УДК 004.75.05

В.Ю. ДУБНИЦКИЙ[1], А.В. ГОРБЕНКО[2]

[1]Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ
[2]Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт"

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УСЕЧЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ WEB-СЕРВИСОВ

В статье исследовано использование усеченных законов распределения случайных величин в задачах оценки оперативности обслуживания сервис-ориентированных систем. Методы исследования базируются на использовании модели обслуживания Web-сервисов, устанавливающей соотношения между вероятностью обслуживания, средним временем обслуживания и максимальным временем ожидания – тайм-аутом, который определяет границу усечения функции плотности распределения времени обслуживания. Приведены аналитические выражения для расчета параметров распределений Вейбулла и Гамма.

Ключевые слова: *web-сервисы, параметры усеченных законов распределения*

Введение

Концепция *сервис-ориентированной архитектуры* (СОА) определяет современный подход к созданию распределенных информационно-вычислительных систем путём комбинации удаленных слабо-связанных программных компонентов – Web-сервисов, взаимодействующих посредством передачи сообщений в глобальной сети Интернет [1]. Однако отсутствие достаточной информации о деталях реализации и нефункциональных характеристиках Web-компонентов, которые принимают участие в интеграции, их принадлежность к разным административным доменам, распределенный асинхронный характер взаимодействия и нестабильность Интернет-среды создают значительные проблемы в прогнозировании показателей гарантоспособности и производительности сервис-ориентированных систем [2]. Вследствие этого, потребители Web-услуг и пользователи сервис-ориентированных систем не могут быть уверенными в определенном времени обслуживания, готовности, безотказности и достоверности.

Существующие экспериментальные исследования [3] свидетельствуют о том, что характеристики производительности Web-сервисов – компонентов сервис-ориентированных систем могут изменяться случайным образом в достаточно широких пределах.

Неопределенность времени обслуживания Web-сервисов может быть описана с помощью, так называемых heavy-tailed законов, законов распределения с тяжёлыми хвостами, к которым относят распределения Гамма, Вейбулла, Бета и др. [4]. Одна из особенностей этих распределений в том, что на них не распространяется правило «трёх сигм». Распределения с тяжелыми хвостами нашли применение при описании различного рода процессов с рисками, имеющими малую вероятность, но тяжелые последствия.

Глобально-распределенный характер взаимодействия и отсутствие информации о деталях реализации web-сервиса не гарантируют получение ответа от web-сервиса или же то, что ответ обязательно будет получен за некоторое фиксированное время. Поэтому при построении распределенных информационных систем распространенным решением является использование таймеров, устанавливающих максимально-допустимое время ожидания ответа от удаленной системы или компонента, т.е. тайм-аут.

Такие таймеры используются как на прикладном уровне, так и входят в реализацию различных коммуникационных протоколов, TCP, HTTP, SOAP и др. В результате, в задачах оценки временных и надежностных характеристик Web-сервисов в условиях вероятностной неопределенности возникает проблема оценки статистических параметров (математического ожидания, дисперсии, стандартного отклонения, коэффициента вариации и др.) законов распределения, усеченных на границе установленного тайм-аута.

В связи с этим целью статьи является исследование усеченных законов распределения случайной величины и нахождение аналитических моделей для оценки их параметров.

1. Вероятностно-временная модель обслуживания web-сервисов

В случае вероятностной неопределенности время обслуживания, которое является случайной величиной, описывается некоторым законом распределения $f_t(t)$. С учетом того, что на практике время ожидания ответа от Web-сервиса всегда ограничено, возможны два варианта обслуживания, характеризующиеся вероятностями: p^{ok} – вероятность получения за время ожидания результата (вероятность обслуживания); p^{to} – вероятность того, что за установленное время ожидания от сервиса не будет получен ответ (вероятность необслуживания за время ожидания).

Взаимосвязь вероятностей p^{ok} и p^{to} иллюстрируется на рис. 1.

