



УДК 517.9:532.5

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ, УСЛОЖНЕННЫХ МАССООБМЕНОМ (ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ)

КОЛОСОВА С.В., ЛАМТЮГОВА С.Н.,

СИДОРОВ М.В.

Рассматривается применение методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина к расчету задач внешнего обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью, усложненных массообменом.

1. Введение

Актуальность исследования. Задачи расчета вязких течений, усложненных массообменом, применяются в теплоэнергетике, химической и пищевой технологиях, гео- и астрофизических исследованиях, охране окружающей среды. Так, многие процессы химической технологии связаны с движением жидкости в технологическом оборудовании. При подготовке реагентов и выделении продуктов реакции такие операции, как выщелачивание, абсорбция, экстракция и перегонка, играют важную роль. Законы гидродинамики, тепло- и массопередачи существенны для всего технологического процесса. Процессы тепло- и массообмена также являются одними из основных в энергетике, а также в целом ряде технологических процессов металлургической и других отраслей промышленности. Кроме того, задачи массообмена тел с равномерным вязким потоком лежат в основе расчета многих технологических процессов, связанных с растворением, экстракцией, испарением, осаждением коллоидов [1].

В общем случае задача о стационарном массообмене тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения гидродинамического обтекания поверхности и уравнения для концентрации с соответствующими краевыми условиями на поверхности тела и вдали от него. Точно учесть геометрию области, а также краевые условия (в том числе и условие на бесконечности) можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2].

Метод R-функций в задачах гидродинамики использовался в работах [3–8], но рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [3] или же вязкой в ограниченных областях [4–7], или при наличии винтовой симметрии [8].

Метод R-функций для задач внешнего обтекания тел вязкой жидкостью использовался в работах [9,10], но задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью, усложненные массообменом, с исполь-

зованием метода R-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования и численного анализа внешних стационарных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости с учетом массообмена методом R-функций является актуальной научной проблемой.

Эта работа опирается на метод R-функций акад. В.Л. Рвачева [2] и его применение к расчету стационарных течений жидкости в бесконечных односвязных областях сложной геометрии [11].

Цели и задачи исследования. Целью данного исследования является разработка нового метода численного анализа задачи массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком. Этот метод основан на совместном применении метода последовательных приближений, структурного метода R-функций и проекционного метода Галеркина. В данной работе не обсуждается степень строгости, условия применимости использованных уравнений движения жидкости, они рассматриваются как математические модели, подлежащие численной алгоритмизации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- на основании методов теории R-функций построить полную структуру решения нелинейной краевой задачи для функции тока;
- заменить исходную нелинейную задачу последовательностью линейных краевых задач;
- для решения линейных задач на каждом шаге итерационного процесса разработать численный алгоритм на основании метода Галеркина;
- на основании методов теории R-функций построить полную структуру решения линейной краевой задачи для концентрации;
- для решения линейной задачи для концентрации разработать численный алгоритм на основании метода Галеркина.

2. Постановка задачи

Рассмотрим массообмен тела вращения с потоком вязкой несжимаемой жидкости. Считаем, что в пространстве введена декартова система координат (x, y, z) , а обтекаемое тело образовано вращением вокруг оси Oz фигуры Ω , лежащей в плоскости Oxz (фигура Ω односвязная, конечная и симметричная относительно оси Oz). Кроме того, предположим, что поток жидкости равномерный, его скорость равна U_∞ вдали от тела и он сонаправлен с осью Ox . Такие течения удобно рассматривать в сферической системе координат. В осесимметричных задачах в сферической системе координат r, θ, φ все величины не зависят от координаты φ и третья компонента скорости жидкости равна нулю: $v_\varphi = 0$. Тогда остальные две

компоненты скорости жидкости можно представить в виде [1, 12]

$$v_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (1)$$

где $\psi = \psi(r, \theta)$ – функция тока.

Процесс массопереноса описывается уравнением для концентрации [1]

$$\Delta c = \text{Pe}(\vec{v} \cdot \nabla)c, \quad (2)$$

здесь $c = c(r, \theta)$ – концентрация; Pe – число Пекле – безразмерный параметр, характеризующий меру отношения конвективного переноса растворенного в жидкости вещества к диффузионному переносу,

$$\Delta c = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right),$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)c = v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta}.$$

Подставив (1) в (2), для концентрации $c = c(r, \theta)$ получим следующую задачу:

$$\Delta c = \frac{\text{Pe}}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \text{вне } \bar{\Omega}, \quad (3)$$

$$c|_{\partial \Omega} = c_0, \quad (4)$$

$$c \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где c_0 – заданная концентрация на границе $\partial \Omega$ обтекаемого тела.

Функцию тока $\psi(r, \theta)$ можно найти, например, как решение следующей нелинейной задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью [13]:

$$v E^2 \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial E \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial E \psi}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(2 \text{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) E \psi \text{вне } \bar{\Omega}, \quad (6)$$

$$\psi|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial \Omega} = 0, \quad (7)$$

$$\psi \sim \frac{1}{2} U_\infty r^2 \sin^2 \theta \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где $E \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)$, $E^2 \psi = E(E \psi)$,

\mathbf{n} – внешняя к $\partial \Omega$ нормаль; $v = \text{Re}^{-1}$; Re – число Рейнольдса.

Итак, решение задачи (3) – (5) состоит из двух этапов:

1) нахождение функции тока как решения задачи (6) – (8);

2) решение задачи (3) – (5) для концентрации.

Для решения поставленных задач воспользуемся методом R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2]: с помощью конструктивных средств теории R-функций построим структуры решения краевых задач, т.е. пучки функций, точно удовлетворяющих краевым условиям.

3. Метод решения задачи для функции тока

Пусть вне $\bar{\Omega}$ известна достаточно гладкая функция $\omega(r, \theta)$, обладающая следующими свойствами:

1) $\omega(r, \theta) > 0$ вне $\bar{\Omega}$;

2) $\omega(r, \theta) = 0$ на $\partial \Omega$;

3) $\frac{\partial \omega(r, \theta)}{\partial \mathbf{n}} = -1$ на $\partial \Omega$,

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к $\partial \Omega$.

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $y = f_M(x)$ [11], удовлетворяющую следующим условиям:

а) $f_M(0) = 0$;

б) $f'_M(0) = 1$;

в) $f'_M(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$;

г) $f_M(x) \equiv 1 \quad \forall x \geq M$ ($M = \text{const} > 0$).

Условиям а) – г) удовлетворяет, например, функция

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp \frac{Mx}{x - M}, & 0 \leq x < M; \\ 1, & x \geq M. \end{cases}$$

Ясно, что такая $f_M(x) \in C^\infty[0, +\infty)$.

Обозначим

$$\omega_M(r, \theta) = f_M[\omega(r, \theta)]. \quad (9)$$

Функция $\omega_M(r, \theta)$ удовлетворяет условиям 1) – 3). Кроме того, $\omega_M(r, \theta) \equiv 1$, если $\omega(r, \theta) \geq M$. Это условие означает, что если функция $\omega(r, \theta)$ монотонно возрастает при удалении от $\partial \Omega$, то функция $\omega_M(r, \theta)$ вида (9) отлична от единицы лишь в некоторой кольцеобразной области $\{0 \leq \omega(r, \theta) < M\}$, содержащейся во внешности $\bar{\Omega}$ и прилегающей к $\partial \Omega$.

В работе [9] показано, что при любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot r^{-2} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$) краевым условиям (7) и условию на бесконечности (8) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2, \quad (10)$$

где $\psi_0 = \frac{1}{4} U_\infty (r - R)^2 \left(2 + \frac{R}{r} \right) \sin^2 \theta$ – решение Стокса для задачи обтекания сферы радиуса R (считаем, что сфера радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела $\bar{\Omega}$).

Для решения задачи (6) – (8) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть начальное приближение $\psi^{(0)}$ задано. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}$ можно взять, например, решение соответствующей линеаризованной задачи (приближение Стокса) [10].

Если i -е приближение $\psi^{(i)}$ построено, то новое $(i+1)$ -е приближение $\psi^{(i+1)}$ находим как решение линейной задачи:

$$\nu E^2 \psi^{(i+1)} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \theta} \frac{\partial E \psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} \frac{\partial E \psi^{(i)}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial \theta} \right) E \psi^{(i)} \text{ вне } \bar{\Omega}, \quad (11)$$

$$\psi^{(i+1)} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(i+1)}}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (12)$$

$$\psi^{(i+1)} \sim \frac{1}{2} U_{\infty} r^2 \sin^2 \theta \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (13)$$

В соответствии с (10) структура решения задачи (11) – (13) имеет вид

$$\psi^{(i+1)} = \omega_M^2 \Phi_1^{(i+1)} + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2^{(i+1)}.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ воспользуемся методом Галеркина [14].

