

УДК 512.152

В.А. ПОПОВ, О.Ю. МИРОНЕНКО

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского "ХАИ", Харьков*

## АНАЛИЗ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ И ЭРЛАНГОВСКИМИ ПОТОКАМИ

Проводится анализ методов получения решений для вероятностей состояния систем массового обслуживания (СМО) с ограниченным числом мест ожидания, когда входящие потоки требований и потоки обслуживания имеют гиперэкспоненциальное или эрланговское распределение, что позволяет их использовать для моделирования широкого класса объектов. Предложена методика составления графа состояний для указанных систем, получены системы уравнений относительно вероятностей состояния при произвольных порядках распределений для входного потока и потока обслуживания. Использование программного пакета MathCAD подтвердило правомерность предлагаемой методики путем решения серии тестовых примеров. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании радиоэлектронных комплексов, систем связи и передачи данных.

**система массового обслуживания, гиперэкспоненциальное распределение, распределение Эрланга, метод фаз, граф состояний и переходов**

### Введение и постановка задачи

Известные методы решения задач для моделей СМО вида  $G/G/1/N/\infty/Fifo$  основаны на использовании систем уравнений Колмогорова и вложенных цепей Маркова [1–4]. Однако применение метода вложенных цепей Маркова приводит к некоторым трудностям получения матрицы переходных вероятностей и вычисления ее элементов.

Использование уравнений Колмогорова требует составления графа состояний и переходов для системы обслуживания с эрланговскими и гиперэкспоненциальными потоками, что в свою очередь приводит к необходимости использования метода фаз для сведения немарковской системы к марковской. В последнем случае требуются значительные усилия на разработку обоснованного и корректного графа состояний системы, так как от последнего в существенной степени зависит правильность получаемых результатов.

В данной работе предлагается методика построения графа состояний и переходов, составляются уравнения Колмогорова, которые решаются с помощью средств современных пакетов программ. Применять полученные результаты можно при проекти-

ровании систем связи и передачи данных, а также радиоэлектронных комплексов.

### 1. Общие положения метода фаз

#### 1.1. Способы перехода к расширенной системе уравнений

Метод фаз позволяет исследовать систему массового обслуживания летательного аппарата более общего вида, чем пуассоновская, путем введения дополнительных состояний, что позволяет для такой расширенной системы использовать уравнения типа размножения и гибели. Выделим четыре способа перехода к расширенной системе уравнений:

1. Система  $H_k/E_r/1/N$ : время обслуживания распределено по эрланговскому распределению  $r$ -го порядка с параметром  $\mu$ . Для этого случая прибор обслуживания условно заменяется  $r$  отдельными фиктивными приборами (фазами), расположенными последовательно. Каждый запрос, принятый на обслуживание, последовательно проходит через эти  $r$  фаз со временем нахождения на каждой фазе, подчиненным экспоненциальным законом с параметром  $\mu$ . Новый запрос не принимается на обслуживание, пока предыдущий не пройдет все фазы обслужива-

ния. СМО теперь описывается марковским процессом, в системе находится  $i$  запросов, а очередной запрос обслуживается на  $j$ -й фазе. Этому процессу соответствуют вероятности состояний  $P_{ij}(t)$ . Если входной поток – гиперэкспоненциальный  $k$ -го порядка с параметрами  $a_i$  и  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , то к СМО добавляется фиктивное приемное устройство, состоящее из  $k$  параллельных фаз. Каждый запрос на обслуживание вначале направляется в это приемное устройство, где с вероятностью  $a_i$  проходит  $i$ -ую фазу и поступает на обслуживание.

2. Система  $E_k / H_r / 1 / N$ : входной поток – эрланговский  $r$ -го порядка с параметром  $\lambda$ . Для этого случая к СМО добавляется фиктивное приемное устройство, состоящее из  $r$  фаз. Каждое требование вначале направляется в это приемное устройство, где последовательно задерживается на каждой фазе, задержка в которой имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ . После прохождения этого фиктивного приемного устройства запрос поступает в буфер системы. СМО будет описываться марковским случайным процессом. Если время обслуживания распределено по гиперэкспоненциальному закону  $k$ -го порядка с параметрами  $b_i$  и  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , то прибор обслуживания условно заменяется отдельными фазами обслуживания с параметрами  $\mu_i$ , расположенными параллельно. С вероятностью  $b_i$  каждый запрос обслуживается на  $i$ -й фазе.

3. Система  $E_{r_1} / E_{r_2} / 1 / N$ : входной поток – эрланговский  $r_1$ -го порядка с параметром  $\lambda$ . Для этого случая к СМО добавляется фиктивное приемное устройство, состоящее из  $r_1$  фаз. Каждое требование вначале направляется в это приемное устройство, где последовательно задерживается на каждой фазе. Время задержки на каждой фазе имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ . Только после прохождения этого фиктивного приемного устройства запрос поступает в систему. Время об-

служивания распределено по эрланговскому распределению  $r_2$ -го порядка с параметром  $\mu$ . Для этого случая прибор обслуживания условно заменяется  $r_2$  отдельными фиктивными приборами (фазами), расположенными последовательно. Каждый запрос, принятый на обслуживание, последовательно проходит через эти  $r_2$  фаз со временем нахождения на каждой фазе, подчиненным экспоненциальным законом с параметром  $\mu$ . Новый запрос не принимается на обслуживание, пока предыдущий не пройдет все фазы обслуживания.

4. Система  $H_{k_1} / H_{k_2} / 1 / N$ : входной поток – гиперэкспоненциальный  $k_1$ -го порядка с параметрами  $a_i$  и  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, k_1}$ . К СМО добавляется фиктивное приемное устройство, состоящее из  $k_1$  параллельных фаз. Каждый запрос вначале направляется в это приемное устройство, где с вероятностью  $a_i$  проходит  $i$ -ую фазу и поступает на обслуживание. Время обслуживания распределено по гиперэкспоненциальному закону  $k_2$ -го порядка с параметрами  $b_j$  и  $\mu_j$ ,  $j = \overline{1, k_2}$ . В этом случае прибор обслуживания условно заменяется отдельными фазами обслуживания с параметрами  $\mu_j$ , расположенными параллельно. С вероятностью  $b_j$  каждый запрос обслуживается на  $j$ -й фазе.

## 1.2. Построение графа состояний

Алгоритм метода фаз предполагает вначале построение графа состояний и переходов:

- 1) каждое состояние изображается окружностью, в которой необходимо проставить уникальный идентификатор состояния;
- 2) состояния должны отличаться друг от друга не более, чем на одну заявку;
- 3) при создании множества состояний необходимо учитывать фазу поступления и/или фазу обслуживания заявки;

- 4) переход обозначается стрелкой, направленной от более раннего состояния к позднему;
- 5) переход может произойти при поступлении или уходе заявки из системы, или при смене фазы;
- 6) над стрелкой перехода проставляется интенсивность данного перехода;
- 7) наконец, главное условие – на графе должны быть отображены все состояния и переходы, возможные для данной системы.

После построения графа состояний необходимо составить систему дифференциальных уравнений, в результате решения которой можно получить вероятности нахождения СМО в определенном состоянии в динамическом и стационарном режимах.

### 1.3. Составление системы уравнений

Искомая система получается при непосредственном анализе графа по следующим принципам:

- 1) для каждого состояния составляется одно уравнение, т.е. количество уравнений равно числу состояний системы;
- 2) левая часть уравнения есть производная от вероятности нахождения системы в данном состоянии;
- 3) правая часть уравнения есть алгебраическая сумма произведений интенсивностей переходов на вероятности тех состояний, из которых выполняется переход. В этой сумме учитываются только те переходы, которые выходят или входят в данное состояние;
- 4) все слагаемые, которые описывают выходящие переходы, берутся со знаком минус;
- 5) все слагаемые, которые описывают входящие переходы, берутся со знаком плюс.

Решая составленную систему дифференциальных уравнений можно получить формулы для вероятностей состояния системы в динамическом режиме. Если нас будут интересовать статические вероятности состояний СМО, то левые части уравнений будут равняться нулю.

## 2. Анализ систем $GI / G / 1 / N$

### 2.1. Система $E_r / H_k / 1 / N$

Рассмотрим входной поток заявок, который поступает в систему. Реального прибора обслуживания нет, но для удобства понимания к СМО добавляется фиктивное приемное устройство. Заявка, прежде чем попасть в реальную систему, должна пройти "обработку" в этом устройстве, которое состоит из определенного количества последовательных этапов обработки, называемых фазами, которые "обрабатывают" заявку. Фиктивный прибор может в конкретный момент времени обрабатывать не более одной заявки, т.е. после поступления заявки на первую фазу и до момента ее выхода с последней фазы прибор не будет обрабатывать другие заявки. Количество фаз обработки определяется порядком распределения  $r$ .

После прохождения входного фиктивного прибора заявка поступает в буфер системы, и дальнейшее ее поведение зависит от состояния этого самого буфера: если он полон, то заявка получает отказ и теряется, а если в нем есть место, то заявка становится в очередь на первое свободное место, которое определяется законом функционирования очереди. Заметим также, что если буфер полон, то фиктивное приемное устройство не обрабатывает поступающие заявки.

Из буфера заявка поступает на прибор для обслуживания, который состоит из параллельных фаз обслуживания. Заявка может находиться только на одной из этих фаз. Иными словами, обслуживающее устройство с гиперэкспоненциальным потоком обслуживания можно представить как несколько приборов обслуживания, из которых в любой момент времени может работать только один. Каждая фаза характеризуется своей интенсивностью обработки заявок, которая в общем случае отличается от интенсивности обработки на других фазах. Процесс "выбора" заявкой одной из фаз обслуживания носит

случайный характер. Соответственно этому для каждой фазы существует параметр – вероятность попадания заявки именно в эту фазу. В сумме все эти вероятности определяют полную группу событий, т.е. сумма этих вероятностей равна единице.

Определим количество состояний системы. При любом (кроме максимального) количестве заявок состояний будет четыре, что получается путем различных комбинаций фаз поступления и обработки. При пустой системе, в принципе, можно выделять только состояния с разными входными фазами, а дифференциацию по фазам обслуживания не проводить, но на безусловную вероятность состояния с нулем заявок это влияния не окажет. При полной занятости системы можно выделить только состояния с различными фазами на обслуживании, так как фиктивное приемное устройство не принимает заявки. Таким образом, можно вывести формулу для количества состояний

$$K = r \cdot k \cdot (N + 1) + k . \quad (1)$$

В случае системы  $E_2 / H_2 / 1 / 1$  расширенное множество состояний состоит из десяти элементов.

Определим допустимые переходы в такой системе. При поступлении (или смене фазы) заявки переходы осуществляются вначале внутри фиктивного приемного устройства – когда заявка проходит все фазы "обслуживания" при поступлении, – а затем заявка поступает непосредственно в "реальную" СМО. Интенсивность каждого перехода – это интенсивность обработки заявки на одной из последовательных входных фаз, т.е.  $\lambda$ . Переходы являются однозначными, т.е. выполняются в строго определенное состояние.

Сложнее обстоит ситуация с уходом заявки. Предположим, что заявка уходит с первой фазы, интенсивность такого перехода –  $\mu_1$ . Поступающая из буфера заявка может с вероятностью  $b_1$  поступить на первую фазу и с вероятностью  $b_2$  поступить на вторую фазу. Теперь можно представить граф состояний и переходов для данной системы (рис. 1).

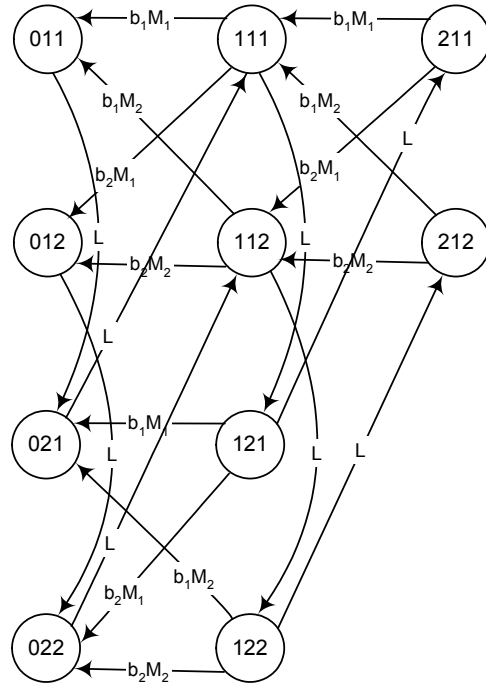


Рис. 1. Граф состояний для СМО  $E_2 / H_2 / 1 / 1$

Следующим шагом анализа модели является составление системы дифференциальных уравнений для описания состояний. Последовательно перебирая состояния и записывая для них уравнения получим искомую систему дифференциальных уравнений.

В нашем случае:

$$\begin{aligned}
 -\lambda p_{011} + b_1 \mu_1 p_{111} + b_1 \mu_2 p_{112} &= p'_{011}; \\
 -\lambda p_{012} + b_2 \mu_1 p_{111} + b_2 \mu_2 p_{112} &= p'_{012}; \\
 -\lambda p_{021} + \lambda p_{011} + b_1 \mu_1 p_{121} + b_1 \mu_2 p_{122} &= p'_{021}; \\
 -\lambda p_{022} + \lambda p_{012} + b_2 \mu_1 p_{121} + b_2 \mu_2 p_{122} &= p'_{022}; \\
 -(\lambda + b_1 \mu_1 + b_2 \mu_1) p_{111} + \lambda p_{021} + b_1 \mu_1 p_{211} + & \\
 + b_1 \mu_2 p_{212} &= p'_{111}; \\
 -(\lambda + b_1 \mu_2 + b_2 \mu_2) p_{112} + \lambda p_{022} + b_2 \mu_1 p_{211} + & \\
 + b_2 \mu_2 p_{212} &= p'_{112}; \\
 -(\lambda + b_1 \mu_1 + b_2 \mu_1) p_{121} + \lambda p_{111} &= p'_{121}; \\
 -(\lambda + b_1 \mu_2 + b_2 \mu_2) p_{122} + \lambda p_{112} &= p'_{122}; \\
 -(b_1 \mu_1 + b_2 \mu_1) p_{211} + \lambda p_{121} &= p'_{211}; \\
 -(b_1 \mu_2 + b_2 \mu_2) p_{212} + \lambda p_{122} &= p'_{212},
 \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p_{kij} = f(t); k, i, j = 0, 1, 2; \frac{dp_{kij}}{dt} = p'_{kij}$ .

К системе (2) необходимо добавить условие нормировки, которое означает сумму вероятностей для полного множества состояний системы, в которых она может находиться:

$$\sum_{k=0}^{N+1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k p_{kij} = 1. \quad (3)$$

Когда система будет решена, необходимо не забыть, что найденные вероятности учитывает разбиение состояний на фазы, а нам необходимы вероятности состояний, учитывающие только число заявок в системе (безусловные вероятности). Для их нахождения достаточно просуммировать решения по различным фазам, но с одинаковым числом заявок

$$p_k = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k p_{kij}. \quad (4)$$

Найденные безусловные вероятности являются важным основным этапом для нахождения остальных характеристик системы путем элементарной подстановки в формулы.

Нами был рассмотрен частный случай систем с эрланговским входным потоком и гиперэкспоненциальным распределением обработки заявок. Гораздо больший интерес представляет собой общий случай для систем такого типа, который мы выведем ниже.

В общем случае система (2) будет содержать количество уравнений, равное количеству состояний, что неудобно для представления систем с высокими порядками распределений. Анализируя примеры различных систем можно обнаружить некоторые закономерности, характерные для всех систем независимо от порядка распределений.

Внимательно изучив граф состояний для системы  $E_3 / H_3 / 1 / 3$ , можно условно разбить состояния на четыре группы по количеству входных и выходных переходов. Первая группа: состояния с нулем заявок; характеризуется отсутствием предшествующих состояний (так как из пустой системы уход заявок физически невозможен). Вторая группа: состояния с количеством заявок от 1 до  $N-1$  (для систем с  $N > 1$ , в случае  $N = 1$  данная группа состояний от-

сутствует); характеризуется наличием полного множества непосредственно предшествующих и последующих состояний. Третья группа: состояния с количеством заявок равным размеру буфера  $N$ ; характеризуется наличием всех непосредственно предшествующих состояний, но неполной группой последующих состояний (что объясняется невозможностью смены входной фазы при полной занятости системы). Четвертая группа: состояния при полной занятости прибора обслуживания и буфера; характеризуются отсутствием последующих состояний. Обобщим в табл. 1 указанную информацию.

Таблица 1

Группы состояний

№ группы	Первый индекс	Второй индекс	Третий индекс
1	0		
2	1 ... $N-1$ , $N > 1$	1 ... $r$	1 ... $k$
3	$N$		
4	$N+1$	1	

Далее запишем общую систему уравнений с учетом данных особенностей. Заметит также, что каждая группа (кроме четвертой) включает два типа уравнений, что объясняется наличием состояний, в которые системы переходит после изменения количества заявок, а есть состояния, в которые система переходит после смены фазы на входе:

$$\begin{aligned} -\lambda p_{0l} + b_l \sum_{m=1}^k \mu_m p_{1lm} &= p'_{0l}; \\ -\lambda p_{0jl} + \lambda p_{0j-1l} + b_l \sum_{m=1}^k \mu_m p_{1jm} &= p'_{0jl}; \\ -(\lambda + \mu_l) p_{nl} + \lambda p_{n-1kl} + b_l \sum_{m=1}^k \mu_m p_{n+1lm} &= p'_{nl}; \\ -(\lambda + \mu_l) p_{njl} + \lambda p_{nj-1l} + b_l \sum_{m=1}^k \mu_m p_{n+1jm} &= p'_{njl}; \\ -(\lambda + \mu_l) p_{Nl} + \lambda p_{N-1kl} + b_l \sum_{m=1}^k \mu_m p_{N+1lm} &= p'_{Nl}; \\ -(\lambda + \mu_l) p_{Njl} + \lambda p_{nj-1l} &= p'_{Njl}; \\ -\mu_l p_{N+1l} + \lambda p_{Nkl} &= p'_{N+1l}; \\ l = \overline{1, k}; \quad j = \overline{2, r}; \quad n = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $p_{kij} = f(t)$ ;  $\frac{dp_{kij}}{dt} = p'_{kij}$ .

Система (5) и условие нормировки (3) являются универсальным средством для изучения систем  $E_r / H_k / 1 / N$ . Ограничения накладываются только возможностями математических программ (например MathCAD 2000 ограничивает количество уравнений до 100).

**2.2. Система  $H_k / E_r / 1 / N$**

Входной поток заявок условно разбивается на  $r$  параллельных фаз, по которым поступают заявки в систему. В общем случае интенсивности на каждой фазе различны, что можно представить как несколько пуассоновских входных потоков. Ограничением является то, что в каждый конкретный момент времени может поступить только одна заявка.

Заявка поступает в буфер системы и дальнейшее ее поведение зависит от его состояния: если он заполнен, то заявка получает отказ и теряется, а если в нем есть свободное место, то заявка становится в очередь на место, которое определяется законом функционирования очереди. В случае с отсутствием мест в системе изменение входной фазы возможно, в отличие от системы с эрланговским входным потоком.

Из буфера заявка поступает на прибор для обслуживания, который состоит из последовательных фаз обслуживания. Заявка последовательно проходит все фазы обслуживания, и пока одна заявка не уйдет с последней фазы следующая не поступит. Иными словами, обслуживающее устройство с гиперэкспоненциальным потоком обслуживания можно представить как несколько приборов обслуживания, расположенных друг за другом.

Перейдем к рассмотрению модели  $E_2 / H_2 / 1 / 1$ . Определим количество состояний системы. При любом количестве заявок состояний будет четыре (кроме состояния с нулем заявок), что получается путем различных комбинаций фаз поступления и обработки. Для пустой системы можно выделять только состояния с разными входными фазами, а

дифференциацию по фазам обслуживания невозможно провести.

Таким образом, формула для расширенного количества состояний имеет вид

$$K = r \cdot k \cdot (N + 1) + k . \tag{6}$$

Определим допустимые переходы в рассматриваемой системе. При поступлении заявки обязательно происходит переход в состояние с большим количеством заявок, возможно также смена фаз поступления заявки, т.е. для данных переходов возможны альтернативные варианты конечных состояний, которые определяются вероятностью нахождения системы именно в этом состоянии. Для процесса обработки возможны только однозначные переходы: при смене фазы обслуживания или уходе заявки из системы. Теперь можно представить граф состояний и переходов для данной системы (рис. 2).

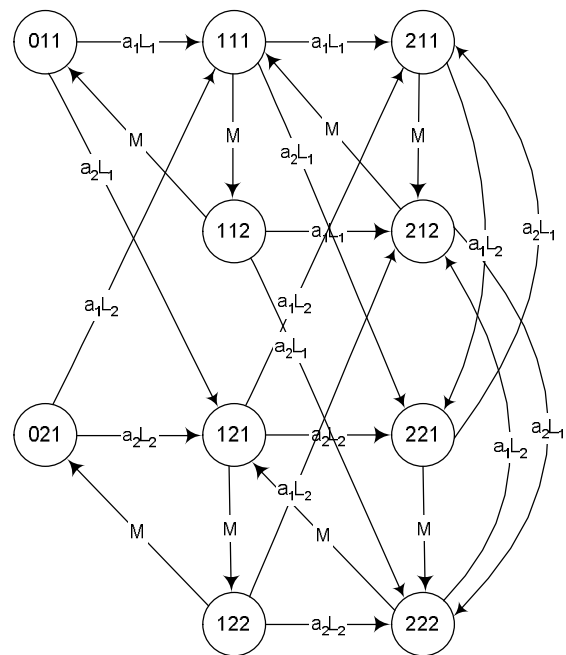


Рис. 2. Граф состояний для СМО  $E_2 / H_2 / 1 / 1$

Следующим шагом анализа модели является составление системы дифференциальных уравнений для описания состояний. Последовательно перебирая состояния и записывая для них уравнения, получим искомую систему.

Для примера  $E_2 / H_2 / 1 / 1$ :

$$\begin{aligned}
-\lambda_1 p_{011} + \mu p_{112} &= p'_{011}; \\
-\lambda_2 p_{021} + \mu p_{122} &= p'_{021}; \\
-(\lambda_1 + \mu) p_{111} + \mu p_{212} + a_1 \lambda_1 p_{011} + a_1 \lambda_2 p_{021} &= p'_{111}; \\
-(\lambda_1 + \mu) p_{112} + \mu p_{111} &= p'_{112}; \\
-(\lambda_2 + \mu) p_{121} + \mu p_{222} + a_2 \lambda_1 p_{011} + a_2 \lambda_2 p_{021} &= p'_{121}; \\
-(\lambda_2 + \mu) p_{122} + \mu p_{121} &= p'_{122}; \\
-(a_2 \lambda_1 + \mu) p_{211} + a_1 \lambda_1 p_{111} + a_1 \lambda_2 p_{121} + & \\
+ a_1 \lambda_2 p_{221} &= p'_{211}; \\
-(a_2 \lambda_1 + \mu) p_{212} + \mu p_{311} + a_1 \lambda_1 p_{112} + a_1 \lambda_2 p_{122} + & \\
+ a_1 \lambda_2 p_{222} &= p'_{212}; \\
-(a_1 \lambda_2 + \mu) p_{221} + a_2 \lambda_1 p_{111} + a_2 \lambda_2 p_{121} + & \\
+ a_2 \lambda_1 p_{221} &= p'_{221}; \\
-(a_1 \lambda_2 + \mu) p_{222} + \mu p_{221} + a_2 \lambda_1 p_{112} + a_2 \lambda_2 p_{122} + & \\
+ a_2 \lambda_2 p_{212} &= p'_{222},
\end{aligned} \tag{7}$$

где  $p_{kij} = f(t)$ ;  $k, i, j = 0, 1, 2$ ;  $\frac{dp_{kij}}{dt} = p'_{kij}$ .

Аналогично предыдущему пункту 3.1 к системе (7) для соблюдения корректности необходимо добавить условие нормировки (3). Для нахождения безусловных вероятностей, учитывающих только количество заявок в системе, необходимо воспользоваться формулой (4).

Перейдем к рассмотрению общего случая моделей вида  $H_k / E_r / 1 / N$ . Для произвольных моделей система (7) будет содержать количество уравнений равное количеству состояний, что неудобно для представления систем с высокими порядками распределений. Анализируя примеры различных систем можно обнаружить некоторые закономерности, характерные для всех систем вида  $H_k / E_r / 1 / N$ .

Внимательно изучив граф состояний для модели  $H_3 / E_3 / 1 / 2$  и ее систему уравнений, можно условно разбить состояния на четыре группы по количеству входных и выходных переходов.

Первая группа: состояния с нулем заявок; характеризуется отсутствием предшествующих состояний (так как из пустой системы уход заявок физически невозможен) и дифференциацией состояний только по фазам входного потока. Вторая группа: состояния с количеством заявок равным 1; характеризуется

наличием неполного множества непосредственно предшествующих и полным множеством последующих состояний. Третья группа: состояния с количеством заявок от 2 до  $N$  (если  $N > 1$ , если  $N = 1$ , то такая группа состояний не определена); характеризуется наличием всех непосредственно предшествующих и последующих состояний. Четвертая группа: состояния при полной занятости прибора обслуживания и буфера; характеризуются отсутствием последующих состояний.

Представим общую систему уравнений с учетом данных особенностей, где каждая группа (кроме первой) включает два типа уравнений:

$$\begin{aligned}
-\lambda_i p_{0j1} + \mu p_{1jr} &= p'_{0j1}; \\
-(\lambda_j + \mu) p_{1j1} + \mu p_{2jr} + a_j \sum_{m=1}^k \lambda_m p_{0m1} &= p'_{1j1}; \\
-(\lambda_j + \mu) p_{1jl} + \mu p_{1j,l-1} &= p'_{1jl}; \\
-(\lambda_j + \mu) p_{nj1} + \mu p_{n+1jr} + & \\
+ a_j \sum_{m=1}^k \lambda_m p_{n-1m1} &= p'_{nj1}; \\
-(\lambda_j + \mu) p_{njl} + \mu p_{nj,l-1} + & \\
+ a_j \sum_{m=1}^k \lambda_m p_{n-1ml} &= p'_{njl}; \\
-\left( \lambda_j \sum_{i=1}^k a_i + \mu \right) p_{N+1j1} + a_j \sum_{m=1}^k \lambda_m p_{Nm1} & \\
+ a_j \sum_{i=1}^k \lambda_i p_{N+1i1} &= p'_{N+1j1}, (i \neq j); \\
-\left( \lambda_j \sum_{i=1}^k a_i + \mu \right) p_{N+1jl} + \mu p_{N+1j,l-1} + & \\
+ a_j \sum_{m=1}^k \lambda_m p_{Nm1} + a_j \sum_{i=1}^k \lambda_i p_{N+1il} &= \\
= p'_{N+1jl}, (i \neq j); & \\
j = \overline{1, k}; \quad l = \overline{2, r}; \quad n = \overline{2, N}, &
\end{aligned} \tag{8}$$

где  $p_{kij} = f(t)$ ;  $\frac{dp_{kij}}{dt} = p'_{kij}$ .

Система (8) и условие нормировки (3) являются обобщением систем уравнений, описывающие частные случаи моделей систем вида  $H_k / E_r / 1 / N$ . После ее решения, как уже было указано выше, необходимо воспользоваться формулой (4).

2.3. Система  $H_{r_1} / H_{r_2} / 1 / N$

Данная модель является обобщением моделей с гиперэкспоненциальными законами распределения времен поступления и ожидания заявок и конечным буфером.

Входной поток заявок условно разбивается на  $r_1$  параллельных фаз, по которым поступают заявки в систему с различной интенсивностью на каждой фазе. Как уже было отмечено выше в каждый конкретный момент времени поступает только одна заявка, которая направляется в накопитель системы, если в нем есть свободное место, или получает отказ и теряется, если буфер заполнен.

Из накопителя заявка поступает на прибор для обслуживания, который состоит из  $r_2$  параллельных фаз обслуживания. Обслуживаемая заявка находится только на одной из этих фаз. Каждая фаза обслуживания характеризуется своей интенсивностью обслуживания заявок.

Количество состояний определяется нижеследующей формулой:

$$K = r_1 \cdot r_2 \cdot (N + 2). \tag{9}$$

Наиболее простой моделью данного класса является  $H_2 / H_2 / 1 / 1$ , для которой составим граф состояний (рис. 3).

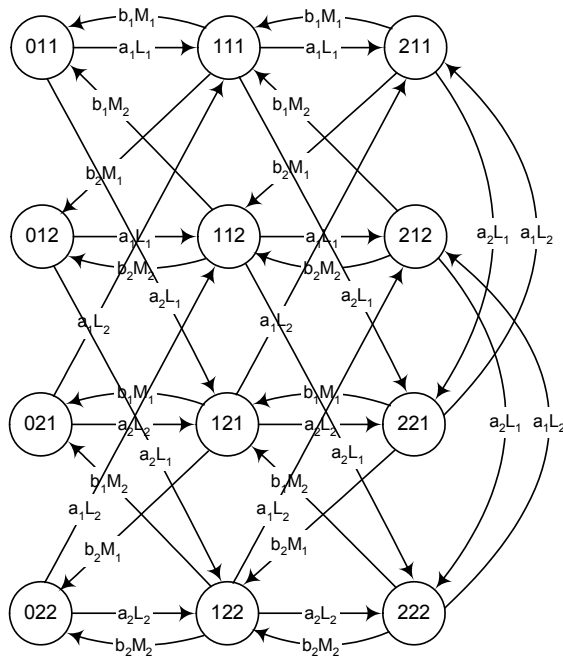


Рис. 3. Граф состояний и переходов для модели  $H_2 / H_2 / 1 / 1$

Проанализировав рис. 3 и другие примеры для моделей СМО такого типа, можно по индукции получить систему уравнений для СМО вида  $H_{r_1} / H_{r_2} / 1 / N$ :

$$\begin{aligned} & -\lambda_k \cdot p_{0kl} + b_l \cdot \sum_{i=1}^{r_2} \mu_i \cdot p_{1ki} = p'_{0kl}; \\ & -(\lambda_k + \mu_l) \cdot p_{m,k,l} + a_k \cdot \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i \cdot p_{m-1,i,l} + \\ & \quad + b_l \cdot \sum_{i=1}^{r_2} \mu_i \cdot p_{m+1,k,i} = p'_{m,k,l}; \\ & -\left( \lambda_k \cdot \sum_{i=1}^{r_1} a_i - \lambda_k \cdot a_k + \mu_l \right) \cdot p_{N+1,k,l} + \\ & \quad + a_k \cdot \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i \cdot p_{N,i,l} + a_k \cdot \sum_{i=1}^{r_1} \lambda_i \cdot p_{N+1,i,l} - \\ & \quad - a_k \cdot \lambda_k \cdot p_{N+1,k,l} = p'_{N+1,k,l}; \\ & i = \overline{1, N}; \quad m = \overline{1, N}, \end{aligned} \tag{10}$$

где  $p_{kij} = f(t)$ ;  $\frac{dp_{kij}}{dt} = p'_{kij}$ .

Система (10) и условие (3) позволяют получить вероятности состояния с учетом разбиения на фазы. Для преобразования решений в безусловные вероятности нужно воспользоваться формулой (4).

2.4. Система  $E_{r_1} / E_{r_2} / 1 / N$

Входной поток заявок, который поступает в систему, последовательно проходит "обработку" в фиктивном приемном устройстве, которое добавляется к модели СМО и состоит из  $r_1$  последовательных фаз обслуживания. После этого заявка поступает в буфер системы (при наличии свободного места в нем, при отсутствии свободного места заявка теряется).

Из буфера заявка поступает на обслуживающий прибор, который содержит  $r_2$  последовательных фаз, проходит все фазы обслуживания с одинаковой интенсивностью. Количество состояний определяется формулой

$$K = r_1 \cdot r_2 \cdot N + r_1 + r_2. \tag{11}$$

Примером данного класса является модель  $E_2 / E_2 / 1 / 1$ , для которой составим граф состояний (рис. 4).



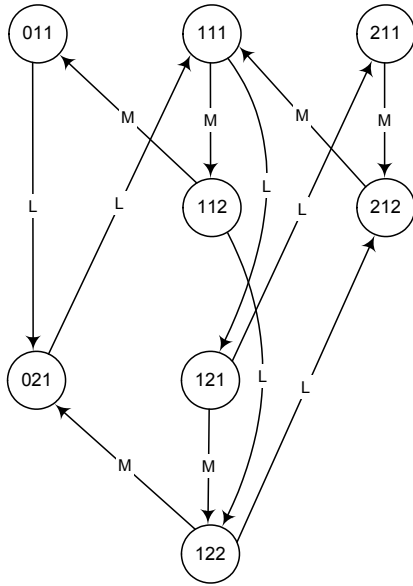


Рис. 4. Граф состояний и переходов для модели  $E_2 / E_2 / 1 / 1$

Проанализировав рис. 4 и другие примеры систем данного вида, получим систему уравнений для СМО вида  $E_{r1} / E_{r2} / 1 / N$ :

$$\begin{aligned}
 -\lambda \cdot p_{011} + \mu \cdot p_{11r_2} &= p'_{011}; \\
 -\lambda \cdot p_{0j1} + \lambda \cdot p_{0j-11} + \mu \cdot p_{1jr_2} &= p'_{0j1}; \\
 -(\lambda + \mu) \cdot p_{m11} + \lambda \cdot p_{m-1r_1} + \mu \cdot p_{m+11r_2} &= p'_{m11}; \\
 -(\lambda + \mu) \cdot p_{mj1} + \lambda \cdot p_{mj-11} + \mu \cdot p_{m+1jr_2} &= p'_{mj1}; \\
 -(\lambda + \mu) \cdot p_{mli} + \lambda \cdot p_{m-lr_i} + \mu \cdot p_{mli-1} &= p'_{mli}; \quad (12) \\
 -(\lambda + \mu) \cdot p_{mji} + \lambda \cdot p_{mj-i} + \mu \cdot p_{m+1ji-1} &= p'_{mji}; \\
 -\mu \cdot p_{N+111} + \lambda \cdot p_{Nr_1} &= p'_{N+111}; \\
 -\mu \cdot p_{N+1li} + \lambda \cdot p_{Nr_i} + \mu \cdot p_{N+1li-1} &= p'_{N+1li}; \\
 j = \overline{2, r}; \quad i = \overline{2, r_2}; \quad m = \overline{1, N}
 \end{aligned}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned}
 p_{N+1ji} &= 0, \quad j > 1; \\
 p_{0ji} &= 0, \quad i > 1,
 \end{aligned} \quad (13)$$

где  $p_{kij} = f(t)$ ;  $\frac{dp_{kij}}{dt} = p'_{kij}$ .

Системы (12), (13) и условие (3) позволяют получить вероятности состояния для моделей  $E_{r1} / E_{r2} / 1 / N$  с учетом разбиения на фазы. Для преобразования решений с учетом фаз в вероятности состояния с учетом лишь числа заявок нужно воспользоваться формулой (4).

### Заключение

В результате выполненной работы получены графы состояний и системы дифференциальных уравнений, описывающие СМО вида  $G / G / 1 / N / \infty / \text{Fifo}$ , где  $G = M, E_r, H_k$  и  $N = 0, 1, 2, \dots$ , что позволяет находить вектор вероятности состояния для нестационарного случая ( $p_n(t)$ ) и стационарного случая ( $p_n = f(t)$ ).

На основе этого можно определить основные характеристики системы в указанных режимах работы, в частности, задержки при передаче информации, загрузку трактов передачи данных.

Выполненные тестовые примеры с применением программного пакета MathCAD 2000 для численного решения системы дифференциальных или алгебраических уравнений показали достоверность полученных графов состояний и систем уравнений.

Результаты, полученные в данной работе, могут быть использованы при анализе и проектировании радиоэлектронных комплексов, систем связи и передачи данных.

### Литература

1. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова // Математика. – 1956. – № 6. – С. 97 – 111.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания – М.: Машиностроение, 1979 – 432 с.
3. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. – М.: Мир, 1965 – 446 с.
4. Основы моделирования сложных систем / Под общ. ред. И. В. Кузьмина. – К.: Высш. шк., 1981. – 360 с.

Поступила в редакцию 16.06.2004

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.Ю. Соколов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "ХАИ", Харьков.