. Ковальов С.М., Воронцов О.В. Конструювання сітчастих каркасів поверхонь із горизонталей і ліній найбільшого нахилу // Прикладна геометрія і інженерна графіка. – К.: КІБІ, 1993. - Вип. 54. - С.13-16.
4. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без`є / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикл. геометрія та інженерна графіка". - Вип.88. - К.: КНУБА, 2011р.- С.57-61.
5. Аушева Н.М. Моделювання мінімальних поверхонь Без`є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.50. - Мелітополь: ТДАТУ, 2011. - С.105-109.
6. Аушева Н.М. Визначення сім'ї мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без`є на базі процесора SIMD-архітектури / Н.М. Аушева, А.А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.57. - Мелітополь: ТДАТУ, 2013. - С.10-16.
7. Шоман О.В. Паралельні множини в геометр. моделюванні явищ і процесів: Монографія / О.В. Шоман. - Харків: НТУ «ХПІ», 2007. - 288 с.

GENERATION OF SURFACE HAVING ORTHOGONAL COORDINATES USING ISOTROPIC CURVES

N. Ausheva, A. Demchyshyn

The paper covers the new method for generation of flat meshes having orthogonal and isothermal characteristic using cubic Bezier isotropic curve. Conditions for generation of meshes with the mentioned characteristics applying conformal and quasiconformal mapping are regarded. An example of spatial orthogonal mesh formation from the flat case is carried out and studied.