Известно [12, 15], что общее решение уравнения $E^2 \psi = 0$ при отсутствии в физической постановке сингулярностей может быть записано в виде

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n} \right) J_n(\cos \theta), \quad (14)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n – произвольные постоянные; $J_n(\zeta)$ – функции Гегенбауэра первого рода. Представлением (14) воспользуемся для выбора координатных последовательностей.

Для аппроксимации неопределенной компоненты $\Phi_1^{(i+1)}$ воспользуемся функциями системы

$$\left\{ r^{-1} J_2(\cos \theta), r^{-1} J_4(\cos \theta), r^{-2} J_3(\cos \theta), r^{-2} J_5(\cos \theta), \dots, r^{-n} J_{n+1}(\cos \theta), r^{-n} J_{n+3}(\cos \theta), \dots \right\}, \quad (15)$$

а для аппроксимации неопределенной компоненты $\Phi_2^{(i+1)}$ воспользуемся функциями системы

$$\left\{ J_3(\cos \theta), r J_2(\cos \theta), r^2 J_2(\cos \theta), r^4 J_2(\cos \theta), r^3 J_3(\cos \theta), r^5 J_3(\cos \theta), \dots, r^n J_n(\cos \theta), r^{n+2} J_n(\cos \theta), \dots \right\}. \quad (16)$$

Итак, функции $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ представим в виде

$$\Phi_1^{(i+1)} \approx \Phi_{1, m_1}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n^{(i+1)} \tau_n,$$

$$\Phi_2^{(i+1)} \approx \Phi_{2, m_2}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_{n+m_1}^{(i+1)} \tau_{n+m_1},$$

где $\tau_1, \dots, \tau_{m_1}$ – первые m_1 функций системы (15), а $\tau_{m_1+1}, \dots, \tau_{m_1+m_2}$ – первые m_2 функций системы (16).

Тогда

$$\psi^{(i+1)} \approx \psi_N^{(i+1)} = \omega_M^2 \Psi_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_n^{(i+1)} \varphi_n, \quad (17)$$

где $N = m_1 + m_2$,

$$\varphi_1 = \omega_M^2 \tau_1, \dots, \varphi_{m_1} = \omega_M^2 \tau_{m_1},$$

$$\varphi_{m_1+1} = \omega_M^2 (1 - \omega_M) \tau_{m_1+1}, \dots,$$

$$\varphi_N = \omega_M^2 (1 - \omega_M) \tau_{m_1+m_2}.$$

Таким образом, построенные функции φ_n образуют координатную последовательность.

Коэффициенты $\alpha_1^{(i+1)}, \dots, \alpha_N^{(i+1)}$ найдем из условия ортогональности невязки, полученной после подстановки функции (17) в уравнение (11), к системе функций

$$\{\omega_M^2(r, \theta) r^{1-k} J_k(\cos \theta), k = 2, 3, \dots;\}$$

$$\{\omega_M^2(r, \theta) r^{3-k} J_k(\cos \theta), k = 4, 5, \dots;\}$$

$$\{\omega_M^2(r, \theta) r J_2(\cos \theta), \omega_M^2(r, \theta) J_3(\cos \theta),\}$$

$$\{\omega_M^2(r, \theta) r^j J_j(\cos \theta), \omega_M^2(r, \theta) r^{j+2} J_j(\cos \theta), j = 2, 3, \dots\}.$$

Это приводит к необходимости решения системы линейных уравнений относительно $\alpha_1^{(i+1)}, \dots, \alpha_N^{(i+1)}$.

Итерации следует прекратить, когда $\|\psi^{(i+1)} - \psi^{(i)}\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число.

4. Метод решения задачи для концентрации

Подставив найденную функцию тока в уравнение (3), решим задачу (3) – (5) также методом R-функций.

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Ψ_1 и Ψ_2 ($\Psi_1 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$) краевым условиям (4) и (5) точно удовлетворяет функция вида

$$c = c_0 (1 - \omega_M) + \omega_M \Psi_1 + \omega_M (1 - \omega_M) \Psi_2.$$

Для аппроксимации неопределенных компонент Ψ_1 и Ψ_2 также воспользуемся методом Галеркина [14].

Для аппроксимации неопределенной компоненты Ψ_1 воспользуемся функциями полной системы частных решений уравнения Лапласа относительно области $\{\omega(r, \theta) > 0\}$:

$$\left\{ r^n P_n^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots \right\}, \quad (18)$$

а для аппроксимации неопределенной компоненты Ψ_2 воспользуемся функциями полной системы

частных решений уравнения Лапласа относительно области $\{\omega(r, \theta) < M\}$:

$$\{r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta), m = 0, 1, 2, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (19)$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра.

Итак, функции Ψ_1 и Ψ_2 представим в виде

$$\Psi_1 \approx \Psi_{1, m_3} = \sum_{k=1}^{m_3} \beta_k \gamma_k,$$

$$\Psi_2 \approx \Psi_{2, m_4} = \sum_{k=1}^{m_4} \beta_{k+m_3} \gamma_{k+m_3},$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_{m_3}$ – первые m_3 функций системы (18),

а $\gamma_{m_3+1}, \dots, \gamma_{m_3+m_4}$ – первые m_4 функций системы (19).

Тогда

$$c \approx c_K = c_0 (1 - \omega_M) + \sum_{k=1}^K \beta_k \phi_k, \quad (20)$$

где $K = m_3 + m_4$,

$$\phi_1 = \omega_M \gamma_1, \dots, \phi_{m_3} = \omega_M \gamma_{m_3},$$

$$\phi_{m_3+1} = \omega_M (1 - \omega_M) \gamma_{m_3+1}, \dots,$$

$$\phi_K = \omega_M (1 - \omega_M) \gamma_{m_3+m_4}.$$

Коэффициенты β_1, \dots, β_K найдем из условия ортогональности невязки, полученной после подстановки функции (20) в уравнение (3), к первым m_3 функциям системы (18) и к первым m_4 функциям системы (19).

Это приводит к необходимости решения системы линейных уравнений относительно β_1, \dots, β_K .

Таким образом, мы получим приближенное решение задачи (3) – (5).

5. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и эллипсоида

вращения $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ при $c_0 = 1, M=5$, раз-

ных числах Рейнольдса и Пекле. На рис. 1 – 6 приведены линии концентрации для сферы, на рис. 7 – 12 – для эллипсоида вращения.

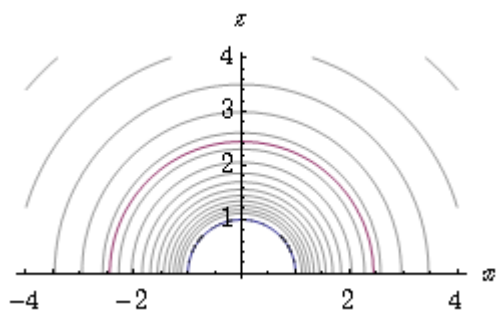


Рис. 1. Линии концентрации для сферы для $Re = 0$ и $Pe = 0$

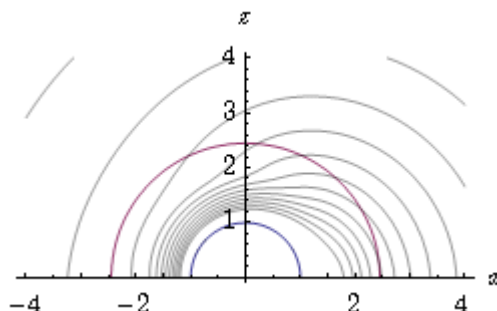


Рис. 2. Линии концентрации для сферы для $Re = 0$ и $Pe = 10$

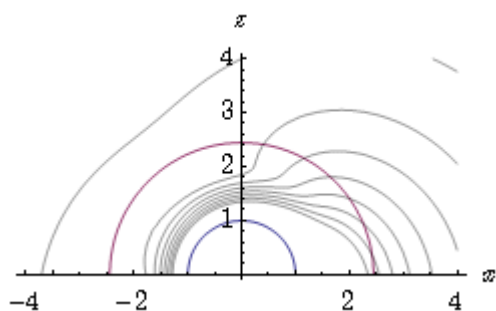


Рис. 3. Линии концентрации для сферы для $Re = 0$ и $Pe = 20$

