

ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ, У ЯКИХ ЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОЇ КРИВИНИ БЛИЗЬКІ ДО НУЛЯ

Національний університет цивільного захисту України

Наведено множину поверхонь обертання, запропонованих професором С.Ф.Пилипакою, у яких середня кривина змінюється вздовж осі обертання і її значення залишаються близькими до нуля.

Постановка проблеми. Широкого застосування набувають методи прикладної геометрії, де досліджується вплив геометричної форми поверхонь на їх фізичні властивості, які використовуються на практиці. Наприклад, відомо, що у поверхні сталої середньої кривини всі ділянки виявляються рівнонапруженими, що на практиці проявляється у вигляді рівноймовірності щодо руйнування [1, 2]. Іншими словами – у поверхні сталої середньої кривини автоматично усуваються точки, де може статися її розрив. Зазначена властивість поверхонь сталої середньої кривини базується на фундаментальній теоремі Пуасона-Лапласа, згідно з якою середня кривина поверхні розділу двох врівноважених фізичних середовищ пропорційна різниці значень тисків у цих середовищах [1, 2]. Варіюючи середню кривину поверхні, можна обирати величину тиску, яку витримає пневматичний виріб. У своїй більшості зазначеним виробам надають форму фасонних поверхонь обертання, де зусилля спрямовані вздовж їх осей.

Такі унікальні властивості поверхонь сталої середньої кривини доцільно використовувати при конструюванні балонів, резервуарів, а також пневматичних виробів (гумових підйомників, гасильників коливань, ресор, амортизаторів, тощо). Тому актуальними будуть дослідження, спрямовані на розробку способів опису поверхонь із зазначеними властивостями.

Огляд відомих результатів. На практиці поверхні постійної нульової середньої кривизни будують методом Делоне [1]. До поверхонь Делоне як поверхонь з постійною середньою кривиною відносяться: сфера, катеноїд, прямий круговий циліндр, нодоїд і ундулоїд. Всі вони, за винятком сфери, утворюються рулетами при обертанні їх навколо осі – тобто прямої, по якій котяться відповідні коніки (перетини конічної поверхні). Рулети утворюються фокусами параболи, еліпса й гіперболи, які котяться по згаданій прямій.

Але «класичні» поверхні обертання сталої нульової середньої кривини – ундоїд і ундулоїд [1] - мають форми, далекі від фасонних, що не зручно для конструювання реальних пневматичних виробів. Більш прийнятними для цього будуть поверхні обертання, середня кривина яких змінюється вздовж їх осей за наперед заданим законом (періодичним, подібним

«синусоїди»). Але при цьому на деяких проміжках значення середньої кривини поверхні буде «віддалятися» від нуля, що не виключатиме спричинення втрати властивості поверхні бути рівномірною на розрив.

Тому компромісом буде вивчення поверхонь обертання, у яких значення середньої кривини вздовж осі залишаться близькими до нуля. Такий напрям досліджень розвивається науковою школою С.Ф.Пилипаки [3,4]. Середню кривину певного класу поверхонь запропоновано обчислювати за формулою:

$$H = \frac{d + 2r \cos u}{2r(d + r \cos u)}. \quad (1)$$

Легко переконатися у тому, що амплітуда зміни функції (1) приблизно на два порядки менше значень параметра u , що дає підстави для конкретного впровадження вказувати на її близькість до нуля. У працях С.Ф.Пилипаки та його учнів [3,4] пропонується виготовляти балон для зберігання стисненого газу, поверхня якого має сталу середню кривину. Така поверхня балона складатиметься із системи співосних торів (рис.1). Тоді стінки такого балона не матимуть слабких місць, тобто вони будуть рівнонапруженими. Для такої інтерпретації параметри формули (1) можна пояснити так: r – радіус дуги твірної тора, d – відстань від центра кола дуги до осі обертання поверхні в цілому. Отже, формула (1) з параметрами d і r дозволяє визначити сім'ю поверхонь обертання з «майже» нульовими середніми кривинами. На рис. 1 зображено поверхню обертання, побудовану з параметрами $r = 1$, $d = 7$. Цікавим буде питання побудови поверхонь обертання для інших значень параметра r за умови формальної трактовки формули (1).