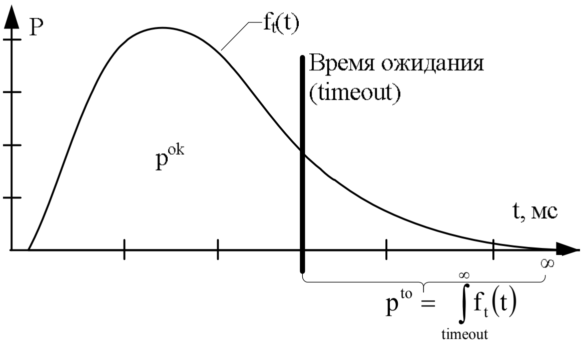

Рис. 1. Вероятностно-временная взаимосвязь результатов обслуживания web-сервиса

Очевидно, что сумма этих вероятностей равна единице, а их отношение зависит от установленного времени ожидания – тайм-аута:

$$p^{ok} = \int_0^{timeout} f_t(t)dt = 1 - p^{to}.$$

При использовании тайм-аута среднее время обслуживания t^{av} является математическим ожиданием усеченного закона распределения, которое может быть вычислено с помощью выражения:

$$M^{trunc}[X] = \frac{\int_A^B x \cdot f_X(x)dx}{F_x(B) - F_x(A)},$$

где A – левая граница усеченного закона распределения, которая в нашем случае равна нулю, а B – правая граница усечения, равная установленному значению тайм-аута. Описанная выше вероятностно-временная модель известна в теории вероятностей как схема усечённых распределений.

2. Свойства усечённых распределений

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, для которой известны функция и плотность распределения. Примем, что возможные значения этой случайной величины расположены на положительной полуоси, то есть $0 \le X < \infty$. Предположим, что для данной случайной величины плотность распределения такова, что её первый начальный и второй центральный моменты конечны. Пусть, исходя из физического смысла задачи, интерес представляют значения математического ожидания и дисперсии (среднеквадратического отклонения) случайной величины X не на всей области её определения, а в некоторых подобластях:

$$0 \le X \le u < \infty, \tag{3}$$

$$u \le X < \infty, \tag{4}$$

$$u \le X \le w < \infty. \tag{5}$$

В случае справедливости условия (3) будем говорить об усечённом справа распределении, в случае (4) будем говорить об усечённом слева распределении и в случае (5) -общем случае, будем говорить о двустороннем усечённом распределении случайной величины X. Пусть на интервале (A, B), возможно бесконечном, задана функция распределения F(x) и плотность распределения f(x) случайной величины X. Примем, что двусторонне усечённая функция распределения задана условием:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin (u, w); \\ CF(x), & \text{если} \quad x \in (u, w). \end{cases} \tag{6}$$

Плотность распределения в этом случае имеет вид:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin (u, w); \\ cf(x), & \text{если} \quad x \in (u, w). \end{cases} \tag{7}$$

При этом:

$$A \le u \le x \le w \le B. \tag{8}$$

В работе [5], которая вышла в свет на языке оригинала в 1952 г., была поставлена и решена задача определения функций распределения и плотности случайной величины (СВ) X при условии нормальности исходного распределения и интервала усечения. В работе [6], опубликованной в 1962 г., но выполненной приблизительно в одно время с работой [5], приведена общая теория решения поставленной задачи. В работе [7] приведено подробное решение задачи определения числовых характеристик усечённого нормального распределения при условии, что интервал усечения имеет вид $-\infty \le X < \infty$. В справочнике [8] приведен результат решения поставленной задачи для интервала усечения вида: $-\infty < u \le x \le w < \infty$. Следуя работе [6], приведем основные этапы решения поставленной задачи. Нормирующий множитель, присутствующий в уравнениях (6) и (7), определим из условия:

$$C\int_u^w f(x)dx = 1 \tag{9}$$

или:

$$C = [F(w) - F(u)]^{-1}. \qquad (10)$$

Функция распределения вероятности усечённого распределения:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [u,w]; \\ C\int\limits_u^x f(x)dx = C[F(x) - F(u)], & \text{если } x \in [u,w]. \end{cases} \qquad (11)$$

Математическое ожидание усечённого распределения определяют по формуле:

$$M[X_{u,w}] = C\int\limits_u^w xf(x)dx, \qquad (12)$$

второй начальный момент определяют по формуле:

$$\alpha^2_{u,w} = C\int\limits_u^w x^2 f(x)dx. \qquad (13)$$

В этом случае дисперсия составит:

$$D[X_{u,w}] = \alpha^2_{(u,w)} - \left(M[X_{u,w}]\right)^2. \qquad (14)$$

Далее для двусторонне усечённых распределений Гамма и Вейбула определим математическое ожидание и второй начальный момент. Знание этих числовых характеристик позволит, согласно условию (14), определить дисперсии этих распределений.

