

УДК 621.3.049.77.002:519.24

А.Ю. ДОЛГОВ

Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко,  
Тирасполь, Приднестровье, Молдова

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ КОНТРОЛЬНОЙ ВЫБОРКИ МАЛОГО ОБЪЕМА ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Исследовано использование вида закона распределения (в данном случае экспоненциального) в сочетании с методом точечных распределений (МТР) для пооперационного выборочного контроля по выборкам малого объема. Анализ данных свидетельствует, что даже простейший учет вида закона распределения при коэффициентах перекрытия нормы даёт некоторый эффект – выигрыш в точности прогнозирования брака по сравнению с действующими правилами и нормативами. В случае же использования метода точечных распределений положительный эффект может составить в среднем от 2 до 5 раз. Поэтому использование МТР в сочетании с экспоненциальным законом распределения может быть рекомендовано для внедрения в производстве.

**Ключевые слова:** выборочный контроль, экспоненциальное распределение, интервальная оценка дисперсии.

### Введение

В предыдущей статье [1] были обоснованы теоретические положения, с помощью которых удалось добиться существенного повышения точности оценок параметров контрольных выборок малого объема при принятии решения о величине брака на примере производства кристаллов интегральных микросхем. В основу расчетов был положен нормальный закон распределения, который, по нашим наблюдениям, достаточно хорошо описывает реальные распределения контролируемых параметров примерно в 30% случаев. Остальное приходится на другие законы.

В настоящей статье рассмотрен случай, когда контролируемый параметр распределен по экспоненциальному закону.

### Теоретические и экспериментальные исследования

Дифференциальный закон (плотность вероятности) экспоненциального распределения может быть представлен как

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad (1)$$

где  $\lambda = (M[x])^{-1}$  – отношение риска;  $M[x]$  – математическое ожидание.

Особенностью экспоненциального закона является равенство математического ожидания среднему квадратическому (стандартному) отклонению [2]

$$M[x] = \sigma. \quad (2)$$

Однако на практике математическое ожидание заменяется его оценкой – средним арифметическим выборки  $\bar{X}$ , а среднее квадратическое отклонение (СКО) его оценкой – эмпирическим СКО  $S$ , в силу чего равенство (2) превращается в приблизительное равенство

$$\bar{X} \approx S \quad (3)$$

$$\text{или} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Напомним, что особенностью диапазона прогнозируемого брака является его двойственное происхождение от объективных и субъективных причин. К объективным причинам следует отнести объем выборки  $n$  (в нашем случае  $n=5$  или 10 элементов), коэффициент перекрытия нормы

$$V = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{T_B - T_H}, \quad (4)$$

расположение конкретных значений контролируемого параметра на числовой оси (рис. 1), а к субъективным причинам – большую ошибку при исчислении СКО, размах которой соответствует её интервальной оценке

$$\sqrt{\frac{nS^2}{\chi_2^2}} < \sigma < \sqrt{\frac{nS^2}{\chi_1^2}}, \quad (5)$$

где  $\chi_1^2(1-\alpha/2; v=n-1)$  и  $\chi_2^2(\alpha/2; v=n-1)$  – табличные значения величин хи-квадрат распределения при уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы  $n$  [3].

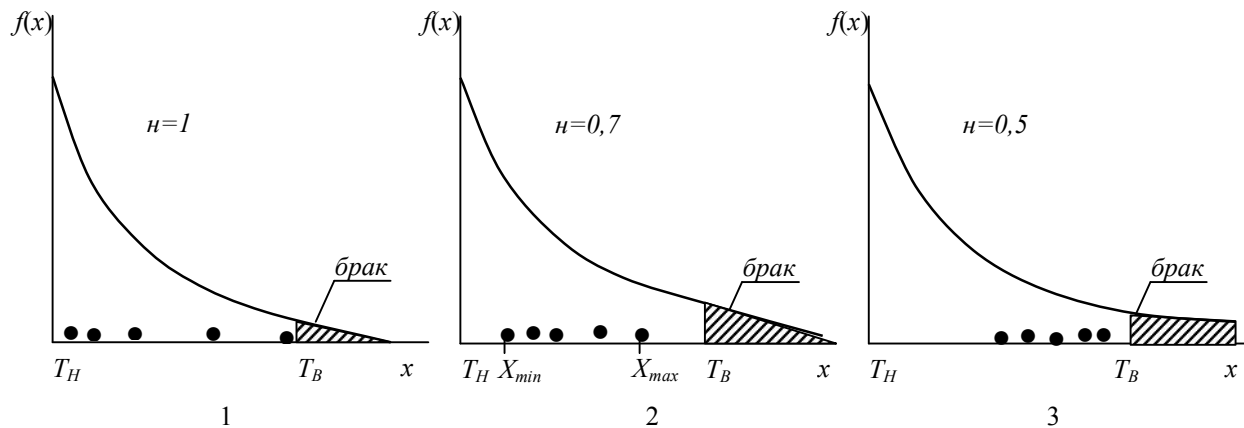


Рис. 1. Варианты расположения измерений на числовой оси при  $m = 5$ :  
1 – минимальный брак; 2 – наивероятнейший брак; 3 – максимальный брак.

Вероятности появления брака с учетом равенства (3) можно представить в следующем виде:  
при средней величине

$$P_{\text{бр.ср}} = 1 - \frac{1}{X} \int_{T_H}^{T_B} \exp\left(-\frac{X}{X}\right) dx; \quad (6)$$

при минимальной величине

$$P_{\text{бр.ср}} = 1 - \frac{1}{S_{\min}} \int_{T_H}^{T_B} \exp\left(-\frac{1}{S_{\min}}\right) dx; \quad (7)$$

при максимальной величине

$$P_{\text{бр.ср}} = 1 - \frac{1}{S_{\max}} \int_{T_H}^{T_B} \exp\left(-\frac{1}{S_{\max}}\right) dx. \quad (8)$$

Величины прогнозируемого брака, рассчитанные по формулам (6) и (8) для различных технологических ситуаций, представлены в табл. 1.

Аналогичную таблицу можно привести для случая пластины с десятью тестовыми ячейками.

Таблица 1  
Величины прогнозируемого брака (%) на пластине с пятью тестовыми ячейками ( $n=5$ )

Прогнозируемый брак	СКО	Число измерений, не выходящих за пределы нормы, $m$										
		$m=5$			$m=4$			$m=3$				
		$n=1,0$	$n=0,7$	$n=0,5$	$n=1,3$	$n=1,0$	$n=0,7$	$n=0,5$	$n=2,0$	$n=1,0$	$n=0,7$	$n=0,5$
Минимальный	minS	2,4	0,5	0,1	5,7	2,4	11,1	12,4	22,4	17,5	17,3	17,0
	$S_{\text{ср}}$	8,2	2,8	0,7	14,6	8,2	23,0	24,7	36,7	31,2	30,8	30,5
	maxS	46,0	32,9	21,1	55,0	46,0	63,3	64,7	73,2	69,6	69,3	69,1
Наивероятнейший	minS	–	2,9	3,4	9,7	10,3	12,9	14,7	25,4	22,2	19,5	19,4
	$S_{\text{ср}}$	–	9,3	10,3	21,0	21,8	25,4	27,7	39,9	36,4	33,4	33,3
	maxS	–	47,7	49,3	61,5	62,2	65,3	67,1	75,1	73,0	71,1	71,1
Максимальный	minS	–	7,6	11,3	10,9	18,3	13,2	16,7	27,0	25,2	24,1	20,6
	$S_{\text{ср}}$	–	17,8	23,2	30,4	32,1	25,8	30,2	41,6	39,7	38,5	34,7
	maxS	–	58,5	63,5	69,1	70,2	65,6	68,9	76,1	75,0	74,3	72,0

Анализ табл. 1 подтвердил прежние выводы о том, что величина брака существенным образом зависит от объективной причины: коэффициента перекрытия нормы – до 2-х раз (при  $n=5$ ) и от величины СКО – до 2-3 раз, но также добавил новый вывод о том, что при экспоненциальном законе распределения в случае  $m < 5$  величина брака возрастает при уменьшении коэффициента перекрытия нормы  $x$ .

Это напрямую связано с местом расположения чисел выборки на числовой оси – чем меньше  $x$ , тем ближе измерения ложатся к верхней границе технологической нормы  $T_B$  (рис. 2).

Для уменьшения субъективной составляющей расчетной величины прогнозируемого брака предла-

гается использовать приём – эквивалентной (виртуальное) увеличение объема выборки с помощью метода точечных распределений (МТР) [4]. По специальным алгоритмам и формулам находят виртуальные средние арифметические выборок и виртуальные эмпирические дисперсии, при подстановке значений которых в формулу (5) с учетом того, что объемы эквивалентных выборок изменились (вместо  $n=5$  теперь  $n_3=17$ ; вместо  $n=10$  теперь  $n_3=29$ ) и, следовательно, изменились табличные значения х-квадрат распределения, получим минимальное и максимальное значения виртуальных эмпирических СКО. При этом интервал новой оценки существенно уменьшится (рис. 3).

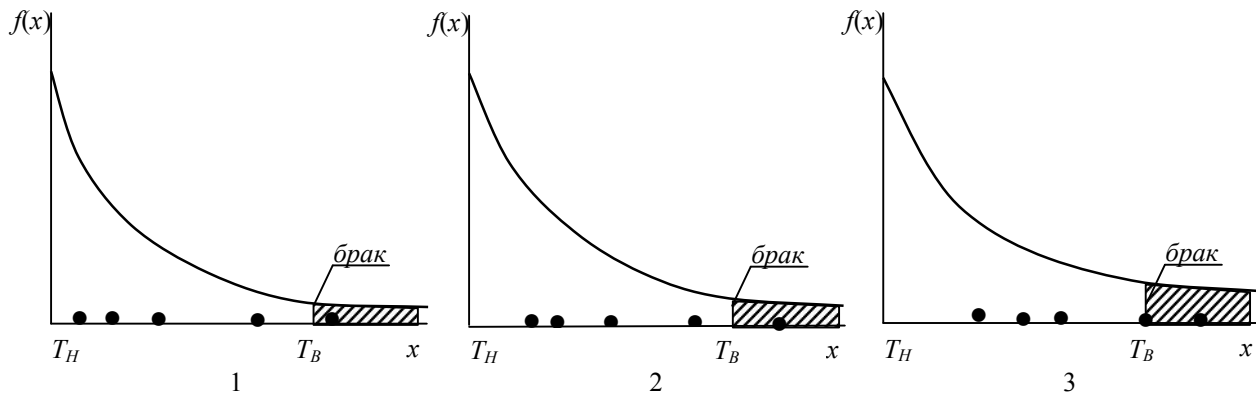


Рис. 2. Варианты расположения измерений на числовой оси при  $m = 4$  и  $x = 1$ :  
 1 – минимальный брак; 2 – наивероятнейший брак; 3– максимальный брак

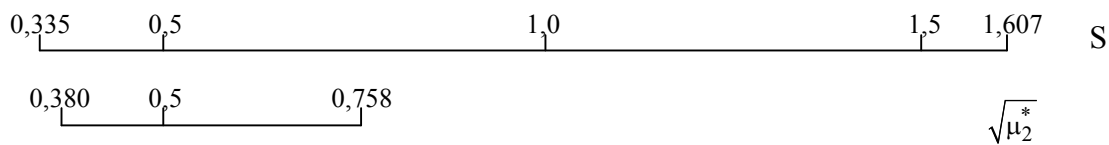


Рис. 3. Соотношение интервальных оценок для эмпирического  $S$  и виртуального  $SКО$  одной исходной выборки

Тогда подставляя полученные величины в формулы (6) – (8), получим значения прогнозируемого брака с уменьшенной долей субъективной составляющей (табл. 2).

Таблица 2

Величины прогнозируемого брака (%) на пластине с пятью тестовыми ячейками ( $n_3=17$ )

Прогнозируемый брак	Вирт. СКО	Число измерений, не выходящих за пределы нормы, $m$										
		$m=5$			$m=4$			$m=3$				
		$n=1,0$	$n=0,7$	$n=0,5$	$n=1,3$	$n=1,0$	$n=0,7$	$n=0,5$	$n=2,0$	$n=1,0$	$n=0,7$	$n=0,5$
Минимальный	min	2,7	0,7	0,1	5,9	2,8	3,5	4,1	16,7	7,4	6,2	6,1
	среднее	10,1	4,5	0,7	15,5	10,3	18,7	20,0	32,1	25,0	24,8	24,5
	max	16,5	8,2	3,3	24,3	16,7	18,7	20,2	40,8	27,1	25,0	24,6
Наивероятнейший	min	–	1,2	0,9	6,2	4,4	4,2	5,0	18,0	9,9	7,5	7,4
	среднее	–	8,9	8,7	19,1	18,0	20,6	22,3	33,8	29,0	26,9	26,8
	max	–	11,1	9,2	24,8	20,9	20,6	22,3	42,4	31,5	27,3	27,1
Максимальный	min	–	2,4	2,9	8,3	7,6	4,4	5,9	18,5	11,8	10,1	8,0
	среднее	–	14,9	17,0	24,7	25,8	20,8	24,2	34,9	31,7	31,0	27,9
	max	–	15,3	17,1	28,7	27,5	20,9	24,3	42,9	34,3	31,8	28,2

Аналогичную таблицу можно привести для случая пластины с десятью тестовыми ячейками ( $n_3 = 29$ ).

Для оценки снижения доли субъективных факторов при расчете прогнозируемого брака в случае использования метода точечных распределений при экспоненциальном законе исходной совокупности необходимо сопоставить результаты расчетов с действующими на производстве нормативами.

В табл. 3 представлены отношения уменьшения наиболее интересного показателя – максимального брака – для всех технологических ситуаций.

### Выводы

Анализ данных табл. 3 свидетельствует, что даже простейший учет вида закона распределения при коэффициентах перекрытия нормы даёт некоторый эффект – выигрыш в точности прогнозирования брака по сравнению с действующими правилами и нормативами. В случае же использования метода точечных распределений положительный эффект может составить в среднем от 2 до 5 раз. Поэтому использование МТР в сочетании с экспоненциальным законом распределения может быть рекомендовано для внедрения в производстве.

Таблица 3

Относительное уменьшение максимального брака (разы)

Сравнение	Прогнозируемый брак	Число измерений, не выходящих за пределы нормы, m										
		m=5			m=4			m=3				
		n=1,0	n=0,7	n=0,5	n=1,3	n=1,0	n=0,7	n=0,5	n=2,0	n=1,0	n=0,7	n=0,5
Табл. 1 с действ. нормативами	Миним.	2,7	0,7	0,1	5,9	2,8	3,5	4,1	16,7	7,4	6,2	6,1
	Наивероятн.	10,1	4,5	0,7	15,5	10,3	18,7	20,0	32,1	25,0	24,8	24,5
	Максим.	16,5	8,2	3,3	24,3	16,7	18,7	20,2	40,8	27,1	25,0	24,6
Табл. 2 с табл. 1	Миним.	–	1,2	0,9	6,2	4,4	4,2	5,0	18,0	9,9	7,5	7,4
	Наивероятн.	–	8,9	8,7	19,1	18,0	20,6	22,3	33,8	29,0	26,9	26,8
	Максим.	–	11,1	9,2	24,8	20,9	20,6	22,3	42,4	31,5	27,3	27,1
Табл. 2 с действ. нормативами	Миним.	–	2,4	2,9	8,3	7,6	4,4	5,9	18,5	11,8	10,1	8,0
	Наивероятн.	–	14,9	17,0	24,7	25,8	20,8	24,2	34,9	31,7	31,0	27,9
	Максим.	–	15,3	17,1	28,7	27,5	20,9	24,3	42,9	34,3	31,8	28,2

### Литература

1. Долгов, А.Ю. Повышение точности оценок параметров контрольной выборки малого объема [Текст] / А.Ю. Долгов // *Радиоэлектронні і комп'ютерні системи*. – 2012. – № 6. – С.119 – 123.

2. Хастингс, Н. Справочник по статистическим распределениям [Текст]; пер. с англ. / Н. Хастингс, Дж. Пикок. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.

3. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики. 3-е изд. [Текст] / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

4. Долгов, Ю.А. Метод повышения точности вычисления параметров выборки малого объема (метод точечных распределений) [Текст] / Ю.А. Долгов, А.Ю. Долгов, Ю.А. Столяренко // *Вестн. Приднестр. гос. ун-та*. – 2010. – Юб. вып. – С. 232 – 242.

Поступила в редакцию 8.02.2013, рассмотрена на редколлегии 6.03.2013

**Рецензент:** д-р техн. наук, доцент, проф. каф. компьютерных систем и сетей А.В. Горбенко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина.

### ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ КОНТРОЛЬНОЇ ВИБІРКИ МАЛОГО ОБ'ЄГУ ПРИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОМУ ЗАКОНІ РОЗПОДІЛУ

*О.Ю. Долгов*

Досліджено використання виду закону розподілу (в даному випадку експоненціального) у поєднанні з методом точкових розподілів (МТР) для поопераційного вибіркового контролю за вибірках малого обсягу. Аналіз даних свідчить, що навіть найпростіший облік виду закону розподілу при коефіцієнтах перекриття норми дає деякий ефект - вигреш в точності прогнозування шлюбу порівняно з діючими правилами і нормативами. У випадку ж використання методу точкових розподілів позитивний ефект може скласти в середньому від 2 до 5 разів. Тому використання МТР в поєднанні з експонентний законом розподілу може бути рекомендовано для впровадження у виробництві.

**Ключові слова:** вибіркового контроль, експоненційний розподіл, інтервальна оцінка дисперсії.

### INCREASE OF PARAMETER ESTIMATION ACCURACY OF CHECK SMALL SIZE SAMPLE WITH EXPONENTIAL DISTRIBUTION

*A.Y. Dolgov*

It is investigated using of distribution law (in our case exponential law) with point distribution method (PDM) on small size sample. Analysis of the data demonstrates that even the simplest records of the kind of the distribution of the coefficients of the overlapping standards gives some effect – the gain in accuracy of forecasting of marriage compared with the current rules and regulations. In the case of the use of the method of point distributions, the positive effect may be on the average from 2 to 5 times. Therefore, the use of PDMs in conjunction with the exponential law of distribution can be recommended for introduction in manufacture.

**Key words:** sample check, exponential distribution, interval estimated at variance.

**Долгов Алексей Юрьевич** – советник РАЕН, канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационные технологии и автоматизированное управление производственными процессами» Приднестровского государственного университета им. Т.Г. Шевченко (ПГУ), Тирасполь, Приднестровье, Молдова, e-mail: dolgov@spsu.ru.