УДК 515.2

О.С. Сидоренко, к.т.н.,
І.Б. Шеліхова, к.т.н.,
Є.М. Сівак, к.т.н.

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЯКІСНОГО ПОРІВНЯННЯ ХАОТИЧНОСТІ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

НТУ «Харківський політехнічний інститут»

Для порівняння на якісному рівні хаотичної поведінки динамічної системи при її певних параметрах, які відповідають циклічним траєкторіям, в роботі розглянуто геометричний смисл одного з головних математичних інструментів для оцінки міри хаотичності системи – поняття спектру показників Ляпунова.

Постановка проблеми. При проектуванні високотехнологічних виробів необхідно враховувати вплив на речовини не тільки градієнтів тиску та швидкості, але ще й градієнтів температури. При цьому у рідині мають проявлятися ефекти теплової конвекції [1]. В 1900 році французький дослідник Бенар, уперше експериментально продемонстрував [2] початок теплової конвекції в прошарку розплавленого спермацету - дуже в'язкої, подібної на віск, речовини, яка плавиться при температурі 53-54 градусів за Цельсієм.

Пояснити ефект Бенара можна так. Нехай є горизонтальний прошарок рідини нескінченної довжини. Знизу його підігрівають, завдяки чому підтримується температурний градієнт. Виражений у підходящих безрозмірних одиницях, цей градієнт визначається *числом Релея* $\mathfrak{R}$. Поки число Релея не занадто велике, рідина залишається спокійною, а тепло переноситься за рахунок теплопровідності. Однак, якщо $\mathfrak{R}$ перевершує деяке певне значення, у рідині виникає конвективний рух. Конвективні структури досить регулярні і можуть утворювати або циліндричні, або гексагональні конфігурації. Шестикутники являють собою вид зверху конвективних комірок (рис. 1). Рідина піднімається вгору в центрі комірки й опускається донизу на її границі (або навпаки) (рис. 2).

Завдання гідродинаміки полягає в поясненні механізму цього раптового переходу типу “хаос - порядок“ і у прогнозування форми й стійкості комірок [3]. Основні фізичні величини в цій задачі (комірки Бенара) – це поле швидкостей в точці простору *x, y, z,* тиск *p*, температура *T*. Поле швидкостей, тиск і температура підкоряються певним нелінійним рівнянням гідродинаміки, які можна привести до вигляду з явною залежністю від числа Релея $\mathfrak{R}$, що задається ззовні.

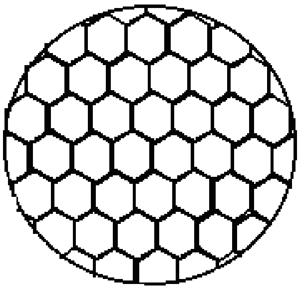

Рис. 1. Приклад комірок Бенара

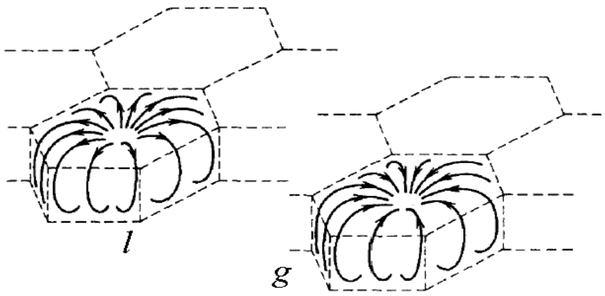

Рис. 2. Принцип формоутворення комірок Бенара

Система диференціальних рівнянь Лоренца [4] надає приклад опису моделі конвекції в прошарку рідини, що підігрівається знизу:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \tag{1}$$

При цьому керуючим параметром є число Рейнольдса r, а число Прандтля σ й параметр b для визначеності вважають $b = 8/3$, $\sigma = 10$.

Огляд літературних джерел. Реалізувати можливість передбачення утворення й руйнування *структур Бенара* на основі аналізу розв’язків системи рівнянь Лоренца доцільно за допомогою графоаналітичних методів їх унаочнення [1 - 3]. Для цього необхідно розв'язати системи нелінійних рівнянь Лоренца. Головною особливістю аттрактору Лоренца є те, що витки фазової траєкторії *непередбачуваним чином* намотуються на лівий чи правий фокус. Тому було запропоновано систему координатних криволінійних поверхонь, які розділяють гілки кривих аттрактора Лоренца. Це дозволило на аналітичному рівні визначати початок якісних змін в його поведінці. Для відмежування процесу від хаотичності, було запропоновано геометричний спосіб визначення показників Ляпунова як міри хаотичності системи Лоренца, що дозволило наочно порівнювати що в залежності від вхідних параметрів степені хаотичності систем Лоренца [3].