3. Определение числовых характеристик усечённого гамма-распределения

Для упрощения последующего изложения приведем некоторые, нужные в дальнейшем, свойства гамма-функции [7, 9]. Гамма-функцией называют интеграл вида:

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \qquad (15)$$

Для него справедливо равенство [10, С. 322]:

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx. \qquad (16)$$

Неполной гамма-функцией называют выражение вида [11]:

$$\gamma(\alpha, x) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \qquad (17)$$

Дополнительной неполной гамма-функцией называют выражение вида [11]:

$$\Gamma(\alpha, x) = \int\limits_x^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \qquad (18)$$

Из (15), (17) и (18) следует, что

$$\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x). \qquad (19)$$

В [9, С. 137] показано, что

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^\alpha}\gamma(\alpha, \lambda x). \qquad (20)$$

Как известно [4], плотность гамма-распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \ x > 0. \qquad (21)$$

Функция гамма-распределения, с учетом (17), (20) принимает следующий вид:

$$F(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{\gamma(\alpha, \lambda x)}{\Gamma(\alpha)}, \ x > 0. \qquad (22)$$

Тогда, в соответствии с (7), имеем следующее выражение для расчета нормирующего множителя:

$$C = [F(w) - F(u)]^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\gamma(\alpha, \lambda w) - \gamma(\alpha, \lambda u)}. \qquad (23)$$

В этом случае функция усечённого гамма-распределения, в соответствии с (14), примет вид:

$$C[F(x) - F(u)] = \frac{\gamma(\alpha, \lambda x) - \gamma(\alpha, \lambda u)}{\gamma(\alpha, \lambda w) - \gamma(\alpha, \lambda u)}. \qquad (24)$$

Плотность g(x) усечённого гамма-распределения, с учетом (4), (21) и (23), составит

$$g(x) = Cf(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\gamma(\alpha, \lambda w) - \gamma(\alpha, \lambda u)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \ x > 0,$$

а его математическое ожидание

$$M[X_{u,w}] = \int\limits_u^w \frac{\lambda^\alpha}{\gamma(\alpha, \lambda w) - \gamma(\alpha, \lambda u)} x \cdot x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx. \qquad (25)$$

Пусть

$$R = \frac{\lambda^\alpha}{\gamma(\alpha, \lambda w) - \gamma(\alpha, \lambda u)}. \qquad (26)$$

Тогда

$$M[x_{u,w}] = R\int\limits_u^w x^\alpha e^{-\lambda x}dx. \qquad (27)$$

Очевидно, что:

$$\int\limits_u^w x^\alpha e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^w x^\alpha e^{-\lambda x}dx - \int\limits_0^u x^\alpha e^{-\lambda x}dx. \qquad (28)$$

Рассмотрим более обстоятельно интеграл вида:

$$\Im = \int\limits_0^b x^\alpha e^{-\lambda x}dx.$$

Из [9, 1.3.2.1, С. 137] нужно определить, что

$$\Im = \frac{\alpha}{\lambda}\int\limits_0^b x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx - \frac{b^\alpha e^{-\lambda b}}{\lambda}. \qquad (29)$$

В свою очередь [9, 1.2.2.3, С. 137]:

$$\int\limits_0^b x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^\alpha}\gamma(\alpha, \lambda x). \qquad (30)$$

Подставив выражение (30) в (29), получим:

$$\Im = \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}\gamma(\alpha,\lambda b) - \frac{b^{\alpha}e^{-\lambda b}}{\lambda}. \quad (31)$$

Другими словами, показано, что

$$\gamma(\alpha+1,\lambda x) = \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}\gamma(\alpha,\lambda x) - \frac{x^{\alpha}e^{-\lambda x}}{\lambda}, \quad (32)$$

при (λ=1 условие (32) совпадает с выражением, приведенным в [12, С. 139]. Используя выражение (26), (27) и (31) получим, что:

$$M[x_{u,w}] = \\ = \frac{\lambda^{\alpha}}{\gamma(\alpha,\lambda w)-\gamma(\alpha,\lambda u)}\cdot\left(\gamma(\alpha+1,\lambda b)-\gamma(\alpha+1,\lambda u)\right). \quad (33)$$

Используя условие (32), можно получить выражение для

$$\alpha_2 = C\int_u^w x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx, \quad (34)$$

а, следовательно, определить дисперсию двусторонне усечённого гамма-распределения. С этой целью рассмотрим выражение вида:

$$\alpha_2 = R\int_u^w x^2 x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx \quad (35)$$

или

$$\alpha_2 = R[\gamma(\alpha+2,\lambda w)-\gamma(\alpha+2,\lambda u)]. \quad (36)$$

Рассмотрим интеграл вида:

$$\Im = \int_0^b x^{\alpha+1}e^{-\lambda x}dx = \gamma(\alpha+2,\lambda b). \quad (37)$$

Используя выражение (32), в качестве рекуррентного, получим, что:

$$\gamma(\alpha+2,\lambda b) = \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+2}}\gamma(\alpha+1,\lambda b) - \frac{b^{\alpha+1}e^{-\lambda b}}{\lambda} = \\ = \frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+2}}\left[\frac{\alpha}{\lambda^{\alpha+1}}\gamma(\alpha,\lambda b) - \frac{b^{\alpha}e^{-\lambda b}}{\lambda}\right] - \frac{b^{\alpha+1}e^{-\lambda b}}{\lambda} = \\ = \frac{\alpha^2}{\lambda^{2\alpha+3}}\gamma(\alpha,\lambda b) - \frac{\alpha b^{\alpha}e^{-\lambda b}}{\lambda^{\alpha+3}} - \frac{b^{\alpha+1}e^{-\lambda b}}{\lambda}. \quad (38)$$

Подставляя в (38), вместо верхнего предела интегрирования, величины w, u, и, используя уравнение (36), получим выражение для дисперсии двусторонне усечённого гамма-распределения.

4. Определение числовых характеристик усечённого распределения Вейбулла

Полученные ранее результаты можно также использовать для получения аналогичных характеристик распределения Вейбулла. В результате громоздкости полученных выражений приведем способ их получения в сокращенном виде.

Пусть функция распределения Вейбулла имеет вид, приведенный в [7]:

$$F(x) = 1-\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right), \quad x \ge 0, \quad (39)$$

тогда плотность этого распределения равняется:

$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right). \quad (40)$$

Нормирующий множитель примет вид:

$$C = [F(w)-F(u)]^{-1} = \frac{\exp\left(\left(\frac{u}{\theta}\right)^{\beta}+\left(\frac{w}{\theta}\right)^{\beta}\right)}{\exp\left(\left(\frac{w}{\theta}\right)^{\beta}\right)-\exp\left(\left(\frac{u}{\theta}\right)^{\beta}\right)}. \quad (41)$$

Математическое ожидание в этом случае будет равняться:

$$M[X_{u,w}] = C\int_u^w x\left(\frac{\beta}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}\exp\left(\left(-\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}\right)dx. \quad (42)$$

В соответствии с работой [7], получим:

$$M[X_{u,w}] = C\theta\int_{\left(\frac{u}{\theta}\right)^{\beta}}^{\left(\frac{w}{\theta}\right)^{\beta}} z^{\frac{1}{\beta}}e^{-z}dz. \quad (43)$$

Окончательно получим:

$$M[X_{u,w}] = C\theta\left(\int_0^q z^{\alpha}e^{-z}dz - \int_0^g z^{\alpha}e^{-z}dz\right) = \\ = C\theta\left(\gamma(\alpha+1,q)-\gamma(\alpha+1,g)\right).$$

Заключение

Статья посвящена решению задач определения числовых характеристик (математическое ожидание, второй начальный момент и дисперсии) для усечённых законов распределения Вейбулла и гамма.

Такие задачи возникают в практике оценки временных и надежностных характеристик Web-сервисов и сервис-ориентированных систем в случае вероятностной неопределенности их нефункциональных характеристик. Т.е. когда время обслуживания, готовность, безотказность и достоверность таких систем представлены в виде теоретических законов распределения случайной величины с известными параметрами. Определение вида закона распределения и его параметров осуществляется на основе мониторинга нефункциональных характеристик Web-сервисов и проверки статистических гипотез в соответствии с методикой, предложенной в [4], а границы усечения определяются исходя из настроек прикладного программного обеспечения и коммуникационных протоколов, например, значений тайм-аутов протокола TCP или SOAP.

Литература

1. OASIS Reference Model for Service Oriented Architecture. Ver. 1.0 [Text] / C.M. MacKenzie, K. Laskey, F. McCabe, etc. – Burlington: OASIS, 2006. – 31 p.

2. Gonczy, L. Dependability Evaluation of Web Service-Based Processes [Text] / L. Gonczy, S. Chiaradonna, F. di Giandomenico // Proc. European Performance Engineering Workshop (EPEW'2006). – Bertinoro (Italy), 2006. – P. 166–180.

3. Gorbenko, A. Instability analysis of delays contributing to Web Service response time [Text] / A. Gorbenko // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2010. – № 6 (47). – С. 63–67.

4. Real Distribution of Response Time Instability in Service-Oriented Architecture [Text] / A. Gorbenko, V. Kharchenko, S. Mamutov, O. Tarasyuk, Yu. Chen, A. Romanovsky // Proc. 29th IEEE International Symposium on Reliable Distributed Systems (SRDS'2010). – Delhi (India), 2010. – P. 92–99.

5. Хальд, А. Математическая статистика с техническими приложениями [Текст] / А. Хальд. – М.: Иностранная литература, 1956. – 595 с.

6. Шор, Я.Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности [Текст] / Я.Б. Шор. – М.: Сов. радио, 1962. – 527 с.

7. Жлуктенко, В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.1. Теорія ймовірностей [Текст] / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.

8.Вадзинский, Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям [Текст] / Р.Н. Вадзинский. – СПб.: Наука, 2001. – 295с.

9. Случайные сигналы в задачах оценки состояния технических систем [Текст] / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев и др. – К.: Наук. мысль, 1992. – 252 с.

10. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции [Текст] / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: НАУКА-ФМЛ, 1981. – 800 с.

11. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М.: НАУКА-ФМЛ, 1974. – 296 с.

12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М.: НАУКА-ФМЛ, 1973. – 296 с.

Поступила в редакцию 15.10.2012

Рецензент: д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой компьютерных систем и сетей В.С. Харченко, Национальный аэрокосмический университет, Харьков.

ВИКОРИСТАННЯ УСІЧЕНИХ РОЗПОДІЛІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИПАДКОВИХ ЗНАЧЕНЬ ЧАСОВИХ ПАРАМЕТРІВ WEB-СЕРВІСІВ

В.Ю. Дубницький, А.В. Горбенко

У статті досліджено використання усічених законів розподілу випадкових величин в задачах оцінки оперативності обслуговування сервіс-орієнтованих систем. Методи дослідження базуються на використанні моделі обслуговування Web-сервісів, що встановлює співвідношення між імовірністю обслуговування, середнім часом обслуговування та максимальним часом очікування – тайм-аутом, який визначає межу усікання функції щільності розподілу часу обслуговування. Приведені аналітичні вирази для розрахунку параметрів розподілів Вейбулла та Гамма.

Ключові слова: web-сервіси, параметри усічених законів розподілу

USING TRUNCATED DISTRIBUTIONS FOR DETERMINING OF NUMERIC CHARACTERISTICS OF RANDOM VALUES OF WEB-SERVICES TIMING PARAMETERS

V.Iu. Dubnitskyi, A.V. Gorbenko

Using of truncated distribution laws of random variables for estimation of service-oriented systems responsiveness is investigated in the paper. The investigation techniques use a servicing model which defines a relationship between probability of successful servicing, servicing time and maximal waiting time – time-out. The time-out defines a truncation border of response time probability density function. Analytical equations for Weibull and Gamma parameters estimations are proposed.

Keywords: web-services, parameters of truncated distribution laws.

Дубницкий Валерий Юрьевич – канд. техн. наук, с.н.с, доцент кафедры высшей математики Харьковского института банковского дела Университета банковского дела НБУ, Харьков, Украина

Горбенко Анатолий Викторович – д-р техн. наук, доцент, доцент кафедры компьютерных систем и сетей Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина