

УДК 681.518.54;004.3.001.4

А.С. ЕПИФАНОВ

*Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия***АНАЛИЗ ФАЗОВЫХ КАРТИН ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕКТРА ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ**

Использование геометрических образов законов функционирования автомата позволило представлять фазовые картины едиными математическими структурами – ломаными линиями с числовыми координатами. Такое представление позволяет рассматривать геометрические кривые с автоматной интерпретацией. В статье приводятся результаты исследования законов функционирования автоматов, построенных по классическим геометрическим кривым: спирали Архимеда, лемнискаты Бернулли, спирали Фибоначчи, кривой Гаусса, брахистохроме и т.д. Исследуется зависимость числа состояний у минимального автомата, построенного по кривой от числа входных сигналов автомата. Осуществляется классификация законов функционирования автоматов на основе спектра динамических параметров рекуррентного определения числовых последовательностей.

Ключевые слова: техническое диагностирование, фазовая картина, автомат, геометрический образ законов функционирования, спектр динамических параметров.

1. Геометрические образы законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем

Конечные детерминированные автоматы как математические модели сформировались, начиная с 1943 года (Мак-Каллок и Питтс) для описания связей множеств сигналов и состояний с небольшим числом элементов. Это отразилось в способах задания автоматов, основанных на явном указании функции (таблицы, конечные графы, матрицы, логические уравнения с переменными, заданными на конечных множествах). Функционирование автоматов базируется на рекурсии, которая позволяет представлять только как угодно большой, но начальный, фрагмент процесса функционирования.

В.А. Твердохлебовым в работах [1-2] предложен и разработан новый подход для задания законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем, основанный на числовых структурах. Данный подход позволяет использовать мощные идеализации классической непрерывной математики: бесконечно малой величины, актуальной бесконечности, суммирования бесконечных рядов, предельного перехода и т.п.. Предложенный подход позволяет задавать законы функционирования геометрическими фигурами, которые в свою очередь могут быть заданы аналитически, совместить средства диагностирования различной природы в единую форму – эксперимент с автоматом, использовать классические методы интерполяции и

экстраполяции. Геометрический образ γ_s определяет полностью законы функционирования автомата A_s , то есть, всю фазовую картину связей входных последовательностей с выходными сигналами. Конкретные варианты процессов функционирования, то есть, фазовые траектории, имеют геометрические образы $\gamma_s(p), p \in X^*$, в виде сечений γ_s по отдельным точкам. Геометрические образы $\gamma_s(p)$ могут задаваться числовыми, а не символьными, уравнениями.

Предложенные в работе [2] Твердохлебовым методы синтеза автомата по последовательностям и геометрическим кривым позволяют рассматривать с автоматной интерпретацией геометрические кривые и числовые последовательности, т.е. числовые последовательности и геометрические кривые могут рассматриваться как Совмещение законов функционирования δ' и λ' автомата

$$A' = \left(\left\{ s_p \right\}_{p \in X^*}, X, Y, \delta', \lambda', s_\varepsilon \right)$$

с геометрическими фигурами (кривыми линиями на плоскости) может быть осуществлено на основе:

- выбора точек на геометрической фигуре, выбора направления обхода этих точек и построения множества Y вторых координат для выбранных точек;
- построения последовательности $Y_{i_1}, Y_{i_2}, \dots, Y_{i_1}, \dots$ соответствующей обходу выбранных на геометрической фигуре точек;
- выбора целого положительного числа m ,

множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и начального линейного порядка $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_m$ для определения линейного порядка ω_1 на X^* ;

– построение функций δ и λ с использованием указанных выше правил построения функций по точкам геометрического образа.

2. Спектр динамических параметров рекуррентного определения последовательности

В работе [2] Твердохлебовым В.А. предложен спектр динамических параметров, характеризующих сложность правил порождения последовательности. Спектр $\Omega = \langle \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_4 \rangle$ вводится как многоуровневая структура, в которой на каждом уровне представлены наборы характеристик использованных рекуррентных форм $F_i^m(z_1, z_2, \dots, z_m) = z_{m+1}$, где m – порядок рекуррентной формы, $m=1, 2, \dots$

Каждая рекуррентная форма F_i^m с учетом отношения $\xi \in U^*$ определяется функцией $f_i^m : U^m \rightarrow U$ и применяется для определения одного или нескольких отрезков в зависимости от структуры последовательности ξ .

Полагается, что рекуррентная форма применяется отдельными вариантами вхождения рекуррентной формы в последовательность правил, определяющих рассматриваемую последовательность ξ .

Вариант применения рекуррентной формы F_i^m оканчивается в каждом из следующих случаев: применение F_i^m не соответствует функции f_i^m ; дальнейшее и соответствующее функции f_i^m применение F_i^m связано с (первым) повторным применением рекуррентной формы к уже использованным для определяемого отрезка набору аргументов.

Во втором случае применение F_i^m рассматривается как новый вариант использования F_i^m . Это условие требуется для выхода из циклов в последовательности отдельных правил определения ξ , образующих общее правило. Следовательно, при счете правил, использованных при определении последовательности ξ , пересчитываются варианты вхождения отдельных правил в общее правило.

Исследования свойств спектров, соответствующих последовательностям, имеет общее значение для конструктивных объектов.

Определим понятие спектра. Пусть $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ – конечное множество и ξ последовательность элементов из множества U : $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$.

Определение 1. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^V$ наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность $\bar{\xi}$, будем обозначать $m_0(\bar{\xi})$.

Определение 2. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^V$ и $m \in \mathbb{N}^+$, где $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$, наибольшую длину начального отрезка последовательности $\bar{\xi}$, определяемого рекуррентной формой порядка m , будем обозначать $d^m(\bar{\xi})$.

Определение 3. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^V$ и $m \in \mathbb{N}^+$, где $1 \leq m \leq |\bar{\xi}| - 1$, число смен рекуррентных форм порядка m , требующихся при определении последовательности $\bar{\xi}$, будем обозначать $r^m(\bar{\xi})$.

Определение 4. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^V$ и $m \in \mathbb{N}^+$, где $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$ и j , где $1 \leq j \leq r^m(\bar{\xi})$ длину j -го отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ будем обозначать $d_j^m(\bar{\xi})$.

Используя введенные обозначения определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

$$\Omega_0(\bar{\xi}) = \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle;$$

$$\Omega_1(\bar{\xi}) = \langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \dots, d^\alpha(\bar{\xi}) \rangle;$$

$$\Omega_2(\bar{\xi}) = \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \dots, r^\alpha(\bar{\xi}) \rangle;$$

$$\Omega_3(\bar{\xi}) = \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle,$$

где $\alpha = m_0(\bar{\xi})$ и $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \dots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \rangle$

(n_j – номер последнего отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j).

Четвёртый уровень $\Omega_4(\bar{\xi})$ спектра $\Omega(\bar{\xi})$ добавляет к характеристикам в предшествующих уровнях оценку сложности правил и вариантов использования правил.

Формально $\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$, где Θ – оператор замены в $\Omega_3(\bar{\xi})$ величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

3. Классификация и оценка сложности законов функционирования дискретных систем на основе спектра параметров

Базовой моделью дискретных детерминированных динамических систем являются конечные детерминированные автоматы. Сравнение по сложности таких автоматов может быть сделано на основе сравнения математических структур, представляющих специфику законов функционирования автомата. В качестве таких структур могут быть использованы геометрические образы законов функционирования автоматов.

В данной работе с использованием аппарата геометрических образов автоматов и спектра динамических параметров классификация законов функционирования осуществляется следующим образом:

- из каждой геометрической кривой извлекается числовая последовательность;
- по последовательностям строятся автоматы (при различных значениях мощности входного алфавита автомата);
- автоматы минимизируются по числу состояний;
- построенный класс автоматов разбивается на подклассы эквивалентных по сложности автоматов по числу состояний;
- извлеченные из кривых последовательности, интерпретируемые как последовательности вторых координат точек геометрических образов автоматов классифицируются на основе совпадения числовых значений показателей спектра Ω .

Для анализа из банка 2D,3D-кривых и фракталов, представленного в сети Интернет по адресу [3], извлечено 50 наиболее известных и распространенных геометрических кривых: спираль Фибоначчи, лемниската Бернулли, баллистическая кривая, эвольвента круга, логарифмическая спираль, спираль Архимеда, астроида, спираль Галилео брахистохрона, кардиоида, кривая преследования, циссоида, кривая Гаусса, корноида и др.

Исследование банка кривых проводилось в предположении, что для представления специфических свойств кривых достаточно использования 30 точек (соответственно извлеченные последовательности состоят из 30 элементов).

Характеристика разбиений P_0, P_1, P_2, P_3 множества из 50 анализируемых последовательностей длины 30, полученная в результате построения спектров и разбиений по показателям спектров, представлены в таблице 1.

На рис. 1 изображены кривые, эквивалентные на нулевом уровне Ω_0 спектра Ω . В данном классе эквивалентности находится спираль Фибоначчи

(см.рис. 1.(1)), а также кривые, информация о которых представлена в таблице 2. На рис. 1(2) изображена кривая, информация о которой представлена в ячейке 2 табл. 2, на рис. 1(3) – в ячейке 5 табл. 2.

Минимальный порядок рекуррентной формы, необходимый для определения последовательности, сопоставляемой кривой, в данном классе эквивалентности равен 3.

Таблица 1.

Информация о разбиениях множества последовательностей, сопоставленных геометрическим кривым на классы эквивалентности по спектру Ω .

Характеристика	P_0	P_1	P_2	P_3
Число подклассов в разбиении	9	44	46	47
Максимальная мощность подкласса	18	3	3	3
Минимальная мощность подкласса	1	1	1	1

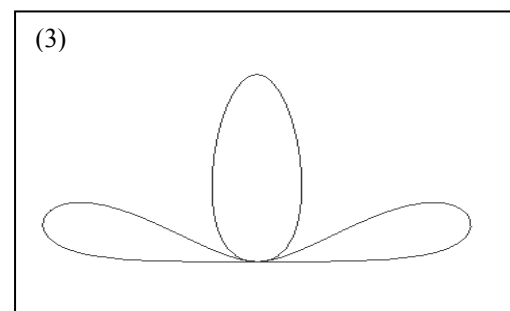
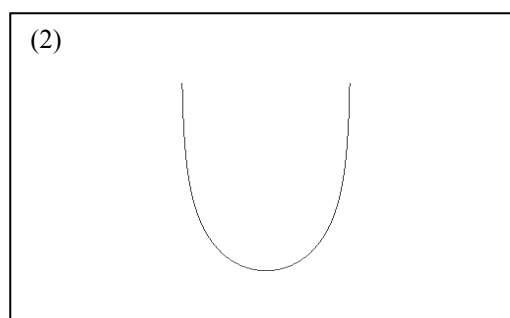
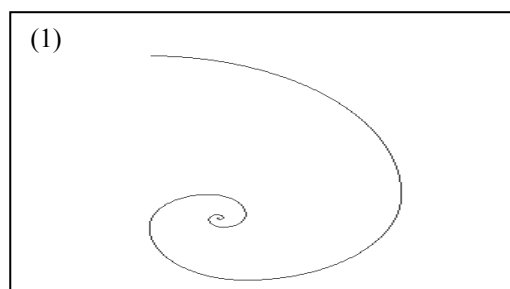


Рис. 1. Геометрические кривые, эквивалентные по показателям нулевого уровня Ω_0 спектра Ω .

Проведенное исследование свойств законов функционирования дискретных динамических систем, представленных в форме геометрических кривых, включило: построение по каждой кривой 3 автоматов (при $|X|=2,5,10$), минимизацию построенных автоматов по числу состояний, разбиение класса из 150 автоматов на подклассы по числу состояний в минимальном автомате.

Существенным является способ доопределения функции переходов δ автомата. Исследованы циклическое доопределение, доопределение в начальное состояние, генерация состояния псевдослучайным образом (из множества возможных состояний).

В случае, когда $\frac{k}{|X|} \neq \left\lceil \frac{k}{|X|} \right\rceil$, где $|X|$ - мощность

входного алфавита автомата, а k - число точек на кривой (по которой строятся законы функционирования автомата), доопределение требуется и для функции выходов λ . Построенные по спирали Фибоначчи 3 автомата (также как и по любой из анализируемых геометрических кривых) имеют соответственно 15, 6 и 3 состояния. Проведенное выделение классов эквивалентных состояний показало, что у всех 150 автоматов, построенных по 50 геометрическим кривым количество классов эквивалентности совпадает с числом состояний автомата, т.е. автоматы уже являются минимальными по числу состояний. Данное свойство присутствует у всех 150 автоматов, построенных при всех использованных способах доопределения функции переходов автомата: при циклическом доопределении функции переходов, при доопределении в начальное состояние, при доопределении с использованием генератора случайных чисел (состояние выбирается случайным образом из множества возможных состояний).

Краткие выводы

В работе построены и проанализированы классы дискретных детерминированных автоматов, определенные на основе математических свойств геометрических образов, задающих законы функционирования автоматов. Используемый геометрический подход позволяет исследовать свойства законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем на основе анализа свойств геометрических кривых.

Изложенные в статье результаты показывают возможность практического использования аппарата геометрических образов для задания и исследования свойств законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем. Определе-

ны эквивалентные по сложности геометрические кривые, т.е. эквивалентные по сложности законы функционирования автоматов.

Таблица 2

Геометрические кривые, эквивалентные спирали Фибоначчи на нулевом уровне Ω_0 спектра Ω

№	Название кривой в банке EFMR	Аналитическое задание кривой (извлеченное из EFMR)
1	BIFOLIUM	$(x^2 + y^2)^2 = (ax + by)x^2$
2	CHAÎNETTE D'ÉGALE RÉSISTANCE	$\begin{cases} y = -a \ln \cos \frac{x}{a} \\ -\frac{\pi}{2}a < x < \frac{\pi}{2}a \end{cases}$
3	ANTIPODAIRE ou ORTHOCAUSTIQUE	$\begin{cases} \rho = \frac{\rho_0}{\sin \psi_0} = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_0'^2} \\ \theta = \theta_0 + \left(\frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) \end{cases}$
4	ANGUINÉE	$\begin{cases} x = d \tan \frac{t}{2}, -\pi < t < \pi \\ y = \frac{a}{2} \sin t \end{cases}$
5	BIQUARTIQUE	$\begin{cases} x = \sin 3t \cos t \\ y = (\sin 3t \cos t)^2 \end{cases}$

Литература

1. Твердохлебов В.А. Геометрические образы поведения дискретных детерминированных систем / В.А. Твердохлебов // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи, 2006, № 5. С. 161 – 165.
2. Твердохлебов В.А. Геометрические образы законов функционирования автоматов / В.А. Твердохлебов. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. – 183 с.
3. Welcome to the On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: <http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html>.
4. Епифанов А.С. Анализ фазовых картин дискретных динамических систем / А.С. Епифанов. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. – 156 с.
5. Епифанов А.С. Интерпретация спектра характеристик дискретных систем при проектировании / А.С. Епифанов // Материалы международной конф. «Автоматизация проектирования дискретных систем». Т.1, Минск. 2007.

Поступила в редакцию 19.01.2009

Рецензент: д-р техн. наук, професор, завідуючий кафедрою, декан факультета РТСЛА В.М. Ілюшко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.

АНАЛІЗ ФАЗОВИХ КАРТИН ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЕКТРУ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

А.С. Єпіфанов

Використання геометричних образів законів функціонування автомата дозволило представляти фазові картини єдиними математичними структурами – ламаними лініями з числовими координатами. Таке уявлення дозволяє розглядати геометричні криві з автоматною інтерпретацією. У статті наводяться результати дослідження законів функціонування автоматів, побудованих по класичних геометричних кривих: спіралі Архімеда, лемніскаті Бернуллі, спіралі Фібоначчі, кривій Гауса, брахистохроне і т.д. Досліджується залежність числа станів у мінімального автомата, побудованого по кривій від числа вхідних сигналів автомата. Здійснюється класифікація законів функціонування автоматів на основі спектру динамічних параметрів рекурентного визначення числових послідовностей.

Ключові слова: технічне діагностування, фазова картина, автомат, геометричний образ законів функціонування, спектр динамічних параметрів.

THE ANALYSIS OF PHASE PICTURES OF DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS WITH USE OF A SPECTRUM OF DYNAMIC PARAMETERS

A.S. Epifanov

Use of geometrical images of laws of functioning of the automatic device has allowed to represent phase pictures uniform mathematical structures - broken lines with numerical coordinates. Such representation allows to consider geometrical curves with automatic interpretation. In clause are brought results of research of laws of functioning of the automatic devices constructed on classical geometrical curves: golden spiral, Lemniscate of Bernouilli, a ballistic curve, Equiangular spiral, Archimedian spiral, Astroid, Galileo's spiral, Brachistochrone (or brachistochronous) curve etc. In clause is researched dependence of number of conditions at the minimal finite state machine constructed on a curve from number of entrance signals of the finite state machine. Classification of laws of functioning of finite state machine on the basis of a spectrum of dynamic parameters of recurrent definition of numerical sequences is carried out.

Key words: technical diagnosing, phase picture, finite state machine, geometrical image of laws of functioning, spectrum of dynamic parameters.

Епіфанов Антон Сергеевич – аспирант, Институт проблем точной механики и управления Российской Академии Наук, Саратов, Россия, e-mail: epifanovas@list.ru.