Хаотичні процеси в детермінованих нелінійних системах - одна з фундаментальних проблем сучасного природознавства. Переконливо доведено, що в таких системах причина генерування складних коливальних процесів криється не у великій кількості ступенів свободи і не в наявності флуктуацій, а в *експонентній нестійкості режимів*. Можливість подібних явищ розумів і передбачав А. Пуанкаре. У нестійких системах "зовсім незначна причина, що вислизає від нас через свою малість, викликає значну дію, яку ми не можемо передбачити. ...Пророкування стає неможливим, ми маємо перед собою явище випадкове" - так писав він ще в 1908 р у книзі "Наука й метод" (посилання на роботу В.С.Анищенка [5]). Розвиток ідей Пуанкаре призвело до створення фундаменту *хаотичної динаміки детермінованих систем*.

Необхідною умовою виникнення хаосу в динамічних системах є розмірність фазового простору $N \geq 3$, тобто коли стан системи характеризується мінімум трьома змінними. У системах із двома змінними стану, фазовим простором яких служить двовимірна площина, можливі динамічні режими вичерпуються положеннями рівноваги й періодичних коливань (граничними циклами).

Постановка завдання. Розглянуто геометричний смисл одного з головних математичних інструментів для оцінки ступеня хаотичності системи – поняття спектру показників Ляпунова, з метою порівняння хаотичної поведінки динамічної системи на якісному рівні при знайдених параметрах системи, які відповідають циклічним траєкторіям.

Основна частина. Метою геометричних досліджень аттрактора Лоренца полягає у визначенні значень параметрів системи, які б дозволили відмежуватися від хаотичності [5]. Наявність розглянутих циклічних фазових траєкторій розв'язків системи Лоренца може служити ознакою її слабої хаотичності. При цьому, як вже було зазначено, в системах із двома змінними стану можливі динамічні режими вичерпуються положеннями рівноваги й періодичних коливань (граничними циклами). Картина принципово зміниться, якщо ми розглянемо динамічну систему, стан якої характеризується трьома незалежними змінними (фазовими координатами). При цьому можливі два варіанти: траєкторія через кінцевий час замкнеться, демонструючи наявність складного, але періодичного процесу. Траєкторія буде відтворювати якийсь аперіодичний процес, якщо при $t \to \infty$ замикання не відбудеться.

Другий випадок відповідає режиму детермінованого хаосу. Дійсно, працює основний принцип детермінізму: майбутнє однозначно визначене початковим станом. Однак процес еволюції системи складний, неперіодичний. Чисто зовні він нічим не відрізняється від випадкового. Але при більш детальному аналізі з'ясовується одна важлива відмінність цього процесу від випадкового - цей процес можна відтворити. Дійсно, повторивши ще раз початковий стан, у силу детермінованості ми знову відтворимо ту ж саму траєкторію незалежно від ступеня її складності.

Виходить, цей неперіодичний процес не є хаотичним у сенсі визначення хаосу, даного нами вище? Так, це складний і схожий на випадковий, але проте детермінований процес. Тут важливо те, що він характеризується нестійкістю, і ця обставина дозволяє зрозуміти ще одну принципово важливу властивість систем з детермінованим хаосом – перемішування [5]. Розглянемо стійкі режими руху в детермінованих динамічних системах, у яких є втрати енергії (їх називають дисипативними). Як початковий стан оберемо не точку x° з певними координатами в просторі станів, а малу сферу радіуса $\varepsilon > 0$, що оточує цю точку. Будь-яка точка усередині сфери характеризує мале відхилення від x°. Сфера включає сукупність можливих відхилень від вихідного стану, що не перевищують по модулю ε.

Далі простежимо за трансформацією цієї сфери в часі уздовж траєкторії. У силу стійкості обраного режиму будь-яке мале відхилення в часі повинне загасати! Це означає, що під впливом детермінованого закону еволюції кулька радіуса ε в часі буде зменшуватися, й при $t \to \infty$ її радіус зменшиться до нуля. Сказане вище ілюструє рис. 3. Початковий фазовий об'єм у дисипативних системах у часі зменшується. Коли вихідний режим є нестійким, то фазовий об'єм може збільшуватися нескінченно, якщо нестійка система лінійна.

Але якщо система нелінійна й дисипативна, то процес еволюції початкового малого фазового об'єму буде нетривіальним. Дійсно, нестійкість режиму веде до росту збурень. Це одна обставина. Друга – це коли дисипативні системи поза залежністю від виду стійкості викликають зменшення елемента фазового об'єму в часі до нуля, що обумовлено втратами енергії.

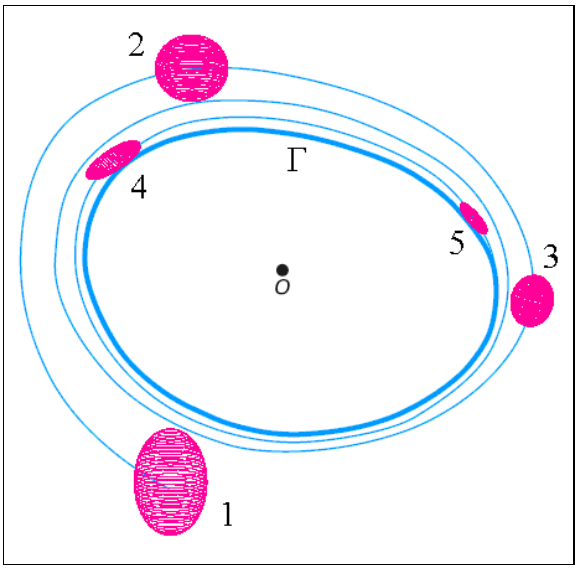

Рис. 3. Стиснення первісної області невизначеності 1 у часі у випадку, коли цикл Г є стійким граничним режимом

Як сполучити ці два фактори? Існує єдине рішення зазначеної дилеми: елемент фазового об'єму за деякими напрямками повинен розтягуватися, а за іншими – стискуватися. Причому ступінь стискання в середньому повинен обов'язково переважати над ступенем розширення, щоб у результаті фазовий об'єм у часі зменшувався. У нелінійних дисипативних системах це виявляється можливим.

У силу наявності механізму нелінійного обмеження кожна траєкторія складного режиму коливань зосереджена в обмеженій області фазового простору. При цьому будь-який малий окіл вихідного початкового в результаті переміщається по всій області, зайнятої траєкторією.

Наочно цей процес можна представити так. У склянку з водою помістимо маленьку чаїнку й розмішаємо воду ложкою, спричинивши нестійкість. Чаїнка буде при цьому рухатися складною спіралеподібною траєкторією, яка обумовлена рухом води в склянці. При тому ж у будь-який заданий момент часу ми теоретично можемо зафіксувати її координати в об'ємі води. Тепер замість чаїнки помістимо в склянку з водою дуже маленьку крапельку чорнила й знову розмішаємо воду. В результаті чорнило практично рівномірно розчиниться за всім об'ємом води, злегка її зафарбувавши. Тобто частки чорнила, спочатку зосереджені в маленькому об'ємі крапельки, за час перемішування можна буде виявити в будь-якій частині об'єму води в склянці.

У житті розглянутий процес звичайно називаємо перемішуванням. У математиці це поняття також існує, і, з погляду фізичної інтерпретації, виявляється близьким за змістом. Дійсно, потік води в склянці, створений рухом чайної ложки, можна інтерпретувати як чинність детермінованого закону, що визначає динамічну систему. Чаїнка при цьому буде рухатися за складною, недетермінованою траєкторією. А крапелька чорнила, яку можна інтерпретувати як якийсь маленький об'єм у фазовому просторі навколо чаїнки, переміщається в повному об’ємі води.

Тепер стосовно поняття *дивного аттрактора* [6]. Математичним образом режиму функціонування дисипативної динамічної системи служить аттрактор - гранична траєкторія зображуючої точки у фазовому просторі, до якої прямують всі вихідні режими. Якщо цей режим є стійкий стан рівноваги, то аттрактор системи буде просто нерухомою точкою, якщо це є стійкий періодичний рух - то аттрактором буде замкнута крива, яка має назву граничного циклу.

