

УДК 621.317.76.089.68:621.373.82

В.Н. ЧИНКОВ<sup>1</sup>, А.П. НАРЕЖНИЙ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Харьковский университет Воздушных Сил, Украина

<sup>2</sup>Войсковая часть А0785, Украина

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ГРУППОВОЙ ШКАЛЫ ВРЕМЕНИ ПРИ УСЛОВИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМНЫХ ЧАСОВ КАК СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Предложена математическая модель шкалы времени, формируемой группой атомных часов, используемых как единое целое, при условии их взаимодействия как системы связанных осцилляторов. Произведена оценка дисперсии погрешности хранения шкалы времени с учетом погрешности взаимодействия.

**шкала времени, формирование групповой шкалы времени, атомные часы, погрешность взаимодействия, погрешность хранения шкалы времени**

### Введение

В современных радиотехнических системах в качестве задающих и синхронизирующих устройств используются атомные часы (АЧ), которые являются высокостабильным источником колебаний в радиотехническом диапазоне [1]. В большинстве радиотехнических систем точность и надежность формирования высокостабильных колебаний обеспечивается методами аналитического (на основе вычислений) и аппаратурного (на основе соответствующего преобразования сигналов) объединения АЧ в групповой эталон [2]. При этом точность и стабильность в групповом эталоне достигается на базе усреднения характеристик нескольких часов, а надежность – на основе их резервирования.

**Формулирование проблемы.** Известно [1, 2], что погрешность хранения (формирования) шкалы времени (ШВ) групповым эталоном времени и частоты (ГЭВЧ) на основе АЧ обусловлена следующими основными причинами: нестабильностью частоты опорных сигналов квантовых стандартов частоты (мер частоты), из которых формируются физические шкалы, и погрешностью аппаратуры сравнения шкал и опорных частот. Влияние этих причин на погрешность хранения ШВ существенно зависит от применяемых методов обработки результатов срав-

нения и коррекции шкал АЧ, построенных на известных математических моделях физических факторов, которые описывают поведение систематических и случайных изменений частоты их опорных сигналов [2 – 6]. В работе [7] показано, что значительное влияние на погрешность формирования ШВ кроме известных физических факторов оказывает не учитываемая ранее погрешность взаимодействия АЧ через измерительные каналы.

**Анализ исследований и публикаций.** В настоящее время методы формирования местных шкал ГЭВЧ базируются на следующих двух предположениях [2 – 6]. Во-первых, систематические изменения опорных частот АЧ описываются параметрическими моделями поведения частоты системы несвязанных осцилляторов (мер частоты). Во-вторых, случайные изменения частоты (шумы) в группе предполагаются некоррелированными. Поэтому погрешность взаимодействия мер частоты в ГЭВЧ не учитывается. Однако, предположение о некоррелированности флуктуации частоты мер из состава ГЭВЧ во многих практических случаях не выполняется [4, 8, 9]. Наличие взаимных корреляционных связей собственных частотных (фазовых) шумов мер обусловлено погрешностью взаимодействия АЧ из состава группового эталона времени и частоты [7].

**Цель статьи.** Разработать математическую модель формирования ШВ ГЭВЧ как системы связанных осцилляторов, которая позволит учесть погрешность взаимодействия мер через измерительные каналы.

### Результаты исследований

Известна связь между поведением фазы (частоты) опорного сигнала АЧ и формируемой ШВ [1]. Измерение текущего значения полных фаз (частот) мер в ГЭВЧ осуществляется их сличением друг с другом при помощи фазовых (частотных) компараторов. Поскольку практически невозможно обеспечить полную электрическую развязку входных сигналов, можно утверждать о наличии взаимосвязи между задействованными в процессе измерения мерами, т.е. об образовании системы связанных осцилляторов с близкими частотами. Вектор поведения полных фаз выходных сигналов ГЭВЧ, состоящего из  $n$  мер, при наличии электрических связей через фазовые (частотные) компараторы можно представить следующей системой стохастических дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{u}_i - \delta F_i(u_i) \dot{u}_i + \omega_i^2 u_i = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n \alpha_{ip} \ddot{u}_p + \Lambda_i(u_i, \alpha_{ip}, \Delta\omega_{ip}) + \Xi_i, \quad (1)$$

где  $u_i$  – амплитуда колебаний выходного сигнала  $i$ -й меры частоты в группе ( $i = 1, \dots, n$ );  $\delta F_i(u_i)$  – диссипационные функции, учитывающие потери, влияние нелинейностей и специфику  $i$ -й меры;  $\omega_i$  – парциальная частота  $i$ -й меры;  $\alpha_{ip}$  – коэффициенты связи между  $i$ -й и  $p$ -й мерами в группе ( $i \neq p$ );  $\Lambda_i(u_i, \alpha_{ip}, \Delta\omega_{ip})$  – случайная функция, учитывающая влияние флуктуации параметров  $i$ -й меры во времени, а  $\Delta\omega_{ip} = \omega_i - \omega_p$ ;  $\Xi_i$  – весьма малая случайная функция, включающая в себя, в общем случае, все аддитивные составляющие шума  $i$ -й меры.

Система дифференциальных уравнений (1) мо-

жет быть сведена с помощью метода медленно меняющихся амплитуд к системе укороченных дифференциальных уравнений первого порядка [10]. Таким образом, относительно периода колебаний медленное изменение фазы  $i$ -й меры с учетом малых аддитивных фазовых шумов, входящих в систему  $n$  связанных мер, будет иметь вид

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \Delta\omega_{i0} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n A_{ip}(t) \cos[\Delta\varphi_{ip}(t)] + \xi_i(t), \quad (2)$$

где  $\varphi_i(t)$  – поведение полной фазы  $i$ -й меры;  $\Delta\omega_{i0} = \omega_i - \omega_0$  – отклонение частоты  $i$ -й меры относительно  $\omega_0$  номинального значения;  $\Delta\varphi_{ip}(t) = \varphi_i(t) - \varphi_p(t)$  – разность фаз колебаний между  $i$ -й и  $p$ -й мерами;  $\xi_i(t)$  – аддитивный случайный процесс (шум)  $i$ -й меры;  $A_{ip}(t) = \frac{\alpha_{ip}(t) u_p(t)}{2 u_i(t)}$  – относительная амплитуда.

Для поиска аналитического решения стохастического дифференциального уравнения (2) воспользуемся методом итераций [11]. В данном случае процесс итерации опишем уравнением

$$\varphi_i^{j+1}(t) = \varphi_i(0) + \Delta\omega_{i0}t + \int_0^t \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n A_{ip}(t') \cos[\Delta\varphi_{ip}^j(t')] dt' + \int_0^t \xi_i(t') dt', \quad (3)$$

где  $\varphi_i(0)$  – заданное начальное значение;  $\Delta\varphi_{ip}^j(t) = \varphi_i^j(t) - \varphi_p^j(t)$  при  $j = 0, 1, 2, \dots, N$  ( $N$  – общее количество итераций);  $\int_0^t \xi_i(t') dt'$  – интеграл от случайного процесса  $\xi_i(t)$  (понимается в смысле Ито [11]). Процесс итерации сходится, если последовательные приближения стремятся с увеличением  $j$  к некоторой предельной функции, удовлетворяющей следующему интегральному уравнению [11]:

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \int_0^t F(t', \Delta\varphi_{ip}(t')) dt'.$$

Поиск наилучшего приближения проведем мето-

дом итераций уравнения (2) с использованием разностной схемы

$$\varphi_i(k+1) = \varphi_i(k) + \tau \Delta\omega_{i0} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n \tau A_{ip}(k) \cos[\Delta\varphi_{ip}(k)] + \bar{\xi}_i(k), \quad (4)$$

где  $\Delta\varphi_{ip}(k) = \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \Delta\varphi_{ip}(t) dt$  – среднее значение разности фаз  $\Delta\varphi_{ip}(t)$  на  $k$ -м интервале измерения разностей фаз  $\tau$  выходных сигналов мер частоты фазовыми компараторами;  $\bar{\xi}_i(k) = \frac{1}{\tau} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \xi_i(t) dt$  – среднее значение случайного процесса  $\xi_i(t)$  на  $k$ -м интервале измерения  $\tau$ .

Анализ численных решений, полученных разностной схемой (4), показал, что наибольшая скорость сходимости в методе итерации наблюдается при выполнении условия для системы уравнений (1), когда все меры в группе находятся в режиме биений несинхронных мер [8]:

$$\Delta\omega_{ip}(t) \gg \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq i}}^n |\alpha_{iv}(t)| + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^n |\alpha_{ps}(t)|, \quad (5)$$

где  $\Delta\omega_{ip}(t) = \Delta\omega_{i0}(t) - \Delta\omega_{p0}(t)$ .

Результаты численного моделирования двух связанных осцилляторов в режиме биений при выполнении условия (5) приведены на рис. 1, где изображены графики:  $\tilde{S}_{\dot{\varphi}_{12}}(F)$  – спектральной плотности мощности частотных флуктуаций без учета аддитивных шумов и  $S_{\dot{\varphi}_{12}}(F)$  – спектральной плотности мощности частотных флуктуаций с учетом аддитивных шумов. Из анализа графика  $\tilde{S}_{\dot{\varphi}_{12}}(F)$  следует, что в режиме биений при отсутствии аддитивных шумов на частотах, кратных  $\Delta\omega_{12}$ , наблюдается появление комбинационных составляющих, которые затухают быстрее чем  $1/F^2$ , что позволяет остановиться на первой итерации ( $j = 0$ ). Таким образом, в качестве первого приближения для уравнения (2) при отсутствии аддитивных шумов необходимо брать соотношение  $\Delta\varphi_{ip}^{j=0}(t) = \Delta\omega_{ip}t$ . Спектральная плотность мощности частотных флуктуации  $S_{\dot{\varphi}_{12}}(F)$  с учетом аддитивных шумов представляет собой смесь узкополосного случайного процесса с центральной частотой, равной разности парциальных частот  $\Delta\omega_{12}$ , и случайного процесса типа белого шума.

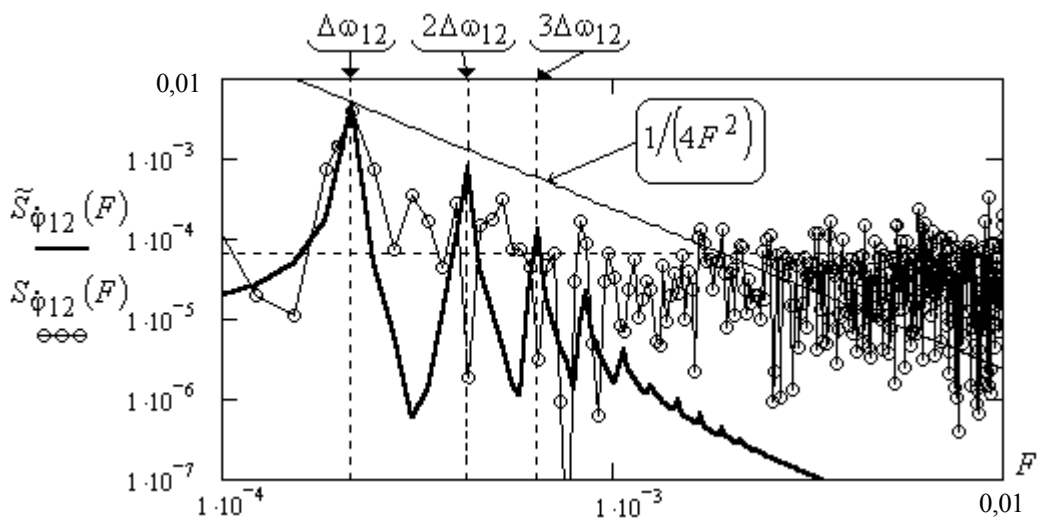


Рис. 1. Спектральная плотность мощности поведения частоты  $\frac{d\Delta\varphi_{12}(t)}{dt}$  двух связанных осцилляторов, находящихся в режиме биений

Найденное с помощью соотношения (3) аналитическое решение уравнения (2) в режиме биений при выполнении условия (5) для  $i$ -й меры можно представить в виде

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \Delta\omega_{i0}t + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n U_{ip} \sin[\Delta\omega_{ip}t + \lambda_{ip}(t)] + \tilde{\xi}_i(t), \quad (6)$$

где  $\lambda_{ip}(t)$  – случайные процессы, образуемые из случайных процессов  $\Delta\xi_{ip}(t) = \xi_i(t) - \xi_p(t)$  и  $\alpha_{ip}(t)$ ;  $U_{ip} = M\{\alpha_{ip}(t)\} / 2\Delta\omega_{ip}$  – некоторая обобщенная амплитуда;  $M\{*\}$  – операция математического ожидания;  $\tilde{\xi}_i(t)$  – случайный процесс  $\xi_i(t)$  с учетом погрешности, вносимой пренебрежением членами второго и более порядков малости в уравнении (3) при  $j \rightarrow N$  и воспринимаемых как коррелированный шум.

В общем случае процесс поведения полной фазы  $\varphi_i(t)$   $i$ -й меры является ненаблюдаемым, так как известные методы сличения фаз (частот) позволяют получать только оценку разности фаз колебаний  $\Delta\hat{\varphi}_{ip}(t)$ . Однако, при реализации графа сличений со всеми возможными комбинациями индексов  $i$  и  $p$  можно получить полный набор параметров идентификационной модели поведения текущего состояния фазы каждой меры частоты из состава группы в виде уравнения (6). Идентификация детерминированной составляющей отклонения частоты  $i$ -й меры относительно номинального значения  $\Delta\omega_{i0}$  и начального значения фазы  $\varphi_i(0)$  выходного сигнала осуществляется при помощи внешней ШВ, передаваемой по различным радиоканалам. Методика определения количественных значений обобщенных амплитуд  $U_{ip}$ , разностей парциальных частот  $i$ -й и  $p$ -й мер  $\Delta\omega_{ip}$  и параметров случайного процесса  $\lambda_{ip}(t)$  приведена в работе [8]. Процедура идентификации параметров случайного процесса  $\tilde{\xi}_i(t)$  при

использовании результатов сличений с внешней ШВ, передаваемой спутниковой радионавигационной системой GPS, приведена в работе [9].

Априорную оценку дисперсии погрешности хранения времени за счет случайных изменений фазы выходного сигнала  $i$ -й меры с учетом погрешности взаимодействия найдем через оценку спектральной плотности мощности централизованного случайного процесса  $\varphi_i(t)$ . Для этого, используя метод гауссовской интегральной аппроксимации, случайные процессы  $\lambda_{ip}(t)$  представим в виде решения следующих стохастических дифференциальных уравнений [11]:

$$\frac{d\lambda_{ip}(t)}{dt} + \chi_{ip}\lambda_{ip}(t) = \eta_{\lambda,ip}(t), \quad (7)$$

где  $\chi_{ip}$  – постоянные коэффициенты;  $\eta_{\lambda,ip}(t)$  – белые гауссовские шумы с нулевыми средними значениями и дисперсиями  $\sigma_{\lambda,ip}^2$ .

Тогда для оценки односторонней спектральной плотности мощности централизованного процесса  $\varphi_i(t)$  из равенства (6) с учетом  $\lambda_{ip}(t)$  решения уравнения (7) получим

$$\hat{S}_{\varphi_i}(F) = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^n \frac{U_{ip}^2}{\chi_{ip}} \exp(-\sigma_{\lambda,ip}^2) \left\{ \pi \delta\left(\frac{F - \Delta\omega_{ip}}{\chi_{ip}}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\lambda,ip}^2}{(n-1)!} \left[ l^2 + \left(\frac{F - \Delta\omega_{ip}}{\chi_{ip}}\right)^2 \right] \right\}, \quad (8)$$

где  $\delta(*)$  – дельта-функция [11].

Оценку дисперсии погрешности хранения ШВ  $i$ -х АЧ, обусловленной случайными изменениями фазы опорного сигнала, согласно уравнению (8) определим из выражения

$$\hat{\sigma}_{\xi_i}^2 = \frac{2T^2}{\omega_0^2} \int_0^{\infty} [\hat{S}_{\xi_i}(F) + \hat{S}_{\varphi_i}(F)] \frac{\sin^2(FT/2)}{(T/2)^2} dF,$$

где  $\hat{S}_{\xi_i}(F)$  – оценка односторонней спектральной плотности мощности случайного процесса  $\tilde{\xi}_i(t)$ ;  $T$  – интервал времени хранения ШВ.

## Выводы

Амплитудные колебания, появляющиеся в режиме биений системы связанных осцилляторов с близкими частотами за счет паразитной амплитудно-фазовой конверсии на нелинейных элементах схемы опорных генераторов АЧ из состава группы, преобразуются в квазипериодические колебания частоты выходных сигналов каждой меры. Амплитуды и фазы данных случайных узкополосных процессов зависят от коэффициентов связей  $\alpha_{ip}$  между мерами.

Из проведенного анализа решения уравнения (2) вытекает рекомендация, что при эксплуатации эталона, созданного на основе группы прецизионных мер частоты, целесообразно разводить их частоты на интервал, более чем в  $n$  раз превышающий полосу взаимной синхронизации каждой пары мер до выполнения условия (5). Это, во-первых, предотвращает взаимную синхронизацию мер частоты и, как следствие, отсутствие спонтанных бросков частоты при срывах синхронизации, а, во-вторых, не порождает в спектре выходного сигнала “ярких” линий на комбинационных (по отношению к разности частот) частотах.

*Дальнейшие исследования* будут направлены на разработку способа компенсации погрешности взаимодействия мер из состава ГЭВЧ.

## Литература

1. Рютман Ж. Характеристики нестабильности фазы и частоты сигналов высокостабильных генераторов: Итоги развития за пятнадцать лет // ТИИЭР. – 1978. – Т. 66, № 9. – С. 70 – 101.
2. Кварцевые и квантовые меры частоты / Е.Н. Базаров, Н.А. Демидов, Е.Т. Жуков и др; под ред. Б.И. Макаренко. – МО СССР, 1989. – 536 с.
3. Хрусталев Ю.П. Статическая и динамическая обработка данных, получаемых в процессе ведения эталонов времени и частоты // Измерительная техника. – 2004. – № 6. – С. 20 – 24.

4. Донченко С.И., Крошкин А.Н. Новый подход к формированию групповой частоты и шкалы атомного времени на ансамбле хранителей // Измерительная техника. – 1999. – № 7. – С. 3 – 6.

5. Безуглов Д.А., Поморцев П.М. Максимально правдоподобная оценка единицы физической величины группового рабочего эталона по результатам внутригрупповых сличений // Измерительная техника. – 2001. – № 1. – С. 3 – 5.

6. Ермишин С.М. Теоретические основы создания групповых средств измерений // Измерительная техника. – 2000. – № 2. – С. 11 – 15.

7. Чинков В.Н., Нарежний А.П. Оценка погрешности формирования групповой средневзвешенной шкалы времени при условии взаимодействия атомных часов как системы связанных осцилляторов // Системы обработки інформації. – Х.: ХУПС. – 2005. – Вип. 4 (44). – С. 168 – 173.

8. Нарежний А.П. Выделение скрытых периодичностей в фазовых флуктуациях прецизионных мер частоты // Системы обработки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вип. 1 (7). – С. 29 – 32.

9. Евдокименко Ю.И., Нарежний А.П. Идентификация групповой меры частоты с использованием итерационных методов решения стационарных задач // Радиотехника. – Х.: ХТУРЭ. – 1998. – № 109. – С. 76 – 80.

10. Основы теории колебаний / В.В. Мигулин, В.И. Медведев, Е.Р. Мустель, В.Н. Парыгин; под ред. В.В. Мигулина; 2-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 392 с.

11. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.

*Поступила в редакцию 6.06.2005*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Л.Ф. Купченко, Харьковский университет Воздушных Сил, Харьков.