

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СОСТАВНЫХ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

*Кафедра прикладной математики, Таврический национальный
университет им. В. И. Вернадского,
г. Симферополь*

В работе рассматривается задача использования тригонометрического сплайна для моделирования кривых и поверхностей. Исследуется поведение сплайнов при различных значениях касательных векторов в узлах. Изучается вопрос сходимости решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей при переходе от одной порции к другой. Классический подход к построению составного параметрического сплайна, предложен Фоксом и Праттом. При его практической реализации возникают нежелательные геометрические эффекты и проблемы с численной реализацией. Получено условие, соблюдение которого обеспечивает достаточные условия устойчивого счёта. По результатам исследования создан программный модуль, использование которого позволяет за счет подбора параметров получить желаемый сплайн.

Постановка проблемы. Задачи построения различных сечений объектов, их проекций или полностью поверхностей с использованием машинной графики сводятся к проблеме аналитического описания и графического представления кривых и поверхностей. Для построения составного параметрического сплайна класса гладкости C^2 стандартно используются методика, предложенная А. Фоксом и М. Праттом для полиномиальных сплайнов [1]. Однако оказывается, что при его применении в варианте, изложенном в [1] возникают такие нежелательные геометрические эффекты как, например, изломы или петли при определенных расположениях интерполируемых точек. Такие эффекты крайне нежелательны, хотя бы с точки зрения эстетических требований. В [2] предложена модификация, связанная с внесением поправок в этот классический подход. При этом рассматривались традиционные полиномиальные сплайны третьей степени. Цель данной работы – сравнение свойств полиномиального и тригонометрического сплайнов; применение последних для построения составного параметрического сплайна класса гладкости C^2 .

Анализ последних исследований. В [1] изложен вариант построения составных кривых, заданных параметрическими уравнениями.

В этом варианте используются условия непрерывности, непрерывного наклона в точке соединения, а также условие непрерывности кривизны. В [2] показано, что практическое применение этих условий при построении составного параметрического сплайна даёт геометрически приемлемые результаты только, если переход от одной порции к другой осуществляется так, что обе находятся по одну сторону от касательной в точке соединения. Иначе возникают участки с резким изменением касательного вектора и даже петли, что вряд ли можно считать приемлемым для практического применения. Чтобы решить эту проблему, например для плоских кривых целесообразно отнести кривизне знак, считая ее в одних случаях положительной, в других — отрицательной. При этом пользуются следующим соображением. Касательный вектор кривой при движении вдоль кривой в направлении возрастающих t поворачивается. В зависимости от направления вращения касательного вектора кривизну считают положительной или отрицательной. То есть, внесение небольших изменений в условия непрерывности кривизны позволяет ликвидировать такие нежелательные геометрические эффекты как, например, изломы или петли. Исследования проводились для стандартного полиномиального сплайна Эрмита третьей степени [3].

Что же касается тригонометрического сплайна вида:

$$rt(\lambda) = a_0 + b_0\lambda + (a_1 + b_1\lambda)\sin\pi\lambda + (a_2 + b_2\lambda)\sin^2\pi\lambda, \quad \lambda \in [0,1]. \quad (1)$$

то его свойства исследуются в работах [4], [5]. В дальнейшем будем рассматривать тригонометрический сплайн (1) при условии, что $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Постановка задачи. Рассмотрим тригонометрический сплайн (1) при условии, что $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Тогда

$$rt(\lambda) = a_0 + b_0\lambda + (a_1 + b_1\lambda)(\sin\pi\lambda + \sin^2\pi\lambda), \quad (2)$$

Для определения a_i , b_i зададим значения этой вектор-функции и её производной в 0 и 1: $r(0), r(1), r'(0), r'(1)$ соответственно.

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (2), получим:

$$\begin{aligned} rt(\lambda) = & r(0) \left(1 - \lambda + \frac{(1-2\lambda)}{\pi} (\sin\pi\lambda + \sin^2\pi\lambda) \right) + \\ & + r(1) \left(\lambda - \frac{(1-2\lambda)}{\pi} (\sin\pi\lambda + \sin^2\pi\lambda) \right) + r'(0) \left(\frac{(1-\lambda)}{\pi} (\sin\pi\lambda + \sin^2\pi\lambda) \right) + \\ & + r'(1) \left(-\frac{\lambda}{\pi} (\sin\pi\lambda + \sin^2\pi\lambda) \right); \quad \lambda \in [0,1]. \end{aligned} \quad (3)$$

Напомним, что стандартный полиномиальный сплайн Эрмита третьей степени с теми же значениями $r(0), r(1), r'(0), r'(1)$ имеет следующий вид [3]:

$$r(u) = r(0)(1 - 3u^2 + 2u^3) + r(1)(3u^2 - 2u^3) + r'(0)(u - 2u^2 + u^3) + r'(1)(-u^2 + u^3) \quad u \in [0,1]. \quad (4)$$

В дальнейшем (4) будем называть, в соответствии с принятой в [1] терминологией, сплайном в форме Фергюсона.