Раніше вважалося, що аттрактор є образом винятково стійкого режиму функціонування системи. Зараз розуміють, що такий режим детермінованого хаосу теж аттрактор у змісті визначення граничної траєкторії в обмеженій області фазового просторів.

Однак такий аттрактор має дві істотні відмінності: траєкторія такого аттрактора неперіодична (вона не замикається) і режим функціонування нестійкий (малі відхилення від режиму наростають). Саме ці відмінності й призвели до необхідності ввести новий термін; такі аттрактори стали називати дивними. Який критерій дивності? Як установлено теоретиками, основним критерієм дивності аттрактора є нестійкість траєкторії. Причому нестійкість зобов'язана бути експонентною, на що вказують дослідження Ляпунова [5]. Це означає, що мале збурювання режиму D(0) повинне в часі збільшуватися за законом експоненти:

$$D(t) = D(0)\exp(\lambda t), \qquad \lambda = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{D(t)}{D(0)}. \tag{2}$$

Виявилося, що позитивність величини λ вказує не тільки на експонентний нестійкий режим коливань, але й доводить наявність у системі перемішування. Якщо встановлено, що досліджуваний режим має $\lambda > 0$, то наслідком будуть неперіодичності залежності від часу кожної з координат стану, суцільний ляпуновський спектр потужності (у спектрі коливань присутні всі частоти з деякого інтервалу) і спадаюча у часі автокореляційна функція. Докладніше про це говориться в роботі В.С.Анищенка [5]. До недавнього часу з таким поводженням зазначених характеристик однозначно зв'язували прояви випадковості процесу. Останнім часом з’ясувалося, що подібними властивостями може володіти процес, породжуваний детермінованими законами. Ця обставина й послужила підставою називати такий процес детермінованим хаосом. До якого і належить формоутворення комірок Бенара.

При цьому виникає важливе для впроваджень питання: за яких значень вхідних параметрів симптом хаотичності системи буде меншим? З метою якісного порівняння хаотичної поведінки системи в роботі було розглянуто геометричний смисл поняття спектру показників Ляпунова.

Нехай маємо сім'ю фазових траєкторій, описаних системою рівнянь (1), і які характеризуються ледь відмінними початковими умовами. Оберемо у фазовому просторі сім'ю точок, розташованих на поверхні кулі малого радіуса ε із центром на траєкторії M$\{x(t), y(t), z(t)\}$. Кожна точка сім'ї за час Т переміститься за своєю фазовою траєкторією в положення $\{x(T), y(T), z(T)\}$. Внаслідок цього куля візуально ніби то деформується у еліпсоїд (поки розміри «хмари» точок ще можна вважати малими).

Геометрична інтерпретація спектра ляпуновських показників полягає у тому, що кожний із показників характеризує зміну масштабу вздовж однієї з головних осей еліпсоїда. Нехай розміри еліпсоїда по трьох головних півосях в момент часу Т будуть $\{l_1, l_2, l_3\} = \{\varepsilon \exp(\Lambda_1 T), \varepsilon \exp(\Lambda_2 T), \varepsilon \exp(\Lambda_3 T)\}$. У випадку малих ε і великих t саме величини $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$ визначають спектр ляпуновських показників. Таким чином, кожний показник Λ відповідає за розширення або стиснення еліпсоїда зображуючих точок вздовж однієї з його головних осей.

На відміну від обчислення ляпуновських показників на основі їх алгебраїчної інтерпретації, у цій роботі пропонується геометричний спосіб їх визначення. Для цього необхідно обрати початкову точку M, обчислити координати множини точок поверхні сфери радіуса ε з центром у точці M, та відповідних їм точок за час Т, які утворять поверхню еліпсоїда.

На рис. 4 наведено зображення кулі і відповідного їй еліпсоїда для ε = 0,1 і Т = 0,1, побудовані за допомогою Maple-програми.

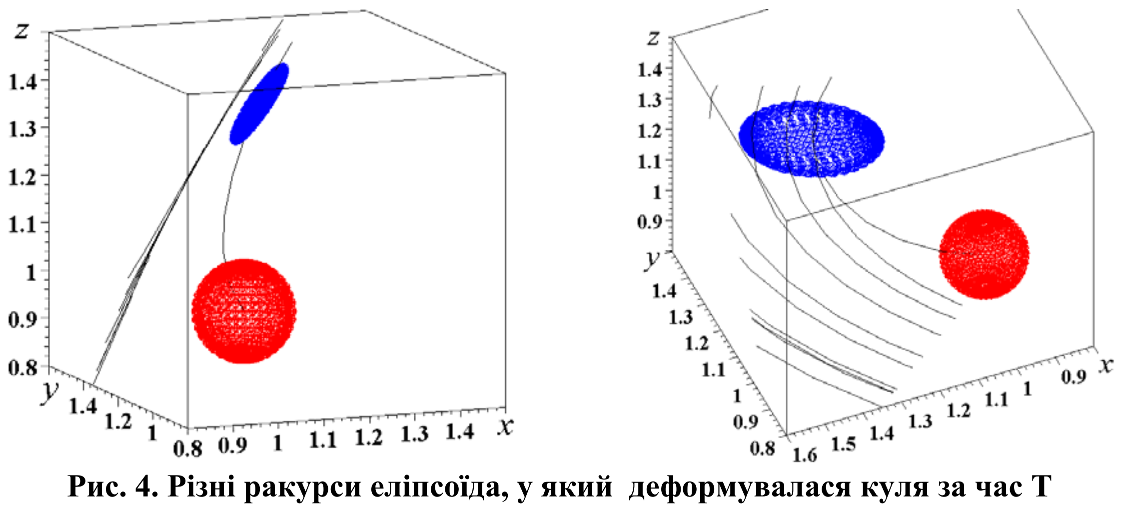

Рис. 4. Різні ракурси еліпсоїда, у який деформувалася куля за час Т

Значення великої осі еліпсоїда формально обчислюється як максимальна відстань між точками, що належать еліпсоїду (у даному випадку це буде 0,48). Те ж саме можна здійснити для інших вхідних параметрів системи. Порівняння розмірів великих осей еліпсоїдів дозволить оцінити ступінь хаотичності системи. А саме – більш хаотичною слід вважати систему, у якої розмір великої осі еліпсоїда буде більшим.

<u>Приклад</u>. Нехай маємо дві системи Лоренца із вхідними параметрами а) класичними σ=10; b=8/3 r=28, і іншими б) σ=6,98; b=3,96 r=41,51. На рис. 5 наведено порівняння відповідних еліпсоїдів Ляпунова. За розмірами еліпсоїда видно, що другий випадок більш схильний до хаосу.

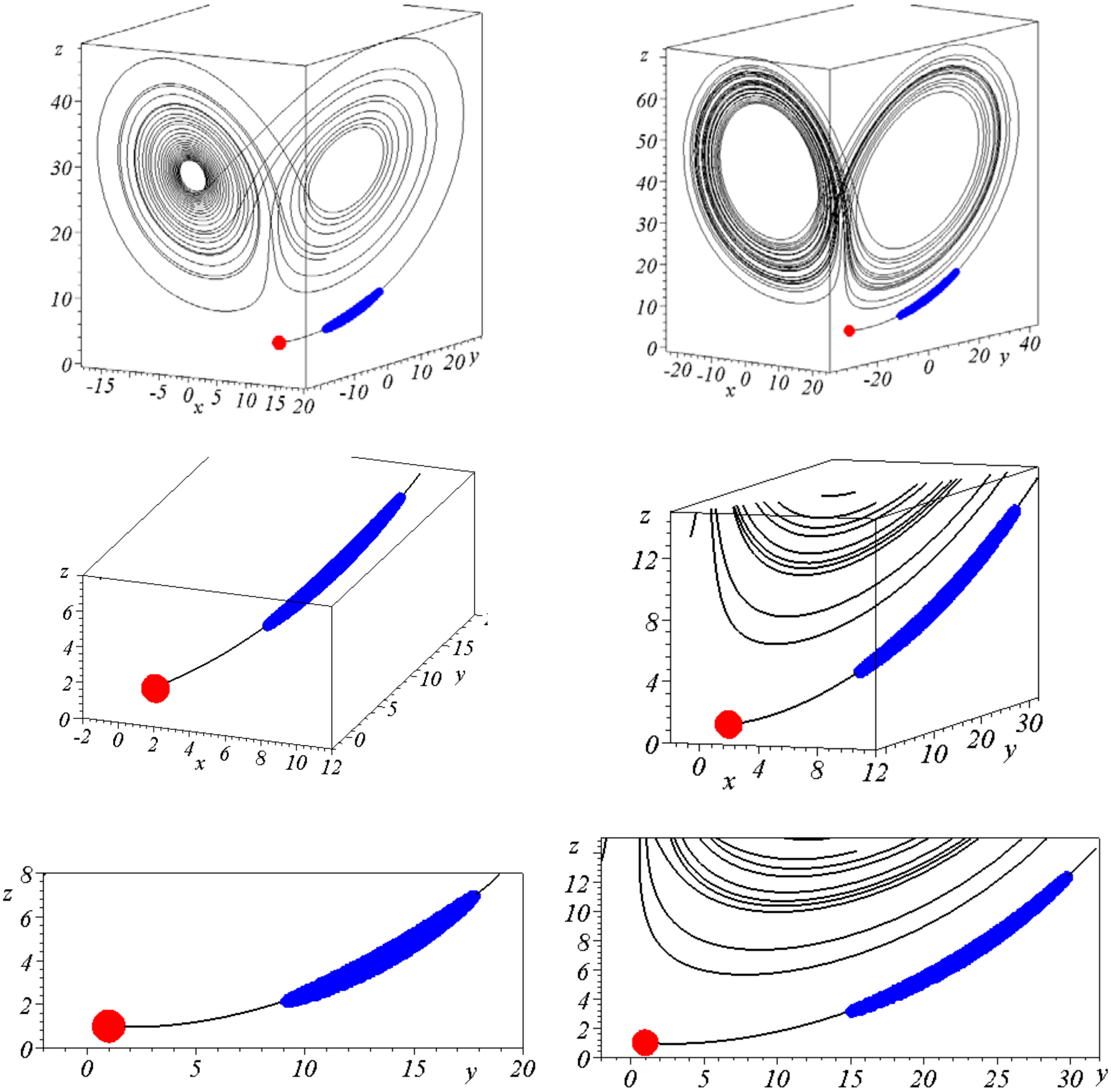

Рис. 5. Ляпуновські еліпсоїди для класичних (ліворуч) та інших (праворуч) наборів вхідних параметрів системи Лоренца

Висновок. На основі аналізу розв’язків системи рівнянь Лоренца можна реалізувати можливість передбачення утворення й руйнування структур Бенара, при цьому за допомогою графоаналітичних методів доцільно здійснювати їх унаочнення з метою аналізу на якісному рівні.

Література

1. *Патанкар С.В.* Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. / *Патанкар С.В.* - М.: Издательство МЭИ, 2003. - 312 с.

2. *Гетлинг А.В.* Конвекция Рэлея-Бенара./ *Гетлинг А.В.* - М-: Эдиториал УРСС, 1999.-248с.

3. *Гетлинг А.В.* Формирование пространственных структур конвекции Рэлея-Бенара / *Гетлинг А.В.* // Успехи физических наук. 1991 г. Том 161, № 9. С. 1 - 80

4. *Фрик П. Г.* Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть 1. / *Фрик П. Г.* - Пермь: ПГТУ, 1998. – 108 с.

5. *Анищенко В.С.* Детерминированный хаос / *Анищенко В.С.* // Соросовский образовательный журнал. 1997. - № 6. С. 70-76

6. *Анищенко В.С*. Знакомство с нелинейной динамикой. / *Анищенко В.С*. - Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. 144 с.

7. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). / *Кузнецов С.П.* - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001. -296 с.

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ КАЧЕСТВЕНОГО СРАВНЕНИЯ ХАОТИЧНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Е.С. Сидоренко, И.Б. Шелихова, Е.М. Сивак

Для сравнения на качественном уровне хаотичного поведения динамической системы при ее определенных параметрах, которые отвечают циклическим траекториям, в работе был рассмотрен геометрический смысл одного из главных математических инструментов для оценки меры хаотичности системы - понятие спектра показателей Ляпунова.

GRAPHIC-ANALYTICAL WAY OF DEFINITION OF INDICATORS OF LYAPUNOV FOR THE QUALITATIVE COMPARISONS OF THE RANDOMNESS OF DYNAMIC SYSTEM

E. Sidorenko, I. Shelikhova, E. Sivak

For comparing at qualitative level of chaotic behavior of dynamic system in case of its certain parameters which respond cyclical paths, in operation geometrical meaning of one of the principal mathematical tools for an assessment of a measure chaos of system - concept of a range of indexes of Lyapunov was considered.