УДК 621.3.049.77.002:519.24

А. Ю. ДОЛГОВ

Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко, Тирасполь, Приднестровская Молдавская Республика

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ КОНТРОЛЬНОЙ ВЫБОРКИ МАЛОГО ОБЪЁМА ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕЙБУЛЛА

В завершающей статье цикла предложено еще одно решающее правило выборочного контроля – эквивалентная оперативная характеристика (ЭОХ), базирующаяся на распределении Вейбулла. Приведены расчетные формулы и дана таблица оценки точности вычисления прогнозируемого брака по предложенной методике. Также представлена таблица сравнительного анализа точности всех предложенных ранее методов и действующего норматива. Доказано, что использование ЭОХ, базирующейся на распределении Вейбулла, дает более точные (в 1,05÷5,30 раза) результаты, чем использование ЭОХ, базирующихся на других законах распределения, и в 2,5÷8,8 раза точнее, чем действующие методы граничного контроля по выборкам малого объема.

Ключевые слова: *выборочный контроль, распределение Вейбулла, эквивалентная оперативная характеристика.*

Введение

В предыдущих работах [1-4] нами были найдены методы существенного повышения точности прогнозирования брака (в 1,3-2,3 раза) за счет уменьшения субъективной составляющей прогноза. Наибольший эффект дает применение эквивалентной оперативной характеристики (ЭОХ), рассмотренной с учетом нормального [3] и экспоненциального [4] законов распределения. Однако наиболее распространенным законом распределения при производстве кристаллов интегральных микросхем (ИМС) оказался закон Вейбулла, частными случаями которого являются экспоненциальный и нормальный законы.

В статье рассмотрены способы дальнейшего увеличения точности оценки возможного брака (в процентах) применительно к каждой пластине.

1. Теоретические и экспериментальные исследования

Функция распределения Вейбулла может быть представлена в виде [5]

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{X-\theta}{b}\right)^{\eta}\right], \qquad (1)$$

а ее плотность (плотность вероятности) в виде

$$f(x) = \frac{\eta}{b}\left(\frac{X-\theta}{b}\right)^{\eta-1} \exp\left[-\left(\frac{X-\theta}{b}\right)^{\eta}\right], \qquad (2)$$

где b – параметр масштаба (иногда $b = \frac{1}{\lambda}$);

η – параметр формы;

θ – параметр сдвига (рис. 1).

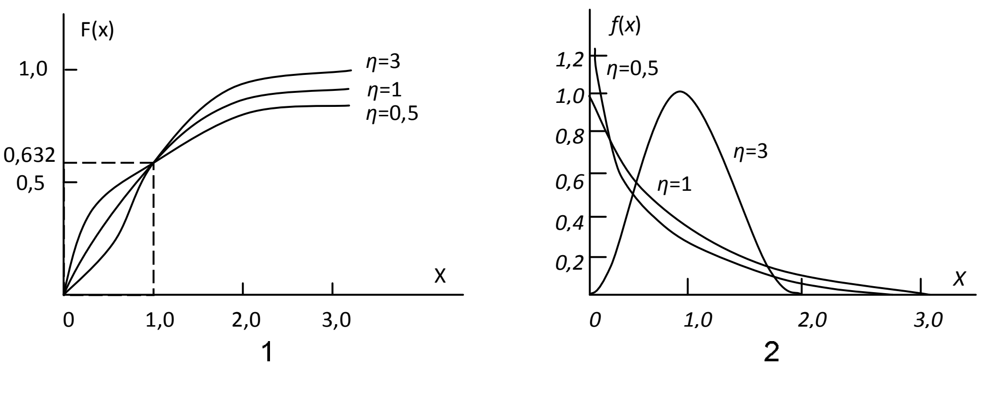

Рис. 1. Плотность вероятности (1) и функция распределения (2) Вейбулла при b=1, θ =0

Вычисление параметров распределения Вейбулла представляет собой сложную задачу [5], однако при $\eta \geq 1$ может быть значительно упрощено с помощью следующих аппроксимаций [6]:

$$\hat{\eta} = 4,8\,(r_3 + 1,23)^{-1,4};\ \hat{b} = \frac{\delta}{G};\ \theta = \bar{X} - \delta;$$

$$\delta \approx \left(0,5 + 0,784\hat{\eta} - \frac{0,35}{\hat{\eta}}\right) \cdot S;$$

$$G = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \approx 1 - 0,427(\eta - 1)\eta^{-1,9}, \qquad (3)$$

где $\bar{X}$ – среднее выборки; S – СКО; r_3 – третий основной момент.

Если смещение отсутствует (θ=0), то оценки параметров имеют вид

$$\hat{\eta} \approx \frac{n-1}{n}\left(0,465\frac{S}{\bar{X}} + 1,282\frac{\bar{X}}{S} - 0,7\right), \hat{b} = \frac{\bar{X}}{G}. \qquad (4)$$

Отдельные выборки объемом *n*=5 или *n*=10 (количество тестовых ячеек (ТЯ) на каждой пластине) можно проверить на соответствие распределению Вейбулла с помощью критерия Смирнова–Крамера–фон Мизеса

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left\{F\left(X_i - \frac{2i-1}{2n}\right)\right\}^2 \leq n\omega^2(P_{дов}) \quad (5)$$

где $F(X_i)$ – теоретическая функция распределения.

Необходимо помнить, что теоретическая функция распределения (в нашем случае функция распределения Вейбулла [7]) должна быть известна с точностью до параметров. Исследованиями [8] установлено, что использование в качестве F(X) функции распределения с параметрами, оцениваемыми по выборке (распространенная ошибка!) приводит к увеличению количества ошибок второго рода.

Решение поставленной задачи будем искать на уже найденном нами пути: эквивалентное (виртуальное) увеличение объема выборки с помощью метода точечных распределений (МТР) [2] и применение эквивалентной оперативной характеристики (ЭОХ) [3].

Для того, чтобы воспользоваться формулой (3) или формулой (4) для определения параметров распределения Вейбулла, необходимо найти среднее арифметическое и второй центральный и третий основной моменты каждой конкретной выборки (т.е. каждой конкретной пластины). Сточки зрения МТР это означает найти [9]

$$m_X^* = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot X'_j \cdot \exp\left[-4,5\left(\frac{X'_j - X_i}{\rho}\right)^2\right]}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot \exp\left[-4,5\left(\frac{X'_j - X_i}{\rho}\right)^2\right]}; \quad (6)$$

$$\mu_2^* = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot \left(X'_j\right)^2 \cdot \exp\left[-4,5\left(\frac{X'_j - X_i}{\rho}\right)^2\right]}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot \exp\left[-4,5\left(\frac{X'_j - X_i}{\rho}\right)^2\right]} - \left(m_X^*\right)^2, \quad (7)$$

$$\mu_3^* = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot \left(X'_j\right)^2 \cdot \exp\left[-4,5\left(\frac{X'_j - X_i}{\rho}\right)^2\right]}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \cdot \exp\left[-4,5\left(\frac{X'_j - X_i}{\rho}\right)^2\right]} - 3\mu_2^* m_X^* - \left(m_X^*\right)^3, \quad (8)$$

$$r_3^* = \frac{\mu_3^*}{\left(\sqrt{\mu_2^*}\right)^3}. \quad (9)$$

Эквивалентные объемы выборок для распределения Вейбулла можно найти из выражения [10]

$$n_э = \sqrt{-713,7 + 301,2n - 6,907n}, \quad (10)$$

что означает для n=5 → $n_э$=25; для n=10 → $n_э$=40. Тогда эквивалентная оперативная характеристика

$$P(q) = F_\circ\left(\left(U_{1-q} - \frac{k_s}{k_n}\right) / \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{k_s^2}{2n-1,4}}\right), \quad (11)$$

где $k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ – поправочный коэффициент, а $F_\circ(\bullet)$ – интеграл Гаусса, при подстановке вместо объемов n исходной выборки объемы $n_э$ эквивалентных выборок и с учетом конкретных значений допустимых ошибок первого рода (например, α=0,10), а также порога 100%-приемки q_0 (например, q_0=0,10), получим

для n=5 и $n_э$=25 величина k_n=k_{25}=0,10105; k_s=1,036;

для n=10 и $n_э$=40 величина k_n=k_{40}=0,10064; k_s=1,107.

Тогда эквивалентные оперативные характеристики запишутся в виде:

для n=5

$$P(q) = F_\circ\left(\frac{U_{1-q} - 1,025}{0,2492}\right) = \frac{\left|T - m_x^*\right|}{\sqrt{\mu_2^*}}; \quad (12)$$

для n=10

$$P(q) = F_\circ\left(\frac{U_{1-q} - 1,100}{0,2015}\right) = \frac{\left|T - m_x^*\right|}{\sqrt{\mu_2^*}}, \quad (13)$$

где T – верхняя или нижняя граница нормы, или, с учетом закона распределения, в виде

$$P(q) = \exp\left[-\left(\frac{X-\theta}{b}\right)^{\eta}\right]. \qquad (14)$$

Напомним, что особенностью диапазона прогнозируемого брака является его двойственное происхождение от объективных и субъективных причин. К объективным причинам следует отнести объем выборки n, коэффициент перекрытия нормы $\upsilon = (X_{max} - X_{min})/(T_B - T_H)$ и расположение конкретных значений контролируемого параметра на числовой оси (рис. 1), а к субъективным причинам – большую ошибку при исчислении среднеквадратического отклонения (табл. 1).

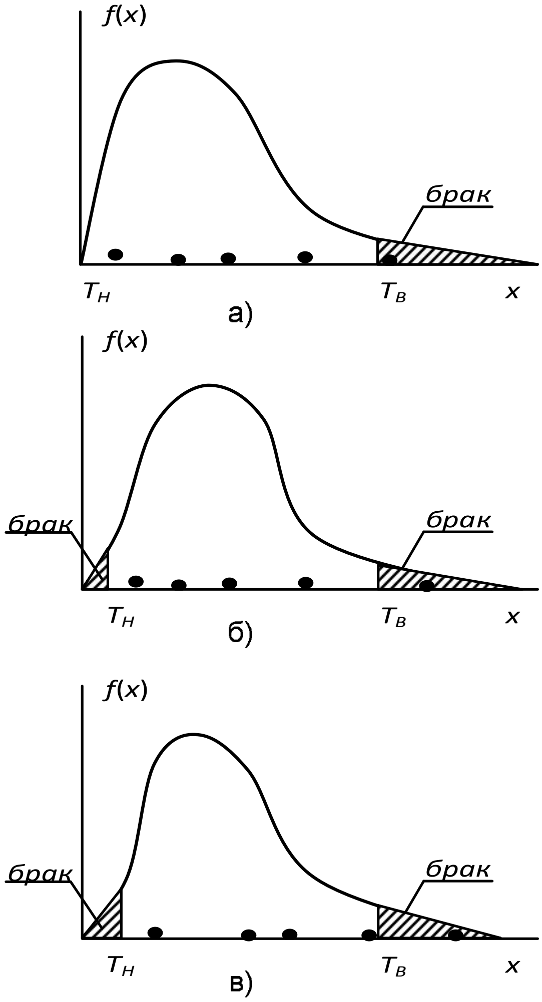

Рис. 1. Варианты расположения измерений при m=4 и υ=1
а) минимальный брак; б) наивероятнейший брак; в) максимальный брак

Таблица 1

Величины прогнозируемого брака (%) на пластине с пятью тестовыми ячейками ($n_э$=25)

Прогнозируемый брак	$\sqrt{\mu_2^*}$	Число измерений, не выходящих за пределы нормы, m										
		m=5			m=4				m=3			
		υ=1,0	υ=0,7	υ=0,5	υ=1,3	υ=1,0	υ=0,7	υ=0,5	υ=2,0	υ=1,0	υ=0,7	υ=0,5
Минимальный	Мин.	–	0,6	0,1	4,7	2,2	2,8	3,3	13,3	5,9	4,9	4,9
	Средн.	–	3,6	0,6	12,3	8,2	14,9	15,9	25,6	19,9	19,8	19,5
	Макс.	–	6,5	2,6	19,4	13,3	14,9	16,1	32,5	21,6	19,9	19,6
Наивероятнейший	Мин.	–	1,0	0,7	4,9	3,5	3,4	4,0	14,3	7,9	6,0	5,9
	Средн.	–	7,1	6,9	15,2	14,3	16,4	17,8	26,9	23,1	21,4	21,4
	Макс.	–	8,8	7,3	19,8	16,6	16,4	17,8	33,8	25,1	21,8	21,6
Максимальный	Мин.	2,2	1,9	2,3	6,6	6,1	3,5	4,7	14,7	9,4	8,0	6,4
	Средн.	8,0	11,9	13,5	19,7	20,6	16,6	19,3	27,8	25,3	24,7	22,2
	Макс.	13,1	12,2	13,6	22,9	21,9	16,6	19,3	34,2	27,3	25,3	22,5

Аналогичную таблицу можно привести для случая пластины с десятью тестовыми ячейками.

Для оценки выигрыша в точности прогнозирования брака (или для оценки снижения доли субъективных факторов в прогнозировании) необходимо сопоставить результаты расчетов по разным методам. С этой целью составим таблицу 2 – отношение прогнозируемого брака по трем методикам к прогнозируемому браку по ЭОХ с учетом распределения Вейбулла.

Выводы

Анализ таблицы 2 показал, что применение эквивалентной оперативной характеристики, полученной с учетом закона распределения Вейбулла, в 2,5-8,8 раз дает более точные результаты, чем действующие нормативы, в 1,05-5,30 раз более точные результаты, чем ЭОХ с учетом нормального закона распределения, в 1,25 раза более точные результаты, чем ЭОХ с учетом экспоненциального распределения (резко отличающиеся результаты: 16,8 в первом случае и 12,81 – во втором, во внимание не принимали как случайные отклонения). Таким образом, все предложенные методы оценки результатов контроля по выборкам малого объема, основанные на эквивалентных оперативных характеристиках с учетом законов распределения (особенно распределения Вейбулла), могут быть рекомендованы к внедрению в производство.

Литература

1. Долгов, А. Ю. Повышение эффективности статистических методов контроля и управления технологическими процессами изготовления микросхем [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.11.13 / Долгов Алексей Юрьевич. – М. : МГАПИ, 2000. – 217 с.

2. Долгов, Ю. А. Метод повышения точности вычисления параметров выборки малого объёма (метод точечных распределений) [Текст] / Ю. А. Долгов, А. Ю. Долгов, Ю. А. Столяренко // Вестн. Приднестр. гос. унт-та. – 2010. – Юб. вып. – С. 232–242.

3. Долгов, А. Ю. Повышение точности оценок параметров контрольной выборки малого объёма [Текст] / А. Ю. Долгов // Радіоелектронні і комп'ютерні системы. – 2012. – № 6 (58). – С. 119–123.

4. Долгов, А. Ю. Повышение точности оценок параметров контрольной выборки малого объёма при экспоненциальном законе распределения [Текст] / А. Ю. Долгов // Радіоелектронні і комп'ютерні системы. – 2013. – № 5(64). – С. 135–138.

5. Груничев, А. С. Таблицы для расчета надежности при распределении Вейбулла [Текст] / А. С. Груничев, А. И. Михайлов, Я. Б. Шор. – М. : Изд-во стандартов, 1974. – 64 с.

6. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников [Текст] / А. И. Кобзарь. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

7. Шор, Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности [Текст] / Я. Б. Шор, Ф. И. Кузьмин. – М. : Сов. радио, 1968. – 213 с.

8. Орлов, А. И. Распространенная ошибка при использовании критериев Колмогорова и омега-квадрат [Текст] / А. И. Орлов // Завод. лаб. – 1985. – Т. 51, № 1. – С. 60-62.

9. Долгов, Ю. А. Исследование интервальных оценок и моментов высшего порядка для выборок малого объема [Текст] / А. Ю. Долгов // Радіоелектронні і комп'ютерні системы. – 2012. – №5 (57). – С. 165 – 170.

10. Долгов, Ю. А. Определение объема эквивалентной выборки в методе точечных распределений [Текст] / А. Ю. Долгов // Радіоелектронні і комп'ютерні системы. – 2013. – №5 (64). – С. 139–141.

Таблица 2

Относительное уменьшение максимального брака (разы)

Прогнозируемый брак	СКО	Число измерений, не выходящих за пределы нормы, m										
		m=5			m=4				m=3			
		υ=1,0	υ=0,7	υ=0,5	υ=1,3	υ=1,0	υ=0,7	υ=0,5	υ=2,0	υ=1,0	υ=0,7	υ=0,5
По действующим нормативам	Мин.	–	8,83	16,58	3,96	5,22	3,89	2,94	2,56	3,22	3,01	2,58
	Средн.	–	6,56	5,09	3,88	4,20	3,59	2,75	2,50	2,81	2,82	2,46
	Макс.	5,30	4,75	3,42	3,35	3,20	3,60	2,62	2,50	2,62	2,49	2,48
По ЭОХ нормального закона	Мин.	–	5,28	12,81	1,84	2,65	2,30	2,07	1,11	1,63	1,73	1,70
	Средн.	–	3,90	4,56	1,80	2,13	2,09	1,88	1,07	1,41	1,58	1,55
	Макс.	2,68	2,81	2,46	1,55	1,63	2,07	1,73	1,05	1,30	1,36	1,49
По ЭОХ экспоненциального закона	Мин.	–	1,26	1,27	1,25	1,26	1,27	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
	Средн.	–	1,25	1,25	1,25	1,25	1,26	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25
	Макс.	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25

Поступила в редакцию 05.03.2014, рассмотрена на редколлегии 25.03.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю. П. Кодратенко, Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова, Николаев, Украина.

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ КОНТРОЛЬНОЇ ВИБІРКИ МАЛОГО ОБСЯГУ ПРИ РОЗПОДІЛІ ВЕЙБУЛЛА

О. Ю. Долгов

У завершуючій статті циклу запропоновано ще одне вирішальне правило вибіркового контролю – еквівалентну оперативну характеристику (ЕОХ), що базується на розподілі Вейбулла. Приведені розрахункові формули і дана таблиця оцінки точності обчислення прогнозованого браку по запропонованій методиці. Також представлена таблиця порівняльного аналізу точності всіх запропонованих раніше методів і нормативу, що діє. Доведено, що використання ЕОХ, що базується на розподілі Вейбулла, дає точніші (у 1,05÷5,30 разу) результати, ніж використання ЕОХ, що базуються на інших законах розподілу, і в 2,5÷8,8 разу точніше, ніж методи граничного контролю, що діють, по вибірках малого об'єму.

Ключові слова: вибірковий контроль, розподіл Вейбулла, еквівалентна оперативна характеристика.

INCREASE OF PARAMETR ESTIMATION ACCURACY OF CHECK SMALL SIZE SAMPLE WITH WEIBULL DISTRIBUTION

A. Y. Dolgov

In finishing article of a cycle one more decisive rule of selective control – the equivalent operational characteristic (EOC) which is based on the Weibull distribution. Settlement formulas are given and the table of an assessment of accuracy of calculation of predicted marriage by the offered technique is given. The table of the comparative analysis of accuracy of all offered before methods and the existing standard is also submitted. It is proved that use of EOH which is based on the Weibull distribution, gives more exact (by 1,05÷5,30 times) results, than use of EOH which are based on other laws of distribution, and 2,5÷8,8 times more precisely, than operating methods of boundary control on selections of small volume.

Key words: sample check, the Weibull distribution, equivalent operational characteristic.

Долгов Алексей Юрьевич – советник РАЕН, канд. техн. наук, доцент кафедры «Информационных технологий и автоматизированного управления производственными процессами» Приднестровского государственного университета им. Т. Г. Шевченко (ПГУ), Тирасполь, Приднестровье, e-mail: dolgov@ spsu.ru.