УДК 514.18

Верещага В.М., д.т.н., професор,
Найдиш А.В., д.т.н., професор,
Рубцов М.О., к.т.н., доцент,
Павленко О.М., к.т.н., доцент

ГЛОБАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ КОМПОЗИЦІЇ З ТРЬОХ ТОЧОК ПАРАМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ ЗА ФОРМОЮ ЛАГРАНЖА, ЩО МАЮТЬ КРАТНІ ТОЧКИ

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)
Мелітопольська школа прикладної геометрії

У статті показано послідовність виконання параметризації, уздовж координатної осі, вихідної дискретно поданої лінії (ДПЛ) та надано у параметричному вигляді інтерполяційний поліном за формою Лагранжа (параметричний поліном за формою Лагранжа). Розглядаються можливі варіанти появи кратних точок та надаються значення параметрів щодо цих варіантів. Вказується на те, що з появою на ДПЛ кратних точок у складових елементах параметричного полінома Лагранжа виникають невизначеності. Доведено, що усі ці невизначеності розкриваються, границями яких у вузлових точках є нуль або одиниця. Показано, що невизначеності, які виникають з появою кратних точок на ДПЛ, не є перешкодою для глобальної інтерполяції із застосуванням параметричного полінома за формою Лагранжа. Тобто, для будь-якої композиції з трьох точок, побудова та структура запису параметричного полінома за формою Лагранжа лишається без змін. При цьому ніяких обмежень на створення композиції з трьох точок не існує.

Ключові слова: кратні точки, геометрична композиція, композиційна матриця, розкриття невизначеностей.

Постановка проблеми. Геометричне моделювання об’ємних об’єктів довільної форми потребує побудови його поверхні. Зазвичай, побудова поверхонь відбувається шляхом нанесення на неї сітки. Якщо на поверхні геометричного тіла довільної форми нанести сітку, що має незмінну кількість ліній у прямому та трансверсальному напрямках, то будуть виникати чарунки різних розмірів, як великі, так і дуже замалі. На великих чарунках буде збільшуватись похибка відтворення поверхні, а на малих – будуть збільшуватись витрати ресурсів моделювання, що буде зменшувати ефективність та якість моделювання. Сказане обґрунтовує необхідність розробки способу моделювання сіток на поверхнях об’ємних геометричних тіл довільної форми, який мав би можливість використовувати сітки зі змінною кількістю ліній. Змінна кількість ліній у сітках викликає появу дво-, три-,…,n-кратних точок. Отже, розробка та доведення можливості застосування способу інтерполяції дискретно поданих ліній, що утримують кратні точки є, у певній мірі, проблемою, яка і буде розв’язуватись у даній статті.

Формування цілей статті. Розробка способу інтерполяції, доведення його правдивості і можливостей застосування для різних варіантів розташування кратних точок на дискретно поданих лініях для геометричної композиції з трьох точок.

Аналіз останніх досліджень. Ця робота виконана у рамках і є подальшим розвитком композиційного геометричного моделювання [9, 1, 4, 5], який було розроблено на базі точкового числення Балюби-Найдиша [2, 3].

У згаданих роботах вказується на те, що будь-яка геометрична фігура (ГФ) розглядається як скінчена дискретна непуста множина точок, яка може утримувати різного роду підмножини, що представляють собою цілісний геометричний об’єкт (ГО), який являє собою геометричну композицію, при цьому зміна або заміна будь-якого з елементів геометричної композиції не тягне за собою ніяких змін для решти інших елементів композиції. Геометрична композиція відрізняється від іншого роду інших тим, що для кожного з її елементів встановлено власні розміри та розміри, що визначають взаємне розташування усіх елементів. Окрім того, у композиційному геометричному моделюванні кожна вихідна геометрична фігура подається у вигляді двох складових – геометричної і параметричної частин. Такий поділ на дві частини обґрунтовується тим, що будь-яку ГФ визначає безпосередньо наявна кількість вихідних точок, а ні в якому разі, не їх взаємне розташування. Наявність точок ГФ представляє її геометричну частину, а взаємне розташування точок ГФ представляє її параметричну частину. Представлення вихідної ГФ у вигляді двох частин названо уніфікацією ГФ.

Композиційне геометричне моделювання базується на застосуванні композиційних матриць. Існуюча теорія матриць вивчає матриці, що описують алгебраїчні системи, у алгебраїчних описах яких їх складові елементи знаходяться у певній залежності один від одного. Наявність таких залежностей, зі зміною одного будь-якого з елементів, тягне за собою відповідні зміни вихідних значень для решти інших.

Окрім цього, наявність взаємозалежностей між елементами у описах алгебраїчних систем впливає на результати розв’язків через обмеження свободи вибору складових вихідних елементів. І навпаки, у композиційних матрицях елементи обираються вільно, незалежно один від одного, кількість яких відповідає вимогам до певної композиції. Наприклад, трикутник – визначається трьома точками і при цьому для загального виду трикутника не існує жодних обмежень щодо взаємного розташування цих точок. Отже, композиційні матриці призначені для опису геометричних фігур.

У роботі [6, 8] розглядається спосіб розгортання-згортання чарунок, який передбачає наявність на дискретно поданих кривих (ДПК) кратних точок. Однак, у роботах [6, 8] не було доведено можливість проведення інтерполяції ДПК з наявними кратними точками. Чим і викликано написання даної статті, теоретичним підґрунтям для якої є теорія нескінченно малих [9].

Основна частина. Нехай необхідно глобально інтерполювати ДПК, що має за вузли інтерполяції три базисні точки A_i для $i=\overline{(1,3)}$ (рис. 1), які утворюють геометричну композицію (геометричну фігуру – ГФ) з трьох точок. Введемо позначення:

$$x_{11} = x_1 - x_1;\ x_{21} = x_2 - x_1;\ x_{31} = x_3 - x_1. \quad (1)$$

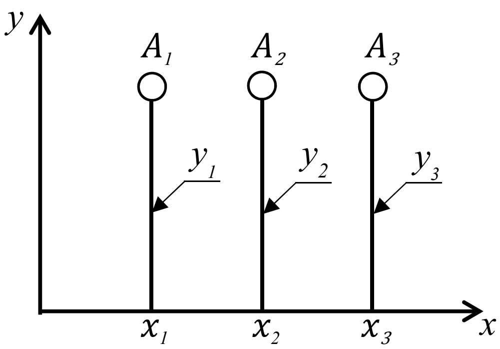

Рис. 1. Вихідна ДПК

Введемо параметри для вихідної ГФ (рис. 1) уздовж осі 0х:

$$t_1 = \frac{x_{11}}{x_{31}} = 0;\ t_2 = \frac{x_{21}}{x_{31}};\ t_3 = \frac{x_{31}}{x_{31}} = 1\ . \quad (2)$$

Тоді інтерполяційний поліном у формі Лагранжа у параметричному вигляді, що глобально інтерполює вихідну ДПК (рис. 1), матиме вигляд [1, 2]:

$$y_m = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i} y_i * \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{3} (t_j - t), \quad (3)$$

де y_m – поточна точка на інтерполяційній кривій (3); λ_i – знаменник коефіцієнту, який приводить до одиниці значення відповідної характеристичної функції (X_1)в i-му вузлі.

Характеристичні функції (ХФ) – це вираз $\frac{1}{\lambda_i}, y_i, \ \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{3}(t_j - t)$, які для відповідного i-го вузла позначимо через $P_i(t)$. Тоді рівняння (3) прийме вигляд:

$$y_m = \sum_{i=1}^{3} y_i * P_i(t) \quad (4)$$

Розкриємо вирази ХФ із (4), дістанемо:

$$P_1(t) = \frac{(t_2-t)(t_1-t)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)};\ P_2(t) = \frac{(t_1-t)(t_2-t)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)};\ P_3(t) = \frac{(t_1-t)(t_2-t)}{(t_1-t_3)(t_2-t_3)}\ . \quad (5)$$

Усе викладене вище є відомими фактами [1, 2]. Однак, сучасні методи геометричного моделювання потребують виконувати інтерполяцію ДПК з наявними кратними точками [3]. Розглянемо можливість виконання інтерполяції ДПК, яку утворюють три точки, серед яких є кратні.

Нехай точки A_1 і A_2 є двократними, тобто $A_1 \equiv A_2$ (рис. 2). Тоді значення параметрів t, що відповідають (2) будуть дорівнювати:

$$t_1 = 0;\ t_2 = 0;\ t_3 = 1. \quad (6)$$

Для значень параметру $t = t_i;\ i=\overline{(1,3)}$ розрахуємо значення характеристичних функцій з (5).

$$P_1(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_2(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(0\text{-}0)}{(0\text{-}1)(0\text{-}1)}=0 \tag{7}$$

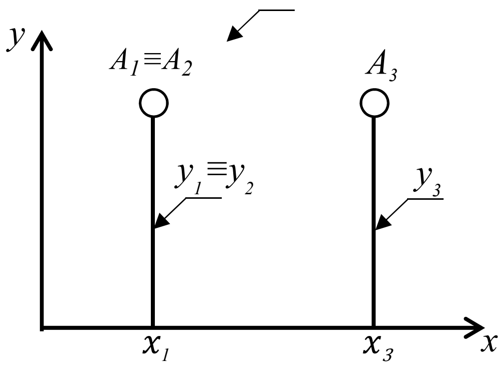

Рис. 2. Інтерполяція ДПК з наявними кратними точками

Розкриємо невизначеності з (7), встановивши їх границі:

1.1) – для значення параметру $t = t_1$

$$\lim_{t\to t_1} P_1(t_1)=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_1\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)}{(t_2\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)}=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_3\text{-}t_1)}{(t_3\text{-}t_1)}=\frac{1\text{-}0}{1\text{-}0}=1; \tag{8}$$

$$\lim_{t\to t_1} P_2(t_1)=\frac{(t_1\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)}{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}=0, \tag{9}$$

тут для $P_2(t_1)$ границя дорівнює нулеві через те, що $t_1\text{-}t_1=0$ (точний нуль), а решта різниць параметрів прямують до відповідних значень: $t_3\text{-}t_1\to 1;\ t_1\text{-}t_2\to 0;\ t_2\text{-}t_1=1$. Як бачимо, у чисельнику є точний нуль, а решта значень не дорівнює нулю. Отже (9) є правдивим.

$$P_3(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(0\text{-}0)}{(0\text{-}1)(0\text{-}1)}=0 \tag{10}$$

Як бачимо, значення $P_3(t_1)$ встановлюється однозначно за відсутності невизначеності

1.2) – для значень параметру $t = t_2$ маємо:

$$P_1(t_1)=\frac{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_2(t_2)=\frac{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_3)=\frac{(0\text{-}0)(0\text{-}0)}{(0\text{-}1)(0\text{-}1)}=0 \tag{11}$$

Розкриємо невизначеності з (11), встановивши їх границі:

$$\lim_{t\to t_1} P_1(t_1)=\lim_{t\to t_1}\frac{(t_2\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}{(t_2\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)}=0, \tag{12}$$

оскільки $t_2\text{-}t_2=0$ – точний нуль, а решта різниць прямує до відповідних значень: $t_3\text{-}t_2\to 1;\ t_2\text{-}t_1\to 0;\ t_3\text{-}t_1\to 1$. Тут маємо на увазі, що прямування до нуля – не є нуль.

$$\lim_{t\to t_2} P_2(t_2)=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}=\lim_{t\to t_2}\frac{(t_3\text{-}t_2)}{(t_3\text{-}t_2)}=\frac{1\text{-}0}{1\text{-}0}=1. \tag{13}$$

Як бачимо з (11), $P_3(t_2)=0$ – є точний нуль.

1.3) – для значення параметру $t = t_3$ маємо:

$$P_1(t_3)=\frac{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_2(t_3)=\frac{(0\text{-}1)(1\text{-}1)}{(0\text{-}0)(1\text{-}0)}=\left(\frac{0}{0}\right);\ P_3(t_3)=\frac{(0\text{-}1)(0\text{-}1)}{(0\text{-}1)(0\text{-}1)}=1. \tag{14}$$

Розкриємо невизначеності з (14), встановивши їх границі:

$$\lim_{t\to t_3} P_1(t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{(t_2\text{-}t_3)(t_3\text{-}t_3)}{(t_2\text{-}t_1)(t_3\text{-}t_1)}=0, \tag{15}$$

через те, що $t_3\text{-}t_3$ – є точний нуль, а решта інших різниць параметрів прямує: $t_2\text{-}t_3\to\text{-}1;\ t_2\text{-}t_1\to 0;\ t_3\text{-}t_1\to 1$.

$$\lim_{t\to t_3} P_2(t_3)=\lim_{t\to t_3}\frac{(t_1\text{-}t_3)(t_3\text{-}t_3)}{(t_1\text{-}t_2)(t_3\text{-}t_2)}=0,$$

оскільки t_3-t_3=0 – точний нуль, а t_1-t_2→-1, t_1-t_2→0; t_3-t_2→1. Прямування до нуля не є нуль. Як бачимо з (14) – $P_3(t_3)=1$ є точна одиниця за відсутності невизначеності і не потребує встановлення границі.

Отже, поява невизначеності (8), (9), (11), (12), (13), (14) не обмежує можливість застосування параметричного полінома у формі Лагранжа (4) для ДПК першого варіанту (рис. 2), яка має двократну точку $A_1 \equiv A_2$.

Висновки. У даній статті доведено, що для будь-якої композиції, яку утворюють три точки ДПК, є можливим застосовувати, у якості інтерполянта, параметричний поліном у формі Лагранжа і який, при цьому однаково записується для ДПК з наявними кратними точками. Факт можливості застосування параметричних поліномів у формі Лагранжа для інтерполяції дискретно поданих ліній, що утримують кратні точки є важливим при використанні їх у способі розгортання-згортання чарунок. У вказаному способі виникає потреба будувати чотири- та трикутникові чарунки, що вироджуються в лінію або навіть у точку. Це підвищує точність побудови поверхні об'ємного об'єкту довільної форми.

Література

1. *Адоньєв Є.О.* Композиційний метод геометричного моделювання багатофакторних систем: дис. ... д-ра техн. наук. К.: КНУБА, 2018. – 512 с.
2. *Балюба И.Г.* Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления. Автореф.дисс…докт.техн.наук. - К.: КГТУСА, 1995.- 36 с.
3. *Балюба И.Г.* Точечное исчисление [учебное пособие] / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. Верещаги В.М. // - Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. - 234 с.
4. *Верещага В.М.* Основи композиційного геометричного моделювання.: навчальний посібник / В.М. Верещага, А.В. Найдиш, Є.О. Адоньєв, К.Ю. Лисенко – Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. – 255 с.
5. *Верещага В.М.* Метод композиційного геометричного моделювання: монографія / В.М. Верещага, А.В. Найдиш, Є.О. Адоньєв. – Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2019. – 310 с.
6. *Верещага В.М.* Моделювання горизонтального земельного майданчика у точковому численні: монографія / В.М. Верещага, О.М. Павленко, А.В. Найдиш. – Мелітополь: МДПУ імені Богдана Хмельницького, 2019. – 187 с.
7. *Верещага В.М.* Композиційне геометричне моделювання: Моногафія / В.М. Верещага. – Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017 – 108с.
8. *Павленко О.М.* Геометричне моделювання вертикального планування горизонтальної земельної ділянки засобами точкового БН-числення: дис…канд.. техн. наук, 05.01.01 – Мелітополь: ТДАТУ, 2017 – 229с.

9. *Рубцов М.О.* Вища математика: навч. посіб. у 2-х ч., ч1. / М.О. Рубцов, В.І. Кравець, О.П. Назарова – Мелітополь: видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького – 2015. – 242 с.

ГЛОБАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КОМПОЗИЦИИ ИЗ ТРЕХ ТОЧЕК ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ ПО ФОРМЕ ЛАГРАНЖА, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ КРАТНЫЕ ТОЧКИ

В.М. Верещага, А.В. Найдыш, Н.А. Рубцов, А.М. Павленко
Мелитопольская школа прикладной геометрии

В статье показана последовательность выполнения параметризации, вдоль координатной оси, исходной дискретно представленной линии (ДПЛ) и предоставлено в параметрическом виде интерполяционный полином по форме Лагранжа (параметрический поленом по форме Лагранжа). Рассматриваются возможные варианты появления кратных точек и предоставляются значения параметров по этим вариантов. Указывается на то, что с появлением на ДПЛ кратных точек в составляющих элементах параметрического полинома Лагранжа возникают неопределенности. Доказано, что все эти неопределенности раскрываются, границами которых, в узловых точках являются ноль или единица. Показано, что неопределенности, которые возникают с появлением кратных точек на ДПЛ, не является препятствием для глобальной интерполяции с применением параметрического полинома по форме Лагранжа. То есть, для любой композиции из трех точек, построение и структура записи параметрического полинома по форме Лагранжа остается без изменений. При этом никаких ограничений на создание композиции из трех точек не существует.

Ключевые слова: кратные точки, геометрическая композиция, композиционная матрица, раскрытие неопределенностей.

GLOBAL INTERPOLATION OF A COMPOSITION OF THREE POINTS BY PARAMETRIC POLYNOMIES FOR THE LAGRANGE FORM THAT HAVE FAST DOTS

V. Vereshchaha, A. Naydysh, M. Rubcov, O. Pavlenko
Melitopol School of Applied Geometry

The article shows the sequence of parameterization, along the coordinate axis, of the original discretely presented line (DPL) and is provided in a parametric form by an interpolation polynomial in the Lagrange form (parametric log in the Lagrange form). Possible options for the appearance of multiple points are considered and parameter values for these options are provided. It is indicated that with the *appearance of multiple points on the DPL in the constituent elements of the parametric Lagrange polynomial, uncertainties arise. It is proved that all these uncertainties are revealed, the boundaries of which, at nodal points, are zero or one. It is shown that the uncertainties that arise with the appearance of multiple points on the LPL are not an obstacle to global interpolation using a parametric polynomial in the Lagrange form. That is, for any composition of three points, the construction and structure of the recording of a parametric polynomial in the Lagrange form remains unchanged. However, there are no restrictions on creating a composition of three points.*

Keywords: multiple points; geometric composition; compositional matrix; disclosure of uncertainties.