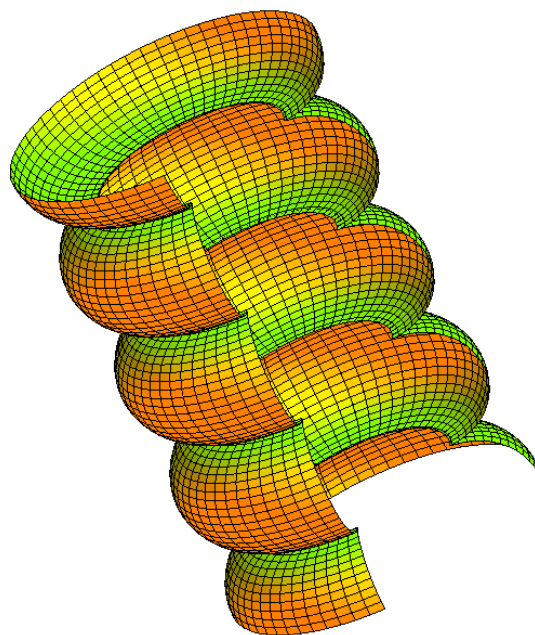


Рис. 1. Поверхня обертання, середня кривина якої вздовж осі визначається формулою (1)

Для такої інтерпретації параметри формули (1) можна пояснити так: r – радіус дуги твірної тора, d – відстань від центра кола дуги до осі обертання поверхні в цілому. Отже, формула (1) з параметрами d і r дозволяє визначити сім'ю поверхонь обертання з «майже» нульовими середніми кривинами. На рис. 1 зображено поверхню обертання, побудовану з параметрами $r = 1$, $d = 7$. Цікавим буде питання побудови поверхонь обертання для інших значень параметра r за умови формальної трактовки формули (1).

Постановка завдання. Розробити залежно від параметра r множини (атлас) поверхонь обертання, у яких значення середньої кривини при зміні вздовж осі обертання залишаються близькими до нуля.

Основна частина. Для побудови множини поверхонь було складено Maple-програму [5, 6], головна частина якої має вигляд:

```
a := -10*Pi:      b := 10*Pi: # межі зміни параметра t
d := 7:          r := 1.8:    # параметри поверхні
kappa := s -> (d + 2*r*cos(s))/(2*r*(d + r*cos(s)));
theta := int(kappa(s), s=0..v);
x := t -> int(cos(theta), v=0..t);
```

```

y := t -> int(sin(theta), v=0..t);
# побудова радіального перетину поверхні обертання
plot([x(t), y(t), t=a..b], scaling=constrained,
thickness=4,color=black);
plot3d([x(t), sin(w)*(y(t)-d), cos(w)*(y(t)-d)],
t=a..b, w=0..3*Pi/2, color=yellow);

```

На рис. 2 – 4 наведено вигляд деяких поверхонь обертання, коли параметр змінюється у межах $1 < r < 2$. Також побудовано радіальні перетини поверхонь обертання і вказано межі зміни параметра t .

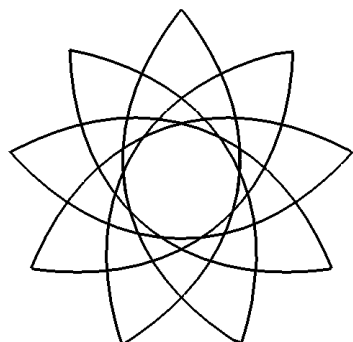
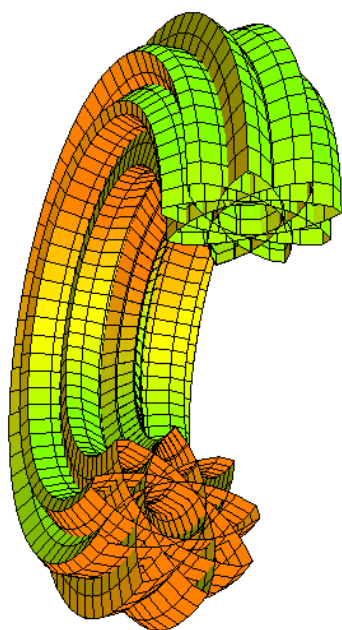


Рис. 2. $r = 1,8$; $d = 7$
 $-10\pi \leq t \leq 10\pi$:

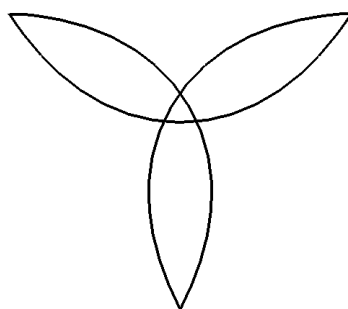
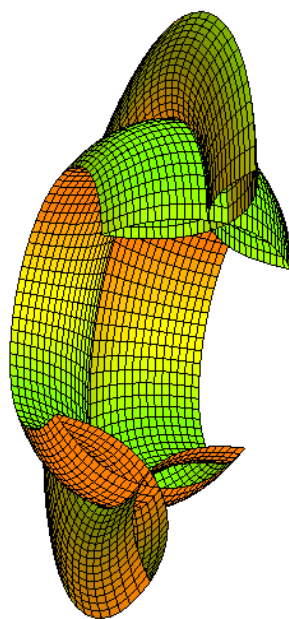


Рис. 3. $r = 1,5$; $d = 5$
 $-3\pi \leq t \leq 3\pi$:

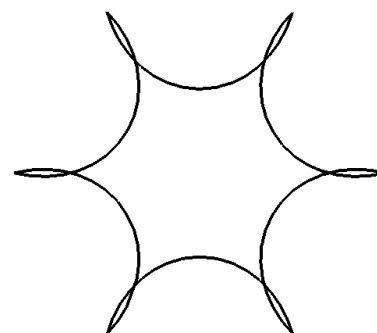
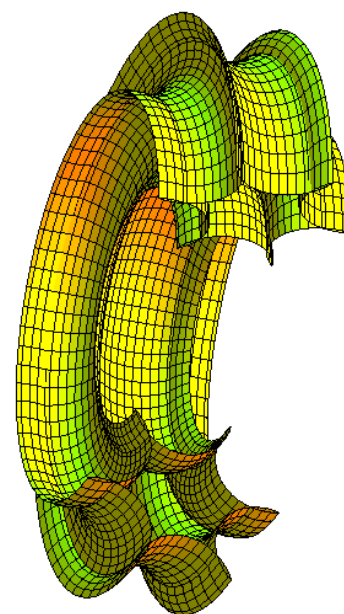


Рис. 4. $r = 1,2$; $d = 7$
 $-6\pi \leq t \leq 6\pi$:

На рис. 5 – 7 наведено вигляд поверхонь, коли параметр змінюється у межах $0 < r < 1$. Побудовані радіальні перетини поверхонь обертання дозволяють чіткіше представити конструкцію поверхні і виявити якісну різницю цієї множини поверхонь від поверхонь для випадку $1 < r < 2$. Вигляд поверхні при пограничному значенні $r = 1$ зображено на рис. 1.

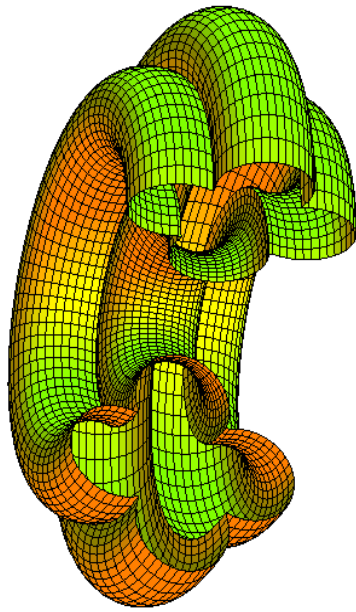


Рис. 5. $r = 0,8; d = 9$
 $-4\pi \leq t \leq 4\pi$:

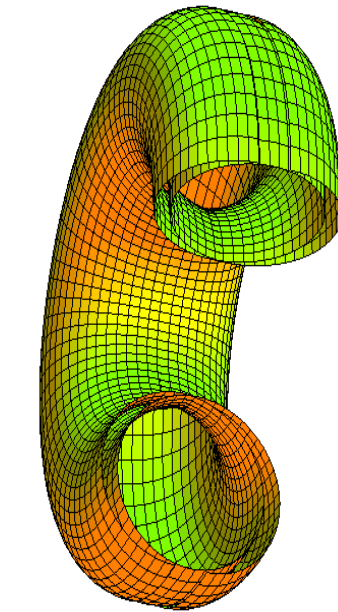


Рис. 6. $r = 0,5; d = 5$
 $-2\pi \leq t \leq 2\pi$:

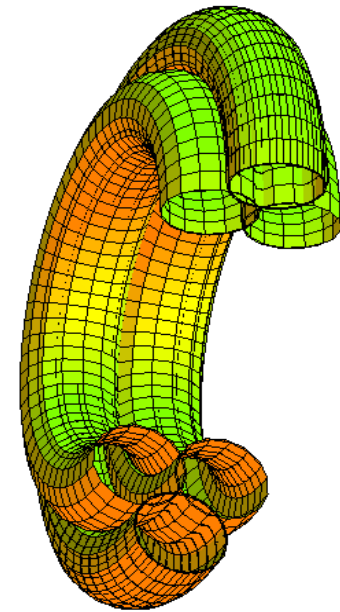
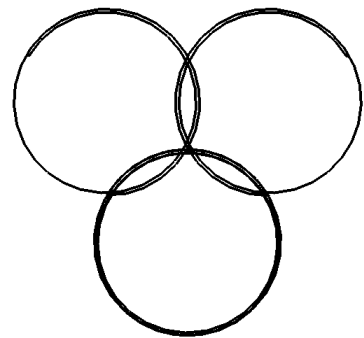
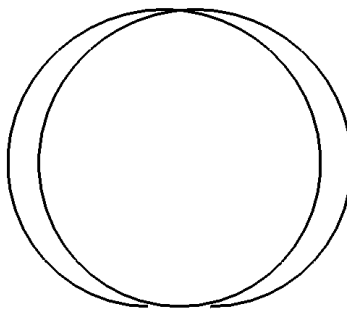
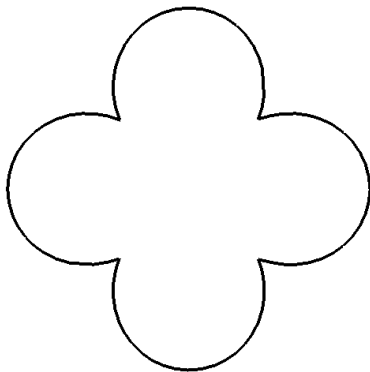


Рис. 7. $r = 0,15; d = 7$
 $-2\pi \leq t \leq 2\pi$:



Було складено програму створення комп'ютерної анімації, коли параметром зміни кадрів є значення r . Крім того, цікавими виявилася побудова поверхонь з меншими значеннями меж зміни параметра t , а також коли параметр t штучно пов'язаний формулою зі змінною w в операторі `plot3d`.

Висновок. Формальна трактовка формули (1) дозволила розробити залежно від значення параметра r множину (атлас) поверхонь обертання, у яких значення середньої кривини при зміні вздовж осі обертання залишаються близькими до нуля.

Література

1. Пульпинский Я. Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм. Дисс. на соискание канд.техн наук. - Пенза: ПГУАиС, 2006. - 140 с.
2. Фоменко А. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. Издательство МГУ, ЧеРо., 2009. – 416 с.

3. *Пилипака С.* Конструювання поверхонь обертання сталої середньої кривини / *С. Пилипака, І. Коровіна* // Матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції „Перспективи розвитку агропромислового комплексу в Поліському регіоні України”. – Ніжин: Міланік, 2010. – С. 35 – 43.

4. *Коровіна І.* Конструювання поверхонь сталої середньої кривини на основі її меридіану / *І. Коровіна* // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 26. – Харків: Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2010. – С. 128 – 133.

5. *Куценко Л.* Опис поверхонь обертання сталої та змінної вздовж осі середньої кривини / *Л. Куценко, С. Руденко* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Вип. 88. – Київ: КНУБА, 2011 р. С.7 – 15.

6. *Руденко С.* Описание поверхностей вращения с переменной вдоль оси средней кривизной. / *С. Руденко* // Современное состояние, развитие инженерной геометрии и компьютерной графики. – Алматы: КазНТУ, 2011. – С. 153 – 162.

7. *Куценко Л.* Поверхні обертання зі змінної уздовж осі кривиною меридіанів та їх зміцнення шляхом намотування кевларової нитки / *Л. Куценко, С. Руденко* // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Луцьк: ЛДТУ, 2011. – Випуск № 6, С. 148-153.

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ, У КОТОРЫХ ЗНАЧЕНИЕ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ БЛИЗКИ К НУЛЮ

С.Ю.Руденко

Приведено множество поверхностей вращения, предложенных профессором С.Ф.Пилипакой, в которых средняя кривизна изменяется вдоль оси вращения и ее значения остаются близкими к нулю.

ROTATION SURFACES, AT WHICH VALUE AVERAGE CURVATURE ARE CLOSE TO ZERO

S. Rudenko

The set of surfaces of the rotation offered by professor S.F.Pilipaka in which average curvature changes along an axis of rotation and its value is given remain close to zero.