УДК 528.1:519.213

Про відхилення та ймовірності середніх значень

© Пряха Б.Г.
Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ

Обгрунтовується теорема теорії точності вимірювань, визначається ймовірність среднього значення випадкової величини, степінь довіри до генеральної сукупності

Постановка проблеми. Відомо, що багато факторів будівництва мають випадкову природу. До їх числа відносяться міцність матеріалів, навантаження, розміри конструкцій та інші фактори, зміну яких враховують при оцінці надійності конструкцій [1].

Врахувати окремий випадковий фактор можна тоді, коли відомі характеристики випадкових величин за якими визначається цей фактор. Головними характеристиками випадкових величин є математичне сподівання μ і генеральна дисперсія σ^2.

Проблема в тому, що стандартне відхилення σ не можна приписувати середньому значенню μ, оскільки це відхилення теорія ймовірностей розповсюджує на окремі значення випадкової величини.

Якщо в генеральній сукупності вимірів обсягу k обчислити середнє значення $\bar{x}$, відхилення $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, то відхилення $\sigma_{\bar{x}}$ середнього значення визначається за правилом [2]:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{k}\,.$$

При доведенні цього твердження значенням x випадкової величини приписуються однакові дисперсії σ^2.

Це суперечить теоремі [3], згідно з якою дисперсії σ_x значень x випадкової величини не однакові, визначаються за правилом:

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 + (x-\mu)^2. \qquad (1)$$

Оскільки середні значення є випадковими величинами, їм потрібно приписувати не тільки відхилення, а і ймовірності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В праці [3] обгрунтована теорема за якою визначають середню дисперсію $\bar{\sigma}^2$ випадкової величини:

$$\bar{\sigma}^2 = 2\sigma^2 = \sum\nolimits_x \sigma_x^2 f(x), \qquad (2)$$

де $\bar{\sigma} = \sqrt{2}\sigma$ і називається середнім стандартним відхиленням; σ_x^2 – дисперсії значень x величини X, обчислюють за правилом (1); $f(x)$ – це функція розподілу ймовірностей.

Виклад основного матеріалу досліджень. В теорії точності вимірювань генеральна сукупність вимірів не є гіпотетичною, оскільки до неї ставляться чіткі вимоги: сукупність повинна мати повну групу G значень вимірів, наповненість $F = 1$, таку добротність Q, що дозволяє надійно встановити функцію $f(x)$ розподілу ймовірностей [4].

Теорема. *Якщо дискретна випадкова величина* X *має стандартне відхилення* σ, *то відхилення* σ_μ *середнього значення* μ *визначається так:*

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma} = \sqrt{2}\sigma, \qquad (3)$$

де $\bar{\sigma}$ – це середнє стандартне відхилення величини X.

Доведення: Припустимо, генеральна сукупність має повну групу значень вимірів $G = \{x_i\}_{i=1}^{k_G}$, а величина X розподіл імовірностей $\{x, f(x)\}$, математичне сподівання:

$$\mu = E(X) = \sum\nolimits_x xf(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_{k_G} f(x_{k_G}), \qquad (4)$$

де $f(x)$ – функція розподілу ймовірностей [5].

Розсіювання будь-якої дискретної величини X відносно центра y визначається так:

$$D(X) = E[(X-y)^2] = \frac{\sum_x (x-y)^2 f(x)}{\sum_x f(x)}. \qquad (5)$$

Оскільки генеральна дисперсія σ^2 визначається в імовірнісному полі подій, для якого $\sum_x f(x) = 1$, а за центр розсіювання береться середнє значення $y = \mu$, то від правила (5) приходимо до традиційного означення дисперсії:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x). \qquad (6)$$

При визначенні дисперсії середнього значення μ за рівнянням (4) будемо розглядати випадкові величини $X_1 = (x_1)f(x_1)$; $X_2 = (x_2)f(x_2)$;… $X_{k_G} = (x_{k_G})f(x_{k_G})$, що являють собою одноточкові множини, тобто приймають тільки одне значення, мають відповідно ймовірності: $f(x_1)$, $f(x_2),\ldots, f(x_{k_G})$.

З урахуванням правила (5) одержимо:

$$\sigma_\mu^2 = D[E(X)] = D\left(\sum_x xf(x)\right) = D[x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_{k_G} f(x_{k_G})] =$$

$$= D[(x_1)f(x_1)] + D[(x_2)f(x_2)] + \ldots + D[(x_{k_G})f(x_{k_G})] =$$

$$= \frac{D(x_1)[f(x_1)]^2}{f(x_1)} + \frac{D(x_2)[f(x_2)]^2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{D(x_{k_G})[f(x_{k_G})]^2}{f(x_{k_G})} =$$

$$= D(x_1)f(x_1) + D(x_2)f(x_2) + \ldots + D(x_{k_G})f(x_{k_G})] =$$

$$= \sigma_{x_1}^2 f(x_1) + \sigma_{x_2}^2 f(x_2) + \ldots + \sigma_{x_{k_G}}^2 f(x_{k_G}), \qquad (7)$$

де $\sigma_{x_1}^2, \sigma_{x_2}^2, \ldots, \sigma_{x_{k_G}}^2$ – це дисперсії значень $x_1, x_2, \ldots, x_{k_G}$ величини X, що визначаються за правилом (1). Згідно теореми (2)

$$\sigma_{x_1}^2 f(x_1) + \sigma_{x_2}^2 f(x_2) + \ldots + \sigma_{x_{k_G}}^2 f(x_{k_G}) = \sum_{i=1}^{k_G} \sigma_{x_i}^2 f(x_i) = \bar{\sigma}^2 = 2\sigma^2,$$

де $\bar{\sigma}^2$ – середня дисперсія (2); σ^2 – генеральна дисперсія (6).

З урахуванням цієї залежності рівняння (7) приводиться до вигляду: $\sigma_\mu^2 = \bar{\sigma}^2 = 2\sigma^2$. Від цього правила приходимо до відповідності (3).

Теорему доведено.

З теореми випливає наслідок.

Наслідок. *Якщо випадкова вибірка має вибіркове стандартне відхилення s, то вибірковому середньому значенню* $\bar{x}$ *приписується відхилення:*

$$s_{\bar{x}} = \bar{s} = \sqrt{2}s, \qquad (8)$$

де $\bar{s}$ – середнє вибіркове стандартне відхилення.

Справді, вибіркова дисперсія s^2 є оцінка для дисперсії σ^2, а середнє вибіркове і вибіркове стандартне відхилення мають таку залежність [3]: $\bar{s} = \sqrt{2}s$.

Отже, від відповідності (3) приходимо до правила (8).

Стандартне відхилення σ величини X і відхилення σ_μ мають вигляд:

$$\sigma = \sqrt{\sum_x (x-\mu)^2 f(x)} = \sqrt{\sum_x V_x^2 f(x)};$$

$$\sigma_\mu = \bar{\sigma} = \sqrt{\sum_x 2(x-\mu)^2 f(x)} = \sqrt{\sum_x 2V_x^2 f(x)} = \sqrt{\sum_x \nu_x^2 f(x)},$$

де V_x, v_x – це відповідно відхилення і квадратичні відхилення значень x.

На рисунку 1 показано значення x_i величини X, середнє значення μ та відхилення $V_i = x_i - \mu$. При визначенні стандартного відхилення σ (рисунок 1а) підносять до квадрату відхилення V, а при обчисленні відхилення σ_μ (рисунок 1б) визначають квадрати v^2 квадратичних відхилень v. В цьому полягає суть величин σ, σ_μ.

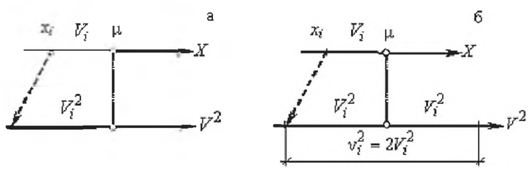

Рисунок 1. Схема визначення відхилень:
а – стандартного відхилення σ; б – відхилення σ_μ

Якщо випадкова величина нормально розподілена, має середнє значенням μ, стандартне відхилення σ, то щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}, \quad -\infty\langle x \langle\infty.$$

Від цієї функції, з урахуванням залежності (3), приходимо до такої функції:

$$n(x;\mu,\bar{\sigma}) = n(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\bar{\sigma}} e^{-[(x-\mu)/\bar{\sigma}]^2}, \quad -\infty\langle x \langle\infty.$$

Якщо прийняти $\mu = 0$; $\bar{\sigma} = 1$, то одержимо стандартний нормальний розподіл:

$$n(x;\mu,\bar{\sigma}) = n(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad -\infty \langle x \langle \infty.$$

За цією функцією знаходимо інтегральну функцію нормального розподілу

$$P(-\infty \langle X \langle \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} n(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Інтеграл називається інтегралом Ейлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Отже, для нормально розподіленої сукупності

$$P(x_{\min} - [Q]/2 \langle X \langle x_{\max} + [Q]) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Розглянемо твердження Лапласа [7]: «Інтеграл, взятий в даних границях і поділений на той самий інтеграл, поширений до нескінченності додатної і від'ємної, виразить ймовірність того, що відхилення від істини міститься в цих границях. Такий загальний закон імовірності результатів, указаних великим числом спостережень».

Оскільки, інтеграл імовірностей поширений до нескінченності додатної і від'ємної дорівнює одиниці, тому за наведеним твердженням ймовірність результату спостережень дорівнює інтегралу ймовірностей:

$$P(\mu) = P(x_{\min} \langle X \langle x_{\max}) = P(z_1 \langle Z \langle z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2} dz = \int_{z_1}^{z_2} n(z;0,1) dz, \quad (9)$$

де $z_1 = \dfrac{x_{\min} - \mu}{\sigma}$; $z_2 = \dfrac{x_{\max} - \mu}{\sigma}$ – нормовані випадкові величини.

Щоб встановити степінь невизначенності структуризованого поля подій, тобто такого поля, ймовірності елементарних подій якого задовольняють другу аксіому ймовірностей:

$P(I) = \sum_x f(x) = 1$ для достовірної події I,

теорія інформації вводить поняття ентропії. Ентропією (entropy) називається теоретико-інформаційна міра степені невизначеності випадкової величини. Цю характеристику розподілу ймовірностей $f(x) = p(x)$ представляють математичним сподіванням

$$H(X) = E[-\log_2 f(x)],$$

а визначають за правилом:

$$H(X) = -\sum_x f(x) \log_2 f(x). \qquad (10)$$

За одиницю невизначенності приймається невизначеність поля подій $\{x_1, x_2\}$ такого стохастичного експерименту, в якому події x_1, x_2 рівноймовірні. Припустимо, генеральна сукупність вимірів має повну групу значень $G = \{x_1, x_2\}$ обсягу $k_G = 2$. Якщо ці два «значення» вимірів рівноймовірні, тобто $f(x_1) = f(x_2) = 0{,}5$, то ентропія розподілу ймовірностей $H(X) = 1$. Одиницю називають двійковою одиницею і позначають через bit (скорочене позначення двох слів: binary digit – двійкова одиниця).

Згідно першої і другої аксіоми ймовірностей для будь-якої події E і достовірної події I ймовірність має властивості: $P\{E\} \geq 0$; $P\{I\} = 1$. Отже, ентропія розподілу ймовірностей є завжди невід'ємною, вона дорівнює нулю, коли є достовірна подія I.

З означення (10) випливає, що будь-яка зміна ймовірностей в сторону їх вирівнювання збільшує ентропію. Тобто, якщо є дві генеральні сукупності вимірів однакового обсягу k значення яких нормально розподілені, мають однаковий ступінь квантування $[Q]$, то більшу ентропію розподілу ймовірностей матиме та сукупність, що має більший розмах W значень.

Припустимо, щільність ймовірності дискретної величини X апроксимується неперервною функцією $n(x; \mu, \sigma)$. В цьому разі ентропія визначається так:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} n(x; \mu, \sigma) \log_2 n(x; \mu, \sigma) dx.$$

В теорії точності вимірювань, при оцінюванні з імовірнісних позицій розрахункових моделей теорії споруд [1] розглядають нормально розподілені випадкові величини.

Неперервний розподіл, який має найбільшу ентропію при даній дисперсії σ^2 , є нормально розподіленим [6] з

$$H_\sigma(X) = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma^2}.$$

Теоретична ентропія розподілу ймовірностей значень дискретної величини X, для даного ступеня квантування $[Q]$, стандартного відхилення σ, визначається так:

$$H_{\sigma}(X)=\log_2\sqrt{2\pi e\left[\frac{\sigma}{[Q]}\right]^2}. \tag{11}$$

Якщо випадкова величина нормально розподілена, то

$$H(X)-H_{\sigma}(X)=0;\ \ H(X)/H_{\sigma}(X)=1.$$

Від цих міркувань приходимо до такого означення.

Означення. *Є випадкова величина X. Визначається ентропія $H(X)$ розподілу ймовірностей значень випадкової величини і теоретичне значення ентропії $H_{\sigma}(X)$. Відношення*

$$\tilde{P}(X)=H(X)/H_{\sigma}(X) \tag{12}$$

називається *степенем довіри* до генеральної сукупності.

Для нормально розподіленої випадкової величини $H(X)=H_{\sigma}(X)$, а $\tilde{P}(X)=1$.

Приклад: Електронним тахеометром 3Та5Р, 2003 р, №15377 виконано багаторазове вимірювання однієї короткої лінії. Розподіл імовірностей, характеристики величини $X=x=\{6830\text{мм}+x_i\}_{i=1}^{5}$ наведені в таблиці.

Таблиця. Розподіл імовірностей, характеристики випадкової величини

$G=\{x_i\}_{i=1}^{5}$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	μ = 5,678 мм
x_i (мм)		4	5	6	7	8	σ^2 = 0,3683 мм^2
$(x_i)_{i=1}^{1000}$	k'	12	360	567	60	1	σ = 0,607 мм
	$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$f(x_5)$	$H(X)$ = 1,3248 bit
	$p(x)$	0,012	0,360	0,567	0,060	0,001	$H_{\sigma}(X)$ = 1,3266 bit

Обсяг генеральної сукупності k = 1000. Ступінь квантування значень вимірів $[Q]$ = 1 мм. Обсяг повної групи значень вимірів k_G = 5.

Емпірична функція $f(x)$ розподілу ймовірностей має вигляд:

$f(x)=k'/k=p(x)$, де k' – кількість вимірів, що мають значення x;

k – обсяг генеральної сукупності.

Середнє значення μ обчислено за означенням (4), а генеральна дисперсія σ^2 – за означенням (6). Ентропію $H(X)$ розподілу ймовірностей і її теоретичне значення $H_{\sigma}(X)$ визначено за правилами (10), (11).

Середньому значенню μ = 6830 + 5,678 = 6835,68 мм приписується відхилення:

$$\sigma_\mu = \sqrt{2}\sigma = (1,414)(0,607) = 0,86 \text{ мм.}$$

Оцінимо довірчий інтервал ($x_{\min} - [Q]/2; x_{\max} + [Q]/2$) для величини X, довжина якого визначається аксіомою теорії точності вимірювань [8]:

$$z_1 = \frac{x_{\min} - [Q]/2 - \mu}{\sigma} = \frac{4 - 0,5 - 5,678}{0,607} = \frac{-2,178}{0,607} = -3,59;$$

$$z_2 = \frac{x_{\max} + [Q]/2 - \mu}{\sigma} = \frac{8 + 0,5 - 5,678}{0,607} = \frac{2,822}{0,607} = 4,65.$$

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_2}^{z_1} e^{-z^2/2} dz = P(Z\langle 4,65) - P(Z\langle -3,59) =$$

$$= 0,99999 - 0,00009 = 0,9999.$$

За правилом (9) знайдемо ймовірність середнього значення:

$$z_1 = \frac{x_{\min} - \mu}{\sigma} = \frac{4 - 5,678}{0,607} = \frac{-1,678}{0,607} = -2,76;$$

$$z_2 = \frac{x_{\max} - \mu}{\sigma} = \frac{8 - 5,678}{0,607} = \frac{2,322}{0,607} = 3,82.$$

$$P(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_2}^{z_1} e^{-z^2/2} dz = P(Z\langle 3,82) - P(Z\langle -2,76) =$$

$$= 0,9999 - 0,0029 = 0,9970.$$

Таким чином, середнє значення μ визначено з імовірністю $P(\mu)$ = 0,9970.

Степінь довіри до генеральної сукупності обчислимо за правилом (12):

$$\tilde{P}(X) = H(X)/H_\sigma(X) = (1,3248)/(1,3266) = 0,9986.$$

Висновки

1. Згідно з наведеною теоремою (3), середньому значенню випадкової величини приписується середнє стандартне відхилення.

2. Чим більше розподіл генеральної сукупності наближається до нормального, тим з більшою ймовірністю визначається середнє значення.
3. Якщо є кілька генеральних сукупностей вимірів, що мають однаковий розподіл, обсяг k, ступінь квантування значень $[Q]$, то меншу ентропію розподілу ймовірностей $H(X)$ матиме та генеральна сукупність, що має менший розмах значень.
4. Степінь довіри $\tilde{P}(X)$ показує наскільки генеральна сукупність наближається до нормального розподілу.
5. Відповідність $H(X)/H_\sigma(X)=1$ – це критерій виявлення генеральних сукупностей, що не підпадають під нормальний закон.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямку полягають в знаходженні теоретичної функції розподілу ймовірностей значень дискретних величин, визначенні найімовірніших оцінок ефективності розрахункових моделей теорії споруд, дослідженні відхилень результатів розрахунку сил, напруг, деформацій від їх дійсних значень.

Перелік посилань

1. **Усаковский С.Б.** С какой точностью вести расчеты прочности сооружений: Монография. – К.: КНУСА, 2005. – 160 с.
2. **Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.** Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – С. 174.
3. **Білецький Я.В., Пряха Б.Г.** Про дисперсії геодезичних вимірів // Інженерна геодезія: Науково-технічний збірник. – Вип. 49 / Відповідальний редактор С.П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2003. – С. 36-46.
4. **Пряха Б.Г. Білецький Я.В.** Про точність геодезичних вимірювань // Вісник геодезії та картографії. – 2003. – №3. – С. 43-49.
5. **Walpole Ronald E, Myers Raymond H.** Probability and Statistics for Engineers and Scientists. 3-th edition, Macmillan Publishing Company. – New York, 1985. – 639 p.
6. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научних работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
7. **Вероятность и математическая статистика:** Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – Большая Российская энциклопедия, – 1999. – С. 843.
8. **Пряха Б.Г.** Про точність вимірювань // Реконструкція житла. – №7. – 2006. – К.: Нора-друк – 2006.

Отримано 30.03.06