Задачи работы заключаются в изучении свойств тригонометрических сплайнов, сравнении их со стандартными полиномиальными сплайнами в случае параметрического представления; создании приложений, позволяющих строить составные кривые, порции поверхностей и составные поверхности в пространстве R^3 .

Основная часть.

Сравнительный анализ простейших свойств тригонометрического и полиномиального сплайнов.

Рассмотрим влияние начальных условий $r(0), r(1), r'(0), r'(1)$ на форму и поведение полиномиального и тригонометрического сплайнов.

Для формирования сплайнов требуется наличие производных в граничных точках. Рассмотрим, как влияют значения первых производных на форму сплайнов.

Введем единичные касательные векторы на концах кривой $T(0)$ и $T(1)$:

$$\dot{r}(0) = \alpha_0 T(0), \quad \dot{r}(1) = \alpha_1 T(1).$$

При больших α_0, α_1 возникают изломы кривой и образуются петли. Установлено, что кривая (1) более устойчива к образованию петель при одновременном увеличении α_0, α_1 .

На рис. 1.а,б приведен пример составных кривых, построенных из сегментов (1) и (2). Направление касательных векторов в граничных точках в обоих примерах одинаковые, отличие состоит в их модуле. Кривые на рис. 1.б отвечают большему значению модулей касательных векторов в граничных точках, по сравнению с кривыми на рис. 1.а.

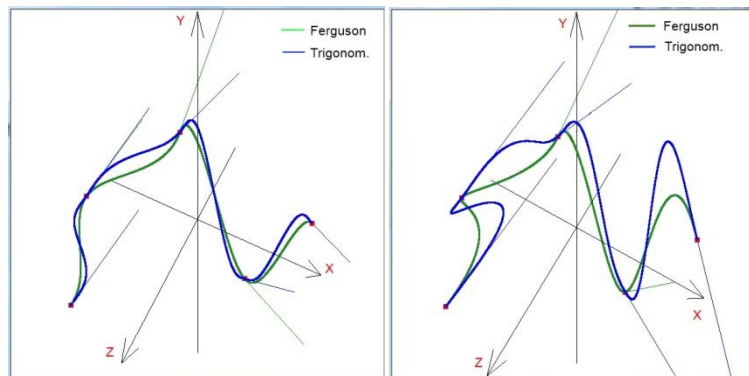


Рисунок 1.а.

Рисунок 1.б.

(Заметим, что пока узлы интерполяции расположены так, что сплайн остается по одну сторону от общей касательной.) Установлено, что тригонометрический сплайн обладает большей изгибностью по сравнению

со сплайном Фергюсона.

Особенности использования тригонометрического сплайна для построения составных кривых.

Применим подход, описанный в [2] для исследования поведения тригонометрического сплайна в точках соединения двух порций вида (3). Условие непрерывности кривизны будем теперь использовать теперь в таком виде:

$$\ddot{r}_2(0) = \delta\gamma^2 \ddot{r}_1(1) + \mu \dot{r}_1(1) \quad (5)$$

где r_1 и r_2 - два соседних сегмента, γ - коэффициент, показывающий отношение модулей касательных векторов в точке соединения этих сегментов, а μ - некая произвольная константа. Особую роль играет коэффициент $\delta = \pm 1$. Если два сегмента соединены так, что они оба находятся по одну сторону от касательной в точке соединения, то нужно положить $\delta = 1$, а если по разные стороны, то $\delta = -1$.

Запишем условие (5), используя стандартные условия непрерывности и непрерывного наклона касательной:

$$\begin{aligned} & \delta\gamma^2 \dot{r}^{(1)}(0) + \left(\frac{\mu}{2} - (\pi - 1)(\delta\gamma^2 + 1) \right) \dot{r}^{(1)}(1) + \dot{r}^{(2)}(1) = \\ & = \delta\gamma^2(\pi - 2)r^{(1)}(0) + (\pi - 2)(1 - \delta\gamma^2)r^{(1)}(1) + (2 - \pi)r_1^{(2)}; \end{aligned} \quad (6)$$

Для построения составной кривой тригонометрического сплайна необходимо знание производных во всех узловых точках. Зная производные в конечных точках, определим оставшиеся производные из системы (6). Коэффициенты данной системы образуют трехдиагональную матрицу. Для ее решения обычно применяется метод прогонки. Однако для случая $\mu = 0, \lambda = 1$, все диагональные элементы при $\delta = -1$ равны нулю, а следовательно в таком случае не подходит методика, предложенная в [1] для построения сплайна. Поэтому покажем, что использование параметра μ в ограниченном диапазоне позволяет избавиться от этой проблемы.

Метод прогонки устойчив при выполнении условия диагонального преобладания матрицы [3]: $|B_i| \geq |A_i| + |C_i|$, поэтому из системы (6) получим:

$$\left| \left(\frac{\mu}{2} - (\pi - 1)(1 + \delta\gamma^2) \right) \right| \geq |\delta\gamma^2| + 1 \quad (7)$$

Решим это неравенство относительно μ :

$$\begin{cases} \mu \geq 2 + 2|\delta\gamma^2| + 2(\pi - 1)(1 + \delta\gamma^2) \\ \mu \leq -2 - 2|\delta\gamma^2| - 2(\pi - 2)(1 + \delta\gamma^2) \end{cases}$$

Определим теперь границы μ , например для наиболее частого случая:

$$\gamma = 1, \delta = 1 : \begin{cases} \mu \geq 4\pi \\ \mu \leq -4\pi \end{cases} \quad \text{или} \quad \gamma = 1, \delta = -1 : \begin{cases} \mu \geq 4 \\ \mu \leq -4 \end{cases}$$

Следовательно, теперь можно использовать стандартные формулы

прогонки, но только если подбирать значения μ , используя (7). Также данное условие предотвращает возможное деление на ноль в формулах прогонки.

Построение четырехугольной порции поверхности и составной поверхности по Кунсу с использованием тригонометрического сплайна.

Рассмотрим кривую (3). Обозначим $\alpha_0(\lambda), \alpha_1(\lambda), \beta_0(\lambda), \beta_1(\lambda)$ - функции, стоящие перед $r(0), r(1), r'(0), r'(1)$ соответственно. Они удовлетворяют условиям, которые наложены на функции смещения [1]. Применим функции для построения порции поверхности тензорного произведения, рассмотренной в подразделе 2.1. Порция поверхности задается формулой

$$r(u, v) = [\alpha_0(u) \quad \alpha_1(u) \quad \beta_0(u) \quad \beta_1(u)] \begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r_v(0,0) & r_v(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) & r_v(1,0) & r_v(1,1) \\ r_u(0,0) & r_u(0,1) & r_{uv}(0,0) & r_{uv}(0,1) \\ r_u(1,0) & r_u(1,1) & r_{uv}(1,0) & r_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(v) \\ \alpha_1(v) \\ \beta_0(v) \\ \beta_1(v) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

Рассмотрим алгоритм построения составной поверхности, состоящей из порций. Пусть имеется две порции поверхности $r^{(1)}(u, v) = F(u)Q^{(1)}F^T(v)$, $r^{(2)}(u, v) = F(u)Q^{(2)}F^T(v)$,

Где

$$F(u) = [\alpha_0(u) \quad \alpha_1(u) \quad \beta_0(u) \quad \beta_1(u)], F^T(v) = [\alpha_0(v) \quad \alpha_1(v) \quad \beta_0(v) \quad \beta_1(v)]^T.$$

Рассмотрим условия непрерывности r_{uu} на границе двух порций.

$$r^{(1)}_{uu}(1, v) = [4 - 2\pi, \quad 2\pi - 4, \quad 2, \quad 2 - 2\pi] Q^{(1)} F^T(v), \quad (9)$$

$$r^{(2)}_{uu}(0, v) = [2\pi - 4, \quad 4 - 2\pi, \quad 2\pi - 2, \quad -2] Q^{(2)} F^T(v), \quad (10)$$

Для непрерывности r_{uu} на границе выражения (9), (10) должны быть равны при $0 \leq v \leq 1$ и поэтому, приравняв их, получим

$$[4 - 2\pi, \quad 2\pi - 4, \quad 2, \quad 2 - 2\pi] Q^{(1)} = [2\pi - 4, \quad 4 - 2\pi, \quad 2\pi - 2, \quad -2] Q^{(2)} \quad (11)$$

В скалярной форме соотношение (11) представляет собой систему из четырех уравнений, содержащую значения r, r_u, r_v и r_{uv} в углах двух порций поверхностей. Принимая во внимание условия $r^{(1)}(1,0) = r^{(2)}(0,0)$, $r^{(1)}(1,1) = r^{(2)}(0,1)$, $r^{(1)}_u(1,0) = r^{(2)}_u(0,0)$ и $r^{(1)}_u(1,1) = r^{(2)}_u(0,1)$, приходим к следующим системам:

$$r_{u,m-1,n} + 2(1-\pi)r_{u,m,n} + r_{u,m+1,n} = (2-\pi)(r_{m+1,n} - r_{m-1,n}), \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (12)$$

$$r_{uv,m-1,n} + 2(1-\pi)r_{uv,m,n} + r_{uv,m+1,n} = (2-\pi)(r_{v,m+1,n} - r_{v,m-1,n}), \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (13)$$

Аналогично можно добиться непрерывности r_{vv} в v -направлении для всей составной поверхности, потребовав выполнения следующих систем условий:

$$r_{v,m,n-1} + 2(1-\pi)r_{v,m,n} + r_{v,m,n+1} = (2-\pi)(r_{m,n+1} - r_{m,n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N-1;$$

(14)

$$r_{vu,m,n-1} + 2(1-\pi)r_{vu,m,n} + r_{vu,m,n+1} = (2-\pi)(r_{u,m,n+1} - r_{u,m,n-1}), n = 1, 2, \dots, N-1;$$

(15)

В формулах (11)-(15) $(M+1)*(N+1)$ – количество узлов интерполяции, которые разбиты на четырехугольные клетки, каждая из которых задаётся формулой (8).

Этих условий вполне достаточно для того, чтобы полностью определить матрицу Q для каждой клетки.

Выводы. Получено, что так же как и для параметрических полиномиальных сплайнов, параметр δ позволяет изменять поведение кривой в точках соединения сегментов, а параметр μ позволяет задавать приемлемый диапазон значений, при котором возможно построение составной кривой. Условие, определяющее диапазон значений для μ для полиномиального и тригонометрического сплайна имеет только числовое различие. Показано, что можно использовать тригонометрический сплайн для построения составной поверхности из четырехугольных порций.

Перспективы дальнейшего исследования. Перспективой дальнейших исследований является проведение аналогичных исследований для параметрических пространственных кривых и поверхностей, а также использование других модификаций сплайна (1).

Литература

1. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. / А. Фокс, А. Пратт – М.: Мир, 1982. – 304 С.
2. Карпенко В.А., Влияние знака кривизны на поведение параметрических сплайновых кривых. / В.А. Карпенко, А.Ю. Клещев – Міжвідомчий науково-технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". Випуск 90. – К.: КНУБА, 2012. - с. 132-138.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. 432С.
4. Воробкевич Р. И. Исследование свойств тригонометрических RV- сплайнов / Р. И. Воробкевич // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: КИСИ, 1989. – № 48. – с. 73-76.
5. Воробкевич Р. И. Свойства регулярного тригонометрического V- сплайна / Р. И. Воробкевич // Материалы международного симпозиума. – Жешув, 1996, с. 101 -104.

ВИКОРИСТАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ СКЛАДЕНИХ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ

В.А. Карпенко, А. Н. Давидович

У роботі розглядається задача використання тригонометричного сплайна для моделювання кривих і поверхонь. Досліджується поведінка сплайнів при різних значеннях дотичних векторів у вузлах. Вивчається питання збіжності рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трехдіагональною матрицею при переході від однієї порції до іншої. Класичний підхід до побудови складеного параметричного сплайна запропонований Фоксом і Праттом. При його практичній реалізації виникають небажані геометричні ефекти і проблеми з чисельною реалізацією. Отримано умова, дотримання якого забезпечує достатні умови сталого рахунку. За результатами дослідження створено програмний модуль, використання якого дозволяє за рахунок підбору параметрів отримати бажаний сплайн.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СОСТАВНЫХ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

V.Karpenko, A. Davydovich

This paper considers the use of trigonometric spline modeling of curves and surfaces. We study the behavior of the spline at different tangent vectors at the nodes. We study the problem of convergence of solutions of the system of linear algebraic equations with three-diagonal matrix in the transition from one portion to another. The classical approach to the construction of a composite parametric spline proposed by Fox and Pratt. With its practical implementation arise undesirable geometric effects and problems with numerical implementation. A condition for the observance of which provides sufficient conditions for sustainable bills. According to a survey created by a software module that allows the use of which, by adjusting the parameters to get the desired spline.