УДК 621.391: 517. 518:510.52

О.М. ЛИТВИН[1], В.М. УДОВИЧЕНКО[2]

[1]Українська інженерно-педагогічна академія
[2]Національний технічний університет "ХПІ", Україна

ОПЕРАТОРИ ФІНІТНОГО ТРИВИМІРНОГО ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ХАРТЛІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ФАЙЛОНА ТА ТРИЛІНІЙНИХ СПЛАЙНІВ, ТОЧНІ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМАХ ЗАДАНОГО ПОРЯДКУ

Запропоновано й досліджено оператори обчислення фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Хартлі на основі методу Файлона та трилінійних сплайнів (лінійних за кожною змінною), точні на тригонометричних поліномах заданого порядку. Зокрема, досліджено їх інтерполяційні властивості. Наведено приклад.

оператор, тривимірне дискретно-неперервне перетворення Хартлі, метод Файлона, трилінійний сплайн, тригонометричний поліном, інтерполяційні властивості

Вступ

У літературі, присвяченій дискретному перетворенню Хартлі, основними напрямками досліджень є різноманітні варіанти реалізації швидких алгоритмів дискретного перетворення Хартлі [1, 2], порівняння швидких алгоритмів дискретного перетворення Хартлі й дискретного перетворення Фур'є [3], створення багатовимірних варіантів дискретного перетворення Хартлі [4]. Класичне тривимірне перетворення Хартлі [5, с. 66]

$$H(u,v,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\times$$
$$\times cas\left[2\pi(ux+vy+tz)\right]dx\,dy\,dz,$$

$$f(x,y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(u,v,t)\times$$
$$\times cas\left[2\pi(ux+vy+tz)\right]du\,dv\,dt$$

в прикладних задачах, орієнтованих на комп'ютерні технології, використовують у вигляді прямого й оберненого дискретного перетворення Хартлі [5]:

$$\mathrm{H}(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{N_1N_2N_3}\sum_{\tau_1=0}^{N_1-1}\sum_{\tau_2=0}^{N_2-1}\sum_{\tau_3=0}^{N_3-1} f(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\times$$
$$\times cas\left(2\pi\sum_{s=1}^{3}\frac{v_s\tau_s}{N_s}\right),$$
$$v_1=\overline{0,N_1-1},\ v_2=\overline{0,N_2-1},\ v_3=\overline{0,N_3-1};$$

$$f(\tau_1,\tau_2,\tau_3)=\sum_{v_1=0}^{N_1-1}\sum_{v_2=0}^{N_2-1}\sum_{v_3=0}^{N_3-1}\mathrm{H}(v_1,v_2,v_3)\times$$
$$\times cas\left(2\pi\sum_{s=1}^{3}\frac{v_s\tau_s}{N_s}\right),$$
$$\tau_1=\overline{0,N_1-1},\ \tau_2=\overline{0,N_2-1},\ \tau_3=\overline{0,N_3-1}, \qquad (1)$$

де $cas(t)=:\cos(t)+\sin(t)$. Тривимірне дискретне перетворення Хартлі (1) з точки зору характеристик точності має такі самі недоліки, що й двовимірне прямокутне дискретне перетворення Фур'є [6].

1. Постановка проблеми

Проблема, яку ми вирішуємо в даній статті, полягає в такому:

1) побудова ефективних операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Хартлі для дійсних функцій трьох змінних з використанням методу Файлона (Filon) [7] обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій і з заміною функції $f(x,y,z)$ сплайнами першого степеня за кожною змінною (ФТДНПХ_B-Sp1_FL) для фіксованої кількості відліків

$$f(x_{p_1},y_{p_2},z_{p_3}),\ p_s=\overline{-M_s,M_s},\ s=\overline{1,3},$$

які мали б нову порівняно з класичним тривимірним ДПХ властивість – можливість формувати неперервне наближення функції за її дискретними відліками і при цьому забезпечувати більш високі характеристики точності порівняно з класичним тривимірним ДПХ (при однаковій кількості вузлів) наближуваної функції;

2) побудова (при $N_s \le M_s$, $s=\overline{1,3}$) операторів точних на тригонометричних поліномах порядку $N=(N_1, N_2, N_3)$ – ФТДНПХ_B-Sp1_FL_T;

3) дослідження властивостей одержаних операторів, зокрема, доведення, що при $N=M$ ці оператори є операторами інтерполяційного типу:

$$L_{M,M}^{H,3d,Sp1} f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}) = f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}),$$

$$p_s = \overline{-M_s, M_s}, \ s=\overline{1,3}.$$

2. Вирішення проблеми

Для наближеного обчислення коефіцієнтів Хартлі

$$b_{k_1,k_2,k_3}^{H,3d}(f) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y,z) \times$$

$$\times cas(k_1 x + k_2 y + k_3 z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$k_s = \overline{-N_s, N_s}, \ s=\overline{1,3} \tag{2}$$

у тривимірній сумі Хартлі

$$S_N^{H,3d}(f) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} \sum_{k_3=-N_3}^{N_3} b_{k_1,k_2,k_3}^{F,3d}(f) \times$$

$$\times cas(k_1 x + k_2 y + k_3 z), \ N_s \le M_s, \ s=\overline{1,2}$$

дійсної функції $f(x,y,z) \in C^r(D)$, $D=[-\pi,\pi]^3$, $r=1,2,3,...$ використаємо підхід, запропонований в [7] і модифікований в [8], [9]. У даному випадку ми замінюємо функцію $f(x,y,z)$ її трилінійним сплайном, який має вигляд

$$Sp1_M^{3d}(f;x,y,z) = \sum_{p_1=-M_1}^{M_1} \sum_{p_2=-M_2}^{M_2} \sum_{p_3=-M_3}^{M_3} h1(x, p_1, \Delta_1) \times$$

$$\times h1(y, p_2, \Delta_2)\, h1(z, p_3, \Delta_3)\, f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}),$$

$$h1(u_s, p_s, \Delta_s) = (|t-1| - 2|t| + |t+1|)/2;$$

$$t = u_s / \Delta_s - p_s, \ \Delta_s = 2\pi e_s, \ e_s = 1/(2M_s+1),$$

$$s=\overline{1,3}, \ u_1 = x, \ u_2 = y, \ u_3 = z, \ x_{p_1} = \Delta_1 p_1,$$

$$y_{p_2} = \Delta_2 p_2, \ z_{p_3} = \Delta_3 p_3, \ (x,y,z) \in D. \tag{3}$$

Нехай $f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3})$ задовольняє вимоги тривимірної теореми дискретизації [10]. Підставляючи (3) в (2), отримуємо:

$$b_{k_1,k_2,k_3}^{H,3d}(f) \approx a_{N,M,k_1,k_2,k_3}^{H,3d,\mathrm{Sp1}}(f) = \frac{1}{8\pi^3} \times$$

$$\times \sum_{p_1=-M_1}^{M_1} \sum_{p_2=-M_2}^{M_2} \sum_{p_3=-M_3}^{M_3} f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}) \times$$

$$\times \int_{(p_1-1)\Delta_1}^{(p_1+1)\Delta_1} \int_{(p_2-1)\Delta_2}^{(p_2+1)\Delta_2} \int_{(p_3-1)\Delta_3}^{(p_3+1)\Delta_3} h1(x, p_1, \Delta_1) \times$$

$$\times h1(y, p_2, \Delta_2)\, h1(z, p_3, \Delta_3) \times$$

$$\times cas(k_1 x + k_2 y + k_3 z)\, dx\, dy\, dz, \tag{4}$$

$$k_s = \overline{-N_s, N_s}, \ N_s \le M_s, \ s=\overline{1,3}. \tag{5}$$

Виконавши обчислення інтеграла в (4) з урахуванням (3), (5), одержимо:

$$a_{N,M,k_1,k_2,k_3}^{H,3d,\mathrm{Sp1}}(f) = \Omega(k_1,k_2,k_3,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,J) \times$$

$$\times \sum_{p_1=-M_1}^{M_1} \sum_{p_2=-M_2}^{M_2} \sum_{p_3=-M_3}^{M_3} f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}) \times$$

$$\times cas\left(\sum_{s=1}^{3} k_s\, p_s\, \Delta_s\right), \tag{6}$$

де $\Omega(k_1,k_2,k_3,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,J) = \{ [\, J(k_1,\Delta_1)\ J(k_2,\Delta_2) \times$

$$\times J(k_3,\Delta_3), (k_1 \ne 0 \wedge k_2 \ne 0 \wedge k_3 \ne 0)] \vee$$

$$\vee [J(k_1,\Delta_1)\, J(k_2,\Delta_2)\, e_3, (k_1 \ne 0 \wedge k_2 \ne 0 \wedge k_3 = 0)] \vee$$

$$\vee [J(k_1,\Delta_1)\, e_2\, J(k_3,\Delta_3), (k_1 \ne 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 \ne 0)] \vee$$

$$\vee [\, e_1\, J(k_2,\Delta_2)\, J(k_3,\Delta_3), (k_1 = 0 \wedge k_2 \ne 0 \wedge k_3 \ne 0)] \vee$$

$$\vee [e_1\ e_2\ J(k_3,\Delta_3), (k_1 = 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 \ne 0)] \vee$$

$$\vee [\, e_1\ J(k_2,\Delta_2)\ e_3, (k_1 = 0 \wedge k_2 \ne 0 \wedge k_3 = 0)] \vee$$

$$\vee [\, J(k_1,\Delta_1)\ e_2\ e_3, (k_1 \ne 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 = 0)] \vee$$

$$\vee [\, e_1\ e_2\ e_3, (k_1 = 0 \wedge k_2 = 0 \wedge k_3 = 0)\,]\},$$

$$J(k_s,\Delta_s) = [1-\cos(k_s \Delta_s)] / [\pi (k_s)^2 \Delta_s],$$

$$k_s = \overline{-N_s, N_s}, \ s=\overline{1,3}.$$

Оператор

$$U_{N,M}^{H,3d,Sp1} f(x,y,z) =$$

$$= \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} \sum_{k_3=-N_3}^{N_3} a_{N,M,k_1,k_2,k_3}^{H,3d,Sp1}(f) \times$$

$$\times cas(k_1 x + k_2 y + k_3 z), \ (x,y,z) \in D \tag{7}$$

дозволяє обчислювати неперервне наближення функції $f(x,y,z) \in C^r(D)$, $r=1,2,3,...$ за її дискретними відліками

$$f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}),\ (x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}) \in (-\pi, \pi)^3 .$$

При застосуванні (7) враховуємо вимоги тривимірної теореми дискретизації [10, с. 13] для вибору необхідних M_1, M_2, M_3 для даної функції $f(x, y, z)$.

Лема. При умовах

$$m = \overline{-M_1, M_1},\ n = \overline{-M_2, M_2},$$

$$s = \overline{-M_3, M_3},\ p_r = \overline{-N_r, N_r},\ N_r \le M_r,\ r = \overline{1,3}$$

виконується рівність

$$\sum_{k_1=-M_1}^{M_1} \sum_{k_2=-M_2}^{M_2} \sum_{k_3=-M_3}^{M_3} cas\left(\sum_{s=1}^{3} k_s\, p_s\, \Delta_s\right) \times$$

$$\times cas(k_1 m \Delta_1 + k_2 n \Delta_2 + k_3 s \Delta_3) =$$

$$= \begin{cases} \prod_{q=1}^{3} (2M_q + 1),\ (p_1 = m) \wedge (p_2 = n) \wedge (p_3 = s); \\ 0, \quad (p_1 \ne m) \vee (p_2 \ne n) \vee (p_3 \ne s). \end{cases}$$

Доведення проводиться на основі відомих одновимірних рівностей [11, с. 68].

Теорема. Нехай вузли й коефіцієнти формули (7), які використовуються для наближеного обчислення коефіцієнтів Хартлі $b^{H,3d}_{k_1,k_2,k_3}(f)$, задовольняють умову: $a^{H,3d,Sp1}_{N,M,k_1,k_2,k_3}[cas(p_1 x + p_2 y + p_3 z)] =$

$$= \delta_{k_1, p_1} \delta_{k_2, p_2} \delta_{k_3, p_3} \gamma_{k_1,k_2,k_3},\ k_s = \overline{-N_s, N_s},$$

$$p_s = \overline{-M_s, M_s},\ N_s \le M_s,\ s = \overline{1,3},$$

де $\delta_{s,t}$ – символ Кронекера; $\gamma_{k_1,k_2,k_3} \ne 0$ – деякі числа. Тоді оператор (див. також [8])

$$L^{H,3d,Sp1}_{N,M} f(x, y, z) = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} \times$$

$$\times \sum_{k_3=-N_3}^{N_3} g^{H,3d,Sp1}_{N,M,k_1,k_2,k_3}(f)\, cas(k_1 x + k_2 y + k_3 z),$$

$$(x, y, z) \in \Re^3, \Re = (-\infty, \infty); \tag{8}$$

$$g^{H,3d,Sp1}_{N,M,k_1,k_2,k_3}(f) = \frac{a^{H,3d,Sp1}_{N,M,k_1,k_2,k_3}(f)}{\gamma_{k_1,k_2,k_3}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)},$$

$$k_s = \overline{-N_s, N_s},\ s = \overline{1,3}; \tag{9}$$

$$\gamma_{k_1,k_2,k_3}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = a^{H,3d,\mathrm{Sp1}}_{N,M,k_1,k_2,k_3}[cas(k_1 x + k_2 y +$$

$$+ k_3 z)] = \frac{1}{8\pi^3} \sum_{p_1=-M_1}^{M_1} \sum_{p_2=-M_2}^{M_2} \sum_{p_3=-M_3}^{M_3} cas(k_1 x_{p1} +$$

$$+ k_2 y_{p_2} + k_3 z_{p_3}) \int_{(p_1-1)\Delta_1}^{(p_1+1)\Delta_1} \int_{(p_2-1)\Delta_2}^{(p_2+1)\Delta_2} \int_{(p_3-1)\Delta_3}^{(p_3+1)\Delta_3} h1(x, p_1, \Delta_1) \times$$

$$\times h1(y, p_2, \Delta_2)\, h1(z, p_3, \Delta_3)\, cas(k_1 x + k_2 y + k_3 z) =$$

$$= \Omega(k_1, k_2, k_3, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, J), \tag{10}$$

має такі властивості:

1) $L^{H,3d,Sp1}_{N,M} f \equiv f$, якщо

$$\Big\{ f = \sum_{k_1=-N_1}^{N_1} \sum_{k_2=-N_2}^{N_2} \sum_{k_3=-N_3}^{N_3} C_{k_1,k_2,k_3}\, cas(k_1 x + k_2 y + k_3 z),$$

$$\forall C_{k_1,k_2,k_3} \in \Re \Big\} \wedge (N_s \le M_s, s = \overline{1,3}); \tag{11}$$

2) $L^{H,3d,Sp1}_{M,M} f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}) =$

$$= f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}),\ p_s = \overline{-M_s, M_s}, s = \overline{1,3}. \tag{12}$$

Доведення. Виконавши обчислення (9) з урахуванням (6), (10), отримаємо:

$$g^{H,3d,Sp1}_{N,M,k_1,k_2,k_3}(f) = e_1 e_2 e_3 \sum_{p_1=-M_1}^{M_1} \sum_{p_2=-M_2}^{M_2} \sum_{p_3=-M_3}^{M_3} f(x_{p_1},$$

$$y_{p_2}, z_{p_3})\, cas\left(\sum_{s=1}^{3} k_s\, p_s\, \Delta_s\right),\ k_r = \overline{-N_r, N_r},\ r = \overline{1,3}. \tag{13}$$

Вираз (8) у цьому випадку має вигляд

$$L^{H,3\mathrm{d},\mathrm{Sp1}}_{N,M} f(v_1, v_2, v_3) = e_1 e_2 e_3 \times$$

$$\times \sum_{p_1=-M_1}^{M_1} \sum_{p_2=-M_2}^{M_2} \sum_{p_3=-M_3}^{M_3} f(x_{p_1}, y_{p_2}, z_{p_3}) \times$$

$$\times \sum_{k1=-N1}^{N1} \sum_{k2=-N2}^{N2} \sum_{k3=-N3}^{N3} cas\left(\sum_{s=1}^{3} k_s\, p_s\, \Delta_s\right) \times$$

$$\times cas\left(\sum_{s=1}^{3} k_s v_s\right),\ (v_1, v_2, v_3) \in D. \tag{14}$$

Перейдемо від неперервних $(v_1, v_2, v_3) \in D$ до дискретних змінних $(u1_m, u2_n, u3_s) \in (-\pi, \pi)^3$:

$u1_m = m\Delta_Q$, $u1_m \in (-\pi, \pi)$, $m = \overline{-Q, Q}$, $\Delta_Q = 2\pi\lambda$,

$\lambda = 1/(2Q+1), u2_n = n\Delta_W, u2_n \in (-\pi, \pi), n = \overline{-W, W},$

$\Delta_W = 2\pi\eta$, $\eta = 1/(2W+1)$, $s = \overline{-V, V}$, $u3_s = s\Delta_V$,

$u3_s \in (-\pi, \pi)$, $\Delta_V = 2\pi\gamma$; $\gamma = 1/(2V+1)$.

Нехай виконуються умови:

$Q=M_1$, $N_1=M_1$, $m=\overline{-M_1,M_1}$, $\Delta_Q=\Delta_1$,

$W=M_2$, $N_2=M_2$, $n=\overline{-M_2,M_2}$, $\Delta_W=\Delta_2$,

$V=M_3$, $N_3=M_3$, $s=\overline{-M_3,M_3}$, $\Delta_V=\Delta_3$.

Тоді $u1_m=x_m$, $u2_n=y_n$, $u3_s=z_s$, і для (14) одержимо (при $N=M$):

$$L^{H,3\mathrm{d},\mathrm{Sp1}}_{M,M} f(x_m,y_n,z_s)=e_1 e_2 e_3\times$$

$$\times\sum_{p_1=-M_1}^{M_1}\sum_{p_2=-M_2}^{M_2}\sum_{p_3=-M_3}^{M_3} f(x_{p_1},y_{p_2},z_{p_3})\times$$

$$\times\sum_{k1=-M1}^{M1}\sum_{k2=-M2}^{M2}\sum_{k3=-M3}^{M3} cas\left(\sum_{s=1}^{3}k_s p_s\Delta_s\right)\times$$

$$\times cas\,(k_1 m\Delta_1+k_2 n\Delta_2+k_3 s\Delta_3),$$

$$(x_m,y_n,z_s)\in(-\pi,\pi)^3, m=\overline{-M_1,M_1},$$

$$n=\overline{-M_2,M_2},\ s=\overline{-M_3,M_3}. \qquad (15)$$

Скориставшись твердженнями леми, маємо з (15):

$$L^{H,3d,\,Sp1}_{M,\,M} f(x_m,\,y_n,\,z_s)=$$

$$=f(m\Delta_1,\,n\Delta_2,\,s\Delta_3)=f(x_m,\,y_n,\,z_s),$$

$$m=\overline{-M_1,M_1},\ n=\overline{-M_2,M_2},\ s=\overline{-M_3,M_3}.$$

Властивість 1 доведено. Враховуючи однозначне зображення тригонометричного полінома степеня M за допомогою його значень в точках $(x_{p_1},y_{p_2},z_{p_3})$, $p_s=\overline{-M_s,M_s}$, $s=\overline{1,3}$, а також доведене твердження (13), можна стверджувати, що $\forall \mathrm{C}_{p_1,\,p_2,\,p_3}\in\Re$:

$$L^{H,3d,\,Sp1}_{N,\,M} S^{H,\,3d}_{N}\equiv S^{H,\,3d}_{N}\ \forall S^{H,\,3d}_{N}=$$

$$=\sum_{p_1=-M_1}^{M_1}\sum_{p_2=-M_2}^{M_2}\sum_{p_3=-M_3}^{M_3} C_{p_1,\,p2,\,p3}\times$$

$$\times cas(p_1 x+p_2 y+p_3 z).$$

Теорему доведено.

3. Тестовий приклад

У табл. 1 наведено результати обчислення зведеної похибки наближення функції

$$f(x,y,z)=cos(x/\sqrt{3})\exp(-x/\sqrt{13})\times$$

$$\times cos(y/\sqrt{5})\exp(-y/\sqrt{23})\,cos(z/\sqrt{7})\exp(-z/\sqrt{33})$$

для $M_1=M_2=M_3=3,4,5$ та $R_1=R_2=R_3=7,9,11$ відповідно:

$$\alpha 1=\max_{Um1}\left|\eta(x_r,y_s,z_t)\right|/\Theta,\ \alpha 2=\max_{Um2}\left|\eta(x_r,y_s,z_t)\right|/\Theta,$$

$$\beta 1=\max_{Um1}\left|\mu(x_r,y_s,z_t)\right|/\Theta,\ \beta 2=\max_{Um2}\left|\mu(x_r,y_s,z_t)\right|/\Theta,$$

$$\gamma 1=\max_{Um1}\left|\psi(x_r,y_s,z_t)\right|/\Theta,\ \gamma 2=\max_{Um2}\left|\psi(x_r,y_s,z_t)\right|/\Theta,$$

$$\eta(x_r,y_s,z_t)=f(x_r,y_s,z_t)-S^{H,3d}_{N} f(x_r,y_s,z_t),$$

$$\mu(x_r,y_s,z_t)=f(x_r,y_s,z_t)-U^{H,\,3d,\,Sp1}_{N,M} f(x_r,y_s,z_t),$$

$$\psi(x_r,y_s,z_t)=f(x_r,y_s,z_t)-\mathrm{L}^{H,\,3d,\,Sp1}_{N,M} f(x_r,y_s,z_t),$$

$$\Theta=\max_{Um2}\left|f(x_r,\,y_s,\,z_t)\right|,$$

$$Um1=\begin{pmatrix}-M1\le r\le M1\\ -M2\le s\le M2\\ -M3\le t\le M3\end{pmatrix},\ Um2=\begin{pmatrix}-R1\le r\le R1\\ -R2\le s\le R2\\ -R3\le t\le R3\end{pmatrix},$$

де $m=\prod_{s=1}^{3}(2M_s+1)$ – кількість значень функції $f(x_r,y_s,z_t)$, що використовуються у формулі (4); $r=\prod_{s=1}^{3}(2R_s+1)$ – кількість точок, в яких обчислюються числа $\alpha 2,\beta 2,\gamma 2$; $S^{H,3d}_{N} f(x_r,y_s,z_t)$ – сума Хартлі.

Висновки

Наукова новизна:

1. Запропоновано оператори тривимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Хартлі на основі методу Файлона (Filon) та сплайнів першого степеня.

2. Порівняно з класичним тривимірним ДПХ розвинутий у даній роботі метод дозволяє обчислювати коефіцієнти Хартлі з більш високою точністю, і при дискретних даних на вході запропоновані оператори формують на виході неперервне значення апроксимаційної функції з більш високою точністю.

3. З табл. 1 випливає, що при $N_i=M_i$, $i=\overline{1,3}$ для оператора $L^{H,3\mathrm{d},\mathrm{Sp1}}_{M,M} f(x,y,z)$ дійсно виконуються інтерполяційні властивості (12) ($\gamma 1=0$).

4. Якщо $f(x,y,z)$ є тригонометричним поліномом степеня $N=(N_1,N_2,N_3)$, то можна

Таблиця 1

Результати обчислення зведеної похибки наближення функції

	$\alpha 1$	$\beta 1$	$\gamma 1$	$\alpha 2$	$\beta 2$	$\gamma 2$	r
343	0,0588	0,0699	0	0,0623	0,0958	0,0955	6859
729	0,0521	0,0721	2,0E-15	0,0531	0,0731	0,0806	15625
1331	0,0474	0,0726	1,5E-14	0,0487	0,0735	0,0771	29791

перевірити, що оператор $L_{N,M}^{H,3d,Sp1} f(x,y,z)$ дійсно збігається у всіх точках з $f(x,y,z)$, тобто оператор $L_{N,M}^{H,3d,Sp1} f(x,y,z)$ є точним на тригонометричних поліномах степеня $N = (N_1, N_2, N_3)$.

5. Запропонований метод побудови розглянутих операторів є подальшим узагальненням методу Файлона [9, с. 519], [12, с. 118] обчислення інтегралів від швидко осцилюючих функцій.

Практичну значущість і перспективи подальших досліджень автори вбачають у застосуванні запропонованих операторів при вирішенні деяких задач сучасних інформаційних технологій, наприклад, у деяких задачах математичного моделювання, у деяких відомих непараметричних і параметричних методах спектрального оцінювання сигналів у цифровій обробці сигналів і особливо в тих випадках, де застосування класичного тривимірного ДПХ не забезпечує необхідних вимог з точності тощо.

Література

1. Прадо Ж. Замечания к статье "Быстрое преобразование Хартли" // ТИИЭР. – 1985. – № 12. – С. 182 – 183.

2. Брейсуэл Р.Н., Бьюнеман О. Быстрое двумерное преобразование Хартли. – ТИИЭР. – 1986. – № 9. – С. 128 – 129.

3. Болд Э. Дж. Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ // ТИИЭР. – 1985. – № 12. – С. 184 – 185.

4. Бьюнеман О. Многомерное преобразование Хартли // ТИИЭР. – 1987. – № 2. – С. 97 – 98.

5. Брейсуэл Р. Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с.

6. Удовиченко В.Н. Точностные характеристики прямоугольного двумерного дискретного преобразования Фурье // Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов, SIAP-89. – Рига. – 1989. – С. 204 – 206.

7. Filon L.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals // Proc. Roy. Soc.Edinburgh. – 1928. – № 49. – P. 38 – 47.

8. Литвин О.М., Удовиченко В.М. Наближений метод відновлення функцій за допомогою тригонометричних сум, точний на тригонометричних поліномах заданого степеня // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К. – 1999. – С. 144 – 146.

9. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.

10. Каппелини В., Константинидис А. Дж., Эмилиани А. Цифровые фильтры и их применение. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 360 с.

11. Удовиченко В.М. Одновимірне фінітне дискретно-неперервне перетворення Хартлі на основі сплайнів 1-го порядку // Вестн. Нац. техн. ун-та "ХПИ". Темат. вып.: Электроэнергетика и преобразовательная техника. – Х. – 2003. – Т. 1. – С. 67 – 72.

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.; СПб: Физматлит, 2001. – 630 с.

Надійшла до редакції 04.05.04

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. О.І. Овчаренко, Національний технічний університет "ХПІ", м. Харків; канд. техн. наук, доц. В.М. Гусятін, Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків