УДК 519.873

С.М. БАБИЙ, А.Е. ПЕРЕПЕЛИЦЫН, О.М. ТАРАСЮК

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

ОТЫСКАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ АРГУМЕНТОВ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

На нескольких примерах показаны возможности метода статистических испытаний для отыскания законов распределения логических функций от случайных аргументов, представленных в минимальной бесповторной форме.

логическая функция работоспособности, закон распределения вероятностей, критерий близости

Введение

Традиционными являются способы расчета вероятностных характеристик надежности системы по аналогичным характеристикам ее элементов. В качестве характеристик надежности обычно выбирают среднее время T_{cp} безотказной работы или вероятность $P(t)$ безотказной работы за время t [1]. Однако вероятностные характеристики не являются первичными, а есть результат их усреднения. Поэтому вероятностный расчет надежности системы по природе не элементарен и для сложных систем сопряжен с трудностями, вызванными в первую очередь с определением *элемента* системы. Часто вероятностные характеристики *элемента* из-за его сложности не всегда известны с достаточной для практики достоверностью. Поэтому будет целесообразным использование таких методов расчета надежности систем, где оперируют первичными (не выводимыми из других) величинами, относящимися к надежности системы и ее элементов, и устанавливают связь между ними. При таком подходе расчет надежности систем становится элементарным, так как опытное определение первичных характеристик надежности *элементов* проще, чем вероятностных.

В данной статье первичными величинами считаются последовательные моменты t_{x_i} отказов блоков (элементов) и аналогичные моменты t_{y_i} для системы, и задача состоит в определении зависимости $t_y = f_y(t_x)$. Для получения этой зависимости выбран метод статистических испытаний известный как метод Монте-Карло [2].

Последовательность построения и использования ЛФР

Потребность в знании вида и параметров законов распределения логических функций от случайных аргументов диктуется практикой оценки показателей безотказности параллельно-последовательных структур произвольной конфигурации, которыми могут быть представлены технические системы с избыточностью. Для такой структуры произвольной конфигурации, содержащей n функциональных блоков, формируется логическая функция работоспособности $y(t)$ (далее ЛФР), генерирующая множество случайных величин $\{t_i\}$; $i = \overline{1,n}$ потери работоспособности ее функциональных блоков. Логическая функция представлена в минимальной бесповторной форме, использующей только операции конъюнкции и дизъюнкции, которых достаточно для ее численного определения.

Для вычисления значений функции используется два известных правила принятия решения [3]

$$\bigwedge_{i=1}^{n} t_i = \min \qquad \bigvee_{i=1}^{n} t_i = \max$$

где t_i – случайная длительность времени работы до отказа i -го блока системы.

Для построения $y(t)$ анализируется структурная схема системы, имеющая один вход и один выход. Анализ ведется путем использования двух указанных правил: «выбор t_{min}» и «выбор t_{max}». Эти правила применяются к фрагменту схемы последовательно от входа к выходу. Фрагмент может содержать от одного до нескольких блоков, связанных между собой параллельно или последовательно.

В качестве примера на рис.1 приведена структурная схема из 7 блоков Б$_1$÷Б$_7$.

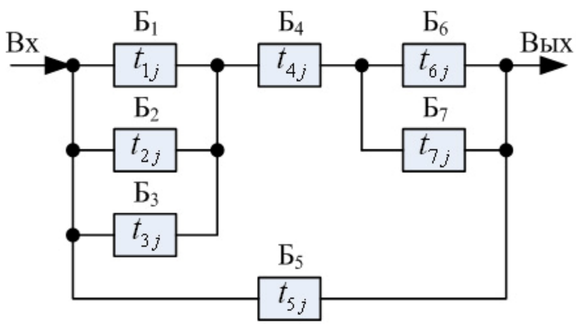

Рис.1. Структурная схема системы.

Внутри каждого блока указана длительность его работы до отказа. Используется два индекса, например в t_{4j} цифра 4 указывает номер блока, а индекс j – номер эксперимента, в котором появляется случайное число t_4. Логическая функция работоспособности для структуры на рис.1 имеет следующий вид:

$$y_j(t) = \left[\left(t_{1j} \vee t_{2j} \vee t_{3j}\right) \wedge t_{4j} \wedge \left(t_{6j} \vee t_{7j}\right)\right] \vee t_{5j}. \qquad (1)$$

Это выражение является исходным для выполнения процесса моделирования работы системы методом Монте-Карло (М-К). Последовательность использования логической функции y_j при моделировании покажем на простом примере.

Методом М-К генерируется 7 случайных чисел (t_{11}÷t_{71}) (по числу блоков системы), каждое из которых подчинено своему закону распределения $f_{t_i}(t)$.

Пусть, для конкретности, эти числа будут следующими:

t_{11}=5; t_{21}=9; t_{31}=7; t_{41}=11; t_{51}=4; t_{61}=10; t_{71}=8.

Подставим эти значения в выражение для y_j и найдем ее значение

$$y_1 = \left[(5 \vee 9 \vee 7) \wedge 11 \wedge (10 \vee 8)\right] \vee 4 = 9.$$

Выполняя аналогичную подстановку N раз, получим массив случайных чисел $\left\{y_j\right\}_N$, каждое из которых моделирует время работы системы t_j до появления j -го отказа.

Цели моделирования

Методом статистических испытаний решаются следующие задачи:

– нахождение экспериментальной плотности распределения случайных значений логической функции $f_Э(y_j)$;

– подбор теоретической кривой $f_T(y_j)$ из условия минимизации суммы квадратов отклонений между ними по K дискретным значениям случайного аргумента y_j;

– исследование влияния параметра α расположения (сдвига), параметра β масштаба, параметра C формы теоретической кривой $f_T(y_j)$ на степень ее близости к экспериментальной кривой $f_Э(y_j)$;

– исследование влияния объема эксперимента N и числа K точек аппроксимации на степень расхождения $\Delta = \left|f_Э(y_j) - f_T(y_j)\right|$.

Исходные данные для моделирования

– известные плотности распределения вероятностей $\left\{f_{t_j}(t)\right\}_n$ времен возникновения отказов t_{ij} каждого из n блоков системы;

– алгоритмы моделирования массивов $\left\{N_i\right\}$, $i=\overline{1,n}$ псевдослучайных чисел t_{ij} с заданными функциями плотности распределения.

Анализ и выбор законов распределения для выполнения моделирования методом М-К

Из выражения (1) можно заключить, что ЛФР в общем виде для произвольной структуры представляет собой смесь n-местных конъюнкций и m-местных дизъюнкций, где n и m – независимые целые случайные числа. Задача отыскания законов распределения n-местных конъюнкций и дизъюнкций независимых случайных аргументов t_i практически решена [3]. Ее решение основано на свойстве интегральной функции распределения (ИФР) и выглядит достаточно просто, поэтому приведем его.

Для n-местной конъюнкции $y=\bigwedge_{i=1}^{n} t_i$, у которой ее аргументы t_i независимые случайные величины с функциями распределения $F_{t_i}(t)=P(t_i<t)$ величина y также случайна с функцией распределения $F_y(t)$. По определению конъюнкции $y=\min_i^n t_i$, поэтому $y\ge t$ только при условии , если: $t_1\ge t$; $t_2\ge t$; … $t_n\ge t$

Отсюда следует $F_y(t)=P(y<t)=1-P(y\ge t)=$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(t_i\ge t)=1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-P(t_i<t)\right]=1-\prod_{i=1}^{n}\left[1-F_{t_i}(t)\right]$$

Для одинаково распределенных аргументов t_i

$$F_y(t)=1-\left[1-F(t)\right]^n;\quad f_y(t)=nf(t)\left[1-F(t)\right]^{n-1}\qquad(2)$$

Аналогичные рассуждения приводятся для дизъюнкции n независимых случайных аргументов t_i. По определению дизъюнкции $y=\max_i^n t_i$. Для этого случая $y<t$ только тогда, когда $t_1<t$; $t_2<t$; … $t_n<t$, отсюда ИФР и плотность вероятности будут равны:

$$F_y(t)=\prod_{i=1}^{n}F_{t_i}(t);\qquad f_y(t)=\sum_{j=1}^{n}f_{t_j}(t)\prod_{i\ne j}F_{t_i}(t)$$

Для одинаково распределенных аргументов t_i:

$$F_y(t)=\left[F(t)\right]^n \text{ и } f_y(t)=nf(t)\left[F(t)\right]^{n-1}\ (3)$$

Используем приведенные выражения (2) и (3) для отыскания закона распределения ЛФР y (1).

Для упрощения анализа считаем, что аргументы функции y распределены по одному и тому же закону распределения. Из анализа выражения (1) видно, что квадратная скобка содержит трехместную конъюнкцию, на первом месте которой расположена трехместная дизъюнкция с законом распределения $F_{y_1}(t)=\left[F_{t_i}(t)\right]^3$ $i=1,2,3$, на втором месте – случайная величина t_4 с законом распределения $F_{y_2}(t)=F_{t_4}(t)$, на третьем месте – двухместная дизъюнкция с законом распределения $F_{y_3}(t)=\left[F_{t_i}(t)\right]^2$.

Найдем закон распределения первого члена двухместной дизъюнкции (выражение в квадратных скобках (1)): $F_{y_4}(t)=1-\prod_{i=1}^{3}\left[1-F_{y_i}(t)\right]$,

где $F_{y_2}(t)=F_{t_4}(t)$.

Раскрывая произведение, получим:

$$F_{y_4}(t)=1-\left\{1-\left[F_{t_i}(t)\right]^3\right\}\cdot\left[1-F_{t_4}(t)\right]\cdot\left\{1-\left[F_{t_i}(t)\right]^2\right\}.$$

Обозначим закон распределения второго члена двухместной дизъюнкции элемента t_{5i} через $F_{y_5}(t)$, тогда окончательно закон распределения случайной величины y имеет вид:

$$F_y(t) = F_{y_4}(t) \cdot F_{y_5}(t) =$$
$$= \left[1 - \left\{1 - \left[F_{t_i}(t)\right]^3\right\} \cdot \left\{1 - \left[F_{t_i}(t)\right]^2\right\} \cdot \left[1 - F_{t_4}(t)\right]\right] F_{y_5}(t) .$$

После преобразований получим окончательно:

$$F_y(t) = \left[F_{t_i}(t)\right]^2 + \left[F_{t_i}(t)\right]^3 + \left[F_{t_i}(t)\right]^7 - \left[F_{t_i}(t)\right]^5 - \left[F_{t_i}(t)\right]^6 . \quad (4)$$

Конкретизируем вид закона распределения, в качестве которого выберем закон Вейбулла:

$$F_y(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C} . \quad (5)$$

После подстановки выражения (5) в (4) получим конкретный вид закона распределения вероятностей для ЛФР примера (1):

$$F_y(t) = \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C}\right]^2 + \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C}\right]^3 + \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C}\right]^7 - \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C}\right]^5 - \left[1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C}\right]^6 . \quad (6)$$

Выполним преобразования над выражением (6) с целью приведения его к виду удобному для вычислений. Для этого каждое слагаемое разложим по формуле бинома Ньютона и упростим выражение. Например:

$$\left(1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C}\right)^3 = 1 - 3e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C} + 3e^{-2\left(\frac{t}{b}\right)^C} - e^{-3\left(\frac{t}{b}\right)^C} .$$

После выполнения операции суммирования получаем окончательный результат

$$F_y(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C} - 6e^{-3\left(\frac{t}{b}\right)^C} + 15e^{-4\left(\frac{t}{b}\right)^C} - 14e^{-5\left(\frac{t}{b}\right)^C} + 6e^{-6\left(\frac{t}{b}\right)^C} - e^{-7\left(\frac{t}{b}\right)^C} . \quad (7)$$

Дифференцируя функцию $F_y(t)$ по времени t получим искомую функцию плотности распределения вероятностей ЛФР.

$$\frac{dF_y(t)}{dt} = f_y(t) = \frac{Ct^{C-1}}{b^C}\left(e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^C} + 18e^{-3\left(\frac{t}{b}\right)^C} - 60e^{-4\left(\frac{t}{b}\right)^C} + 70e^{-5\left(\frac{t}{b}\right)^C} - 36e^{-6\left(\frac{t}{b}\right)^C} + 7e^{-7\left(\frac{t}{b}\right)^C}\right). \quad (8)$$

Выполним аналогичные преобразования для закона Релея:

$$F_y(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

После подстановки выражения (9) в (4) получим:

$$F_y(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} - 6e^{-3\frac{t^2}{2\sigma^2}} + 15e^{-4\frac{t^2}{2\sigma^2}} - 14e^{-5\frac{t^2}{2\sigma^2}} + 6e^{-6\frac{t^2}{2\sigma^2}} - e^{-7\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (10)$$

Дифференцируя функцию $F_y(t)$ по времени t получим искомую функцию плотности распределения вероятностей ЛФР.

$$f_y(t) = \frac{t}{\sigma^2}\left(e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} + 18e^{-3\frac{t^2}{2\sigma^2}} - 60e^{-4\frac{t^2}{2\sigma^2}} + 70e^{-5\frac{t^2}{2\sigma^2}} - 36e^{-6\frac{t^2}{2\sigma^2}} + 7e^{-7\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right) \quad (11)$$

Анализ результатов моделирования

Процесс моделирования системы (рис. 1) методом М-К выполнялся в следующей последовательности:

– для заданных законов распределения функциональных блоков Вейбулла и Релея были выбраны алгоритмы формирования случайных чисел:

$$y_i = b\left(-\log R_i\right)^{\frac{1}{C}} \text{ – для Вейбулла;}$$

$$y_i = \sigma\sqrt{-2\ln(R_i)} \text{ – для Релея.}$$

где R_i – равномерно распределенное случайное число, генерируемое функцией random. $R_i \in (0;1)$; $b = 0,5$ и $\sigma = 1$ – параметр масштаба. C – параметр формы, $0,5 \le C \le 2$.

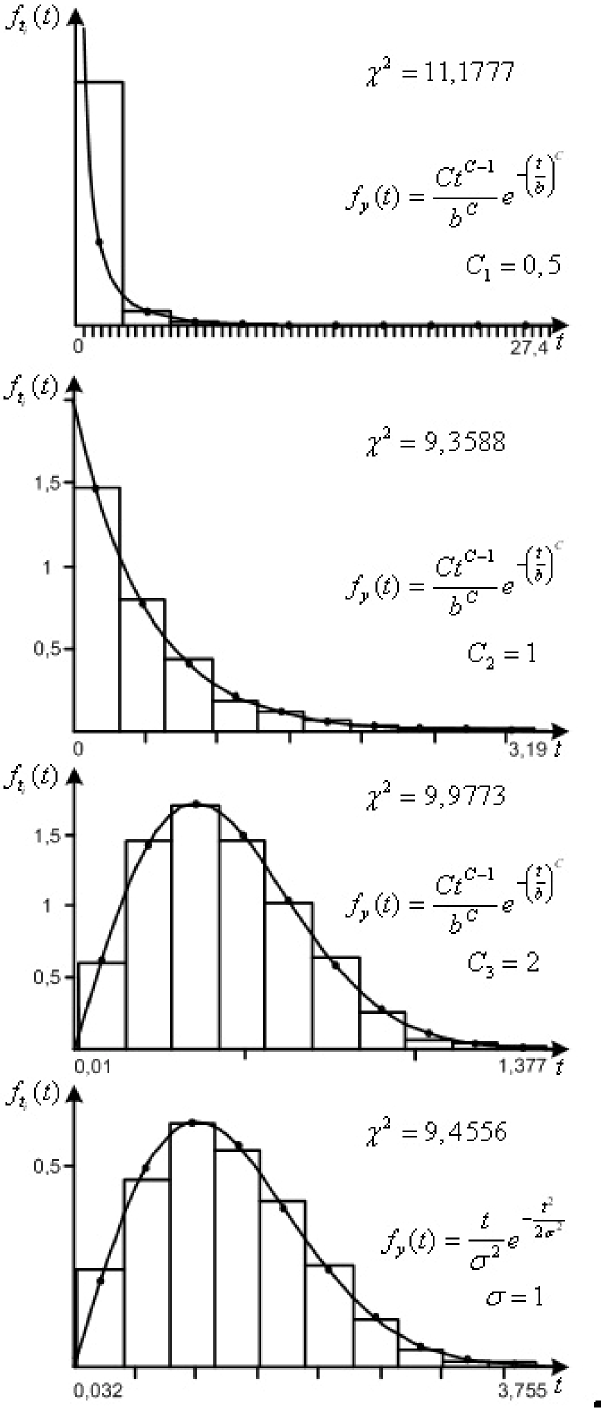

Рис. 2. Результаты моделирования моментов отказа $\{t_{yi}\}$ одного блока системы (законы Вейбулла и Релея)

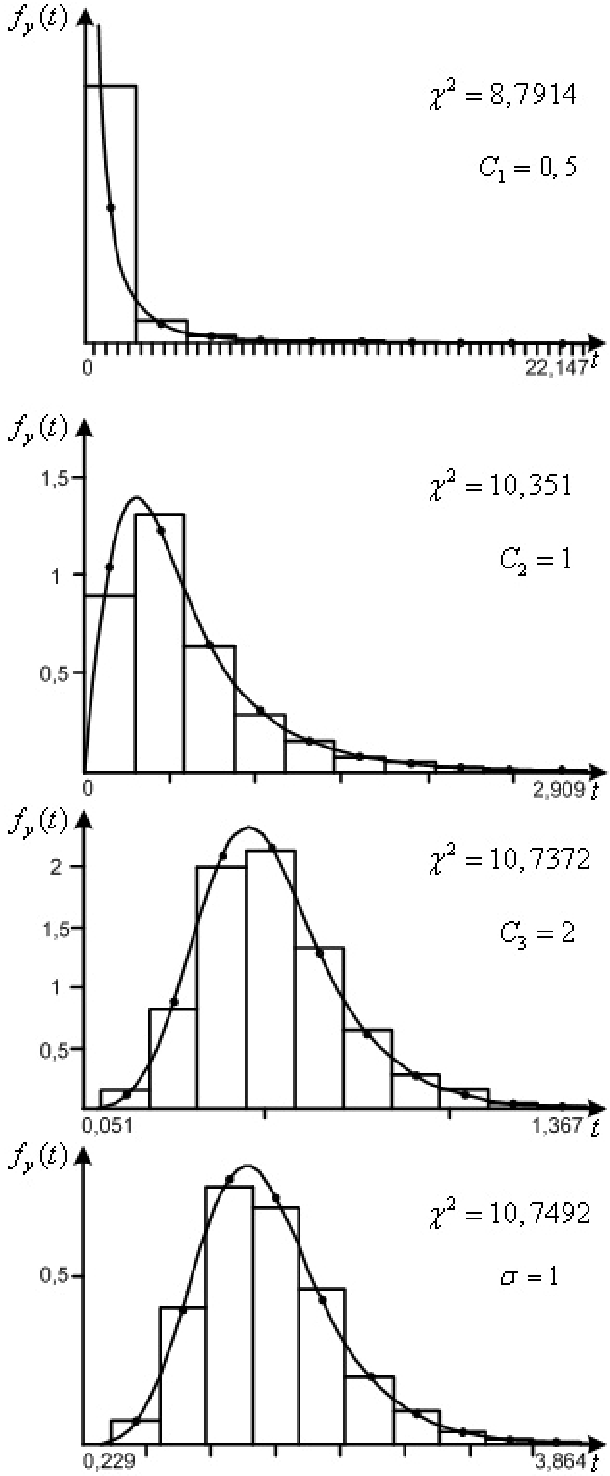

Рис. 3. Результаты моделирования моментов отказа $\{t_{yi}\}$ системы, определяемые законами распределения ЛФР (выражения (8) и (11))

– на объеме эксперимента N =500÷2000, гарантирующем уровень достоверности β=0.9÷0.95 выполнялось моделирование с целью вычисления значений интервалов времени возникновения отказов.

Случай 1.

Создавался массив длительностей времен возникновения отказов функционального блока, результатом обработки которого явилась гистограмма.

На рис.2 приведены четыре гистограммы и сглаживающие их теоретические кривые для значений C_1 =0,5; C_2 =1; C_3 =2 (закон Вейбулла) и σ =1 (закон Релея).

С целью проверки достоверности экспериментального распределения бралась теоретическая кривая для сглаживания эксперимента по K точкам с теми же коэффициентами формы и масштаба. Для оценки истинности закона распределения генерируемых чисел вычислялся критерий согласия Пирсона χ^2.

Случай 2.

Выполнялось моделирование с целью нахождения закона распределения логической функции работоспособности (выражение (1)). Моделирование заключается в формировании 7 различных массивов случайных чисел, каждый из которых подчинен одному и тому же закону распределения (Вейбулла или Релея). Результатами моделирования являются гистограммы и сглаживающие их теоретические кривые, приведенные на рис.3 для случаев C_1 =0,5; C_2 =1; C_3 =2 (закон Вейбулла) и $\sigma = 1$ (закон Релея).

Конкретный вид теоретической кривой получен ранее и представлен выражением (8) и (11).

Инструментальные средства

При моделировании использовалась специально разработанная оконная программа, наглядно демонстрирующая графическое представление результата, позволяющая оперативно варьировать переменными моделирования.

Заключение

Изложена последовательность отыскания закона распределения логической функции работоспособности методом М-К в общем виде. На примерах моделирования аргументов логической функции работоспособности законами Вейбулла и Релея подтверждена достоверность полученных результатов, которая находится в пределах β = 0.9÷0.95, при вариациях объема эксперимента N = 500÷2000.

Литература

1. Харченко В.С., Жихарев В.Я., Илюшко В.М., Краснобаев В.А., Куликов П.М., Лысенко И.В., Нечипорук Н.В., Тимонькин Г.М. Основы надёжности цифровых систем. – Х.: НАУ «ХАИ», 2004. – 573 с.

2. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 311 с.

3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 420 с.

Поступила в редакцию 14.02.2008

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.М. Илюшко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.