

процедури знаходять координати x та y кутів нахилу в кожному вузлі сітки, по яким комп'ютер відновлює положення об'єкта.

Використання іншого типу пристрою для вимірювання кута нахилу та застосування іншого методу виготовлення корпусу для системи стабілізації значно знижують собівартість електросамокату Segway та практично ніяким чином не впливають на характеристики його якісного використання.

Інформаційні джерела

1. А. Ф. Алейников, В. А. Гридчин, Н. П. Цапенко. Датчики (перспективные направления развития): Учеб. пособие / Под ред. проф. М. П. Цапенко. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001 – 176 с.
 2. Дж. Фрайден. Мир электроники. Современные датчики: Справочник / Под. ред.. Е. Л. Свинцова. – Москва: Изд-во Техносфера, 2005 – 587 с.
 3. Аш. Ж. с соавторами. Датчики измерительных систем: В 2-х книгах. Кн. 2. Пер. с франц. – М.: Мир, 1992 – 424 с.
 4. Распанов В. Я. Микромеханические приборы: учебное пособие. – М.: Машиностроение, 2007 - 400 с.
 5. Бороздин В. Н. Гирскопические приборы и устройства систем управления: Учеб. пособие для вузов. – М.: Машиностроение, 1990 – 272 с.
 6. Гирскопические системы. Гирскопические приборы и системы: Учеб. для вузов по спец. «Гирскоп. приборы и устройства»/ Д. С. Пельсор, И. А. Михалев, В. А. Бауман и др.; Под ред. Д. С. Пельпора – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988 – 424 с.
 7. Викулин И. М., Викулина Л. Ф., Стафеев В. И. Гальваномагнитные приборы. – М.: Радио и связь, 1983 – 104 с.
 8. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара: Справочник. В 2-х кн. Кн. 2/ Под ред. В. В. Клюева. - М.: Машиностроение, 1978 - 439 с.
 9. Кашкаров А. П. 500 схем радиолюбителей. Электронные датчики. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – СПб.: Наука и техника, 2008 – 288 с.
- УДК 519.876.5; 621.313.33

В.В. Лишук, к.т.н., **Л.В. Яциньский**, к.ф.-м.н.
Луцький національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРИФАЗНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГУНА В ДВОФАЗНОМУ РЕЖИМІ РОБОТИ

Розглядається математична модель трифазного асинхронного двигуна, що працює в однофазному режимі. Диференціальні рівняння двигуна записані в нормальній формі Коші. Приведені результати числового моделювання.

Ключові слова: математична модель, диференціальні рівняння, трифазний асинхронний двигун, двофазний режим роботи.

Рассматривается математическая модель трехфазного асинхронного двигателя в однофазном режиме работы. Дифференциальные уравнения двигателя записаны в нормальной форме Коши. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальные уравнения, трехфазный асинхронный двигатель, двухфазный режим работы.

In the paper, a mathematical model of a three-phase induction motor without a capacitor bank in a two-phase state is introduced. The differential equations of electromechanical state are written in normal Cauchy form. Some transient process is computed.

Keywords: mathematical model, differential equations, three-phase asynchronous motor, two-phase state.

Постановка проблеми. Математичне моделювання на сьогодні є перспективним напрямом при дослідженні та аналізі технічних систем і пристроїв, зокрема електротехнічних. Адже, змодельовавши режим роботи пристроїв можна наперед знати інформацію про їх поведінку в системі. Аналізуючи розв'язок диференціальних рівнянь, а саме часові графічні залежності електрофізичних величин (кутові швидкості обертання роторів двигунів, напруги вузла навантаження, струми в обмотках, електромагнітні моменти) можна уникнути таких небажаних явищ як перегрів їх обмоток, робота

пристроїв з тривалим перевантаженням тощо. Тобто, звідси можна робити висновки про працездатність або універсальність моделі [1, 2].

Математичне моделювання електротехнічних пристроїв, зокрема асинхронних двигунів є складним із-за описування фізичних явищ різної природи (електромагнітні, механічні, теплові тощо). Адекватність математичної моделі реальному об'єкту досягається вмiлим використанням законів теоретичної електротехніки та формою представлення диференціальних рівнянь, а також вмiлим прийняттям тих чи інших допущень.

У даній роботі для побудови математичної моделі використовується якісно новий математичний апарат, що спирається на теорію нелінійних диференціальних рівнянь, розв'язок яких можливий при правильному застосуванні числових методів, орієнтованих на комп'ютерну техніку.

Оскільки, асинхронні двигуни є найпоширенішими серед усіх електротехнічних пристроїв (більше 50% електроенергії змінного струму споживають саме вони), то науковий інтерес до процесів, що протікають в них є неминучим. Математичну модель двигуна доцільно застосовувати у випадку несиметрії як кола статора, так і ротора.

Традиційні методи не здатні розв'язати задачі розрахунку перехідних процесів у електротехнічних пристроях, зокрема асинхронних двигунах. Перші спроби інтегрування рівнянь електромагнітного стану здійснювалися аналітичними методами. Труднощі такого розв'язання задач загальновідомі. А якщо розглядати перехідні процеси у вузлі навантаження, то ці методи взагалі позбавлені фізичних засад електродинаміки, оскільки заступні схеми елементів будуються для усталених станів [1].

Виклад основного матеріалу дослідження. Двофазний режим роботи трифазного асинхронного двигуна – досить частий випадок у практиці експлуатації електричних машин у галузях машино- і приладобудування. Він може спостерігатися як за відсутності трифазного джерела живлення, а може бути як аварійний у робочому стані за трифазного живлення (обрив фази). Математична модель такого режиму роботи призначена для аналізу роботи двигуна як автономно, так і елемента складної системи. Вона дає змогу розраховувати основні часові електромеханічні залежності, а вже потім аналізувати як окремо елемент або елемент системи в цілому.

За основу рівнянь приймемо диференціальні рівняння трифазного асинхронного двигуна в косогональній системі координат, записані безпосередньо в нормальній формі Коші для двох фаз *A* та *B* [2]

$$\begin{aligned} \frac{dI_S}{dt} &= A_S (U_S - r_S I_S) + A_{SR} (\Omega \Psi_R - r_R I_R); \\ \frac{dI_R}{dt} &= A_{RS} (U_S - r_S I_S) + A_R (\Omega \Psi_R - r_R I_R). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут I_S, I_R – колонки струмів статора і колонки перетворених струмів ротора, U_S – колонка напруг джерела, Ψ_R – колонка повних потокозчеплень обмотки ротора, r_S, r_R – резистивні опори обмоток статора і ротора; A_S, A_{SR}, A_{RS}, A_R – матриці коефіцієнтів

$$\begin{aligned} A_S &= \begin{bmatrix} (\alpha_S \alpha_R + \alpha_S \alpha_m) \cdot T & 0 \\ 0 & (\alpha_S \alpha_R + \alpha_S \alpha_m) \cdot T \end{bmatrix}; & A_{SR} &= \begin{bmatrix} -\alpha_S \alpha_R T & 0 \\ 0 & -\alpha_S \alpha_R T \end{bmatrix}; \\ A_{RS} &= \begin{bmatrix} -\alpha_S \alpha_R T & 0 \\ 0 & -\alpha_S \alpha_R T \end{bmatrix}; & A_R &= \begin{bmatrix} (\alpha_S \alpha_R + \alpha_R \alpha_m) \cdot T & 0 \\ 0 & (\alpha_S \alpha_R + \alpha_R \alpha_m) \cdot T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

де $T = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \alpha_m}$, Ω – матриця швидкості обертання ротора [2]

$$\Omega = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

причому $\alpha_S, \alpha_R, \alpha_m$ – обернені індуктивності дисипації обмоток статора і ротора та основна обернена індуктивність двигуна; ω – кутова швидкість обертання ротора.

Слід відмітити, що матриці (2) записані при неврахуванні насичення магнітної системи машини, що може мати місце для розглядуваного двигуна.

Колонку повних потокозчеплень знаходимо так

$$\Psi_{Rj} = \frac{I_{Sj} + I_{Rj}}{\alpha_m} + \frac{I_{Rj}}{\alpha_R}, \quad j = A, B. \quad (4)$$

ПЕРСПЕКТИВНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ПРИЛАДИ

Рівняння електромагнетного стану слід доповнити рівняннями механічного стану, щоб обчислити кутову швидкість ω , що фігурує в (3)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J} (M_E - M(\omega)), \quad (5)$$

$$M_E = \sqrt{3} p_0 (I_{RA} I_{SB} - I_{RB} I_{SA}) / \alpha_m,$$

де $M(\omega)$ – механічний момент; p_0 – число пар магнетних полюсів; J – момент інерції ротора; M_E – електромагнетний момент.

Система диференціальних рівнянь (1), (4), (5), становить A -модель трифазного асинхронного двигуна. Її незамінні якості: диференціальні безпараметричні рівняння записані в нормальній формі Коші, первинні сторони оперують фізичними величинами, відсутня процедура обертання матриць коефіцієнтів, відсутнє віднімання двох близьких величин. Така модель найбільш адаптована до аналізу тривалих перехідних процесів

Для практичного користування даною моделлю необхідно знати резистивні опори обмоток статора і ротора R_S, R_R , обернені індуктивності дисипації α_S, α_R обмоток, момент інерції J , кількість пар магнетних полюсів p_0 , напругу обмотки статора U_S і механічний момент на валу ротора $M(\omega)$.

Математичну модель трифазного асинхронного двигуна в двофазному режимі одержимо, виходячи з моделі трифазного асинхронного двигуна. Найзручнішою тут є L -модель у косогональних координатах [1]. За таких умов диференціальні рівняння такої математичної моделі в розгорнутому вигляді приймають вигляд (обмотка ротора за числом витків вважається приведеною до числа витків обмотки статора)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline l_s + l_A & l_{AB} & l_A & l_{AB} \\ \hline l_{BA} & l_s + l_B & l_{BA} & l_B \\ \hline l_A & l_{AB} & l_R + l_A & l_{AB} \\ \hline l_{BA} & l_B & l_{BA} & l_R + l_B \\ \hline \end{array} \cdot \frac{d}{dt} \begin{array}{|c|} \hline I_{SA} \\ \hline I_{SB} \\ \hline I_{RA} \\ \hline I_{RB} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{u_{SA} - ((2r_{SA} + r_{SC})I_{SA} + (r_{SC} - r_{SB})I_{SB})/3}{u_{SB} - ((r_{SC} - r_{SA})I_{SA} + (2r_{SB} - r_{SC})I_{SB})/3} \\ \hline \frac{-\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R I_{RA}}{\omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R I_{RB}} \\ \hline \end{array}, \quad (6)$$

де l_A, l_B, l_{AB}, l_{BA} – диференціальні індуктивності, що є функціями магнетного стану двигуна; l_s, l_R – індуктивності дисипації обмоток статора й ротора.

$$u_{SA} = U_m \sin \omega_0 t; \quad u_{SB} = U_m \sin(\omega_0 t - 2\pi/3), \quad (7)$$

де U_m – амплітуда мережі живлення, ω_0 – її кутова частота.

Повні потокозчеплення обмотки ротора шукаємо у звиклий спосіб (4).

Якщо тепер від першого рядка рівняння (6) відняти другий і накласти умову обриву третьої фази C : $I_{SB} = -I_{SA} = -I_S$, і $u_{SA} - u_{SB} = \sqrt{3}U_m = U_L$, то одержимо рівняння електромагнетного стану мотора [1] у матричному вигляді

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline l_A + l_B - l_{AB} - l_{BA} + 2l_s & l_A - l_{BA} & l_{AB} - l_B \\ \hline l_A - l_{AB} & l_A + l_R & l_{AB} \\ \hline l_{BA} - l_B & l_{BA} & l_B + l_R \\ \hline \end{array} \cdot \frac{d}{dt} \begin{array}{|c|} \hline I_S \\ \hline I_{RA} \\ \hline I_{RB} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \frac{\sqrt{3}U_m \sin(\omega t + 30^\circ) - (r_{SA} + r_{SB})I_S}{\frac{-\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})}{\sqrt{3}} - r_R I_{RA}} \\ \hline \frac{\omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})}{\sqrt{3}} - r_R I_{RB} \\ \hline \end{array}. \quad (8)$$

Диференціальні рівняння (5), (8) – шукана L -модель двофазного режиму роботи трифазного асинхронного двигуна. Незручність її в тому, що в процесі числового інтегрування за явними методами виникає потреба обертати матрицю коефіцієнтів на кожному часовому кроці. Це не тільки, як було сказано вище, ускладнює обчислювальний процес, але й призводить до суттєвого накопичення похибок, в результаті чого втрачається точність і можливість аналізу тривалих перехідних процесів.

Тому обернемо матрицю диференціальних індуктивностей аналітично. В результаті одержимо шукану A -модель

$$\frac{d}{dt} \begin{array}{|c|} \hline i_S \\ \hline i_{RA} \\ \hline i_{RB} \\ \hline \end{array} = q \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & A_{SA} & A_{SB} \\ \hline A_{AS} & A_A & A_{AB} \\ \hline A_{BS} & A_{BA} & A_B \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \frac{\sqrt{3}U_m \sin(\omega t + 30^\circ) - (r_{SA} + r_{SB})i_S}{-\omega(\Psi_{RA} + 2\Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RA}} \\ \hline \frac{\omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB}}{\omega(2\Psi_{RA} + \Psi_{RB})/\sqrt{3} - r_R i_{RB}} \\ \hline \end{array}. \quad (9)$$

Тут A -коефіцієнти мають вигляд

ПЕРСПЕКТИВНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ПРИЛАДИ

$$\begin{aligned}
 A_{SA} &= -c_2 c_5 - c_3 c_8; & A_{SB} &= -c_2 c_6 - c_3 c_9; \\
 A_{AS} &= -c_5 c_4 - c_6 c_7; & A_{BS} &= -c_8 c_4 - c_9 c_7; \\
 A_A &= c_5 / q + A_{AS} A_{SA}; & A_{AB} &= c_6 / q + A_{AS} A_{SB}; \\
 A_{BA} &= c_8 / q + A_{BS} A_{SA}; & A_B &= c_9 / q + A_{BS} A_{SB};
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$q = \frac{1}{c_1 + c_4 A_{SA} + c_7 A_{SB}}.$$

де

$$\begin{aligned}
 \Delta &= g_1 g_2; & c_1 &= c_2 - c_3 + 2 / \alpha_s; & c_2 &= b(2d_1 - d_3 - d_2) + 1 / \tau; \\
 c_3 &= b(d_1 + d_3 - 2d_2) - 1 / \tau; & c_4 &= \Delta(c_6 + c_9) - 1 / \alpha_R; \\
 c_5 &= b(2d_2 + d_3) / \Delta + 1 / g_1; & c_6 &= -b(d_1 + 2d_3) / \Delta; \\
 c_7 &= -\Delta(c_5 + c_8) + 1 / \alpha_R; & c_8 &= -b(d_2 + 2d_3) / \Delta; \\
 c_9 &= b(2d_2 + d_3) / \Delta + 1 / g_1; & d_1 &= I_A^2; & d_2 &= I_B^2; & d_3 &= I_A I_B; \\
 b &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{I_m^2}; & g_1 &= \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha_R}; & g_2 &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\alpha_R},
 \end{aligned} \tag{11}$$

причому, τ, ρ – обернені статична й диференціальна індуктивності двигуна, I_m – модуль просторового вектора намагнечувальних струмів, причому

$$I_m = 2 \sqrt{\frac{I_A^2 + I_A I_B + I_B^2}{3}}, \tag{12}$$

$$I_A = I_S + I_{RA}; \quad I_B = -I_S + I_{RB}.$$

Отже, матриця коефіцієнтів (9) у випадку відсутності насичення магнітної системи, коли $\rho = \tau = \alpha_m$ приймає вигляд

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A_S & A_{SR} \\ \hline A_{RS} & A_R \\ \hline \end{array} = \frac{T}{2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha_s(\alpha_R + \alpha_m) & -\alpha_s \alpha_R & \alpha_s \alpha_R \\ \hline -\alpha_s \alpha_R & \frac{\alpha_R}{\alpha_R + \alpha_m} \left(\alpha_s \alpha_R + \frac{2\alpha_m}{T} \right) & -\frac{\alpha_s \alpha_R^2}{\alpha_R + \alpha_m} \\ \hline \alpha_s \alpha_R & -\frac{\alpha_s \alpha_R^2}{\alpha_R + \alpha_m} & \frac{\alpha_R}{\alpha_R + \alpha_m} \left(\alpha_s \alpha_R + \frac{2\alpha_m}{T} \right) \\ \hline \end{array}. \tag{13}$$

Сумісному інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь електромеханічного стану (5), (9). При тому вираз (5) для електромагнетного моменту спрощується

$$M_E = -\sqrt{3} I_S (I_{RA} + I_{RB}). \tag{14}$$

Як приклад реалізації моделі проаналізуємо несиметричний режим роботи асинхронного двигуна, а саме обрив фази C статора. За основу візьмемо паспортні дані трифазного асинхронного двигуна серії 4А з короткозамкненим ротором.

Номинальна напруга обмотки статора $U_{ном} = 380/220$ В, номинальна потужність на валу $P_{ном} = 5500$ Вт, момент інерції $J = 0,04$ кг·м², опори обмоток статора і ротора: $R_S = 1,1$ Ом, $R_R = 0,85$ Ом, кількість пар полюсів $p_0 = 1$, обернені індуктивності розсіяння обмоток статора і ротора: $\alpha_S = 262$ Гн⁻¹, $\alpha_R = 136,5$ Гн⁻¹, основна обернена індуктивність розсіяння $\alpha_m = 3,9$ Гн⁻¹, кое-фіцієнт корисної дії $\eta = 0,875$, коефіцієнт потужності $\cos\varphi = 0,91$, номинальна швидкість обертання ротора $n_{ном} = 2980$ об/хв.

Інтегрування диференціальних рівнянь електромеханічного стану двигуна (5), (9) здійснено явним методом Рунге-Кутта 4-го порядку. Крок часової дискретизації $h = 0,02 / 360$. Для розрахунку перехідного процесу використано професійну мову програмування *Visual FORTRAN* з графічним пакетом *GRAPHER*.

Просимульовано холостий пуск двигуна до усталеної швидкості з механічним моментом на валу, що становить $M_{мех} = 1$ Нм. Потім двигун від'єднується від мережі, сповільнює свою кутову швидкість обертання і в момент комутації при $\omega = 100$ с⁻¹ живиться вже від двофазної мережі. Перехідний процес здійснений при ненульовій початковій швидкості та засвідчує успішний запуск двигуна.

На рис.1, 2 показано перехідний процес для кутової швидкості і струму у фазі двигуна. З графіка видно, що двигун виходить на усталений процес за 1,7 с. Тут же спостерігається незначне перерегулювання швидкості (до 15 рад./с.), що є можливим у реальних машинах. Слід відмітити, що попередній пуск двигуна від трифазної мережі відбувався швидше.

З нульової швидкості (повної його зупинки) двигун не запуститься, оскільки його магнітне поле буде не обертовим, а еліпсоїдним, а це буде потребувати встановлення в обмотці статора додаткових фазозсуваючих пристроїв, таких як конденсатори. Але це виходить за межі даного дослідження. Електрична схема під'єднання обмоток статора двигуна до двофазної мережі зображена на рис.3.

На рис.4. показано залежність $\omega = \omega(t)$, при $\omega(0) = 0$ рад./с. Тут спостерігається пульсація кутової швидкості безпосередньо біля нуля, що свідчить про наявність вібрацій на валу двигуна і є вкрай небажаним явищем для його конструкційних елементів.

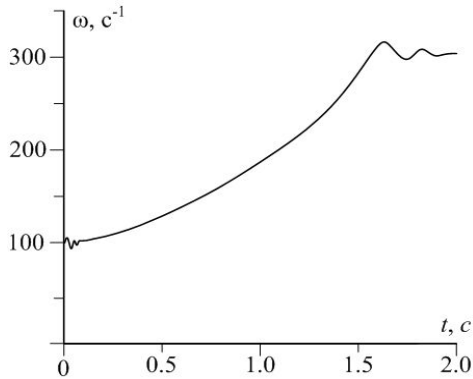


Рис.1. Залежність кутової швидкості від часу асинхронного двигуна в двофазному режимі при $\omega(0) = 100$ рад./с.

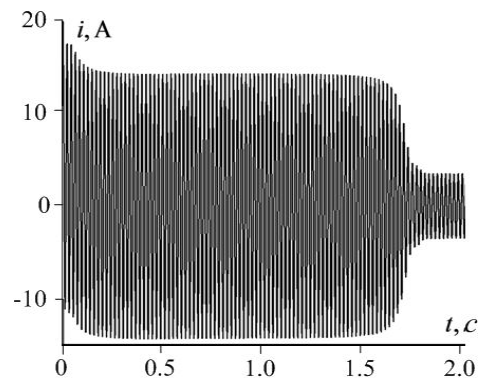


Рис.2. Перехідний струм фази статора асинхронного двигуна

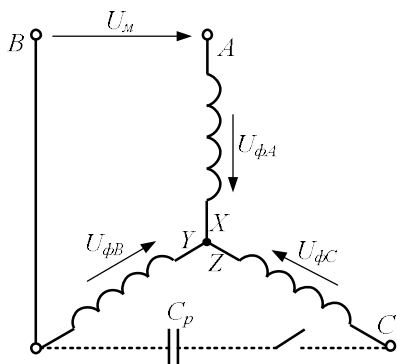


Рис.3. Електрична схема трифазного двигуна при роботі від однофазної мережі

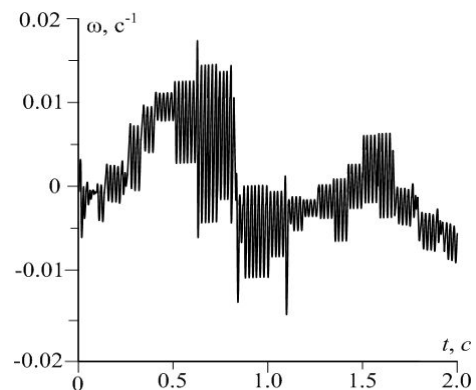


Рис.4. Залежність кутової швидкості від часу асинхронного двигуна в двофазному режимі при пуску від повної зупинки $\omega(0) = 0$ рад./с.

Розглянуті математичні моделі асинхронних машин з короткозамкнутим ротором будуть справедливими для машин з фазним ротором, якщо коло ротора еквівалентувати відповідною фазною обмоткою, як це прийнято в теорії електричних машин.

Висновок. Запропонований метод аналізу дає змогу описати перехідні процеси в асинхронних двигунах диференціальними рівняннями в нормальній формі Коші. Такі рівняння нежорсткі й інтегруються простими в комп'ютерній реалізації явними методами. Тому така форма запису набуває принципового значення. Результати симуляції підтверджують високу ефективність і чисельну стійкість запропонованого методу. Запропонована модель двофазного режиму роботи асинхронного двигуна дає змогу відтворювати всеможливі несиметричні режими, а також аналізувати перехідні процеси у випадку живлення двигуна від двофазної мережі.

Інформаційні джерела

1. Чабан В. Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів /В. Й.Чабан. – Львів: В-во Держуніверситету „Львівська політехніка”, 1997. – 342 с.
2. Чабан В.Й. Математична модель вузла живлення асинхронних машин. Монографія / В.Й. Чабан, В.В. Лишук. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2011. – 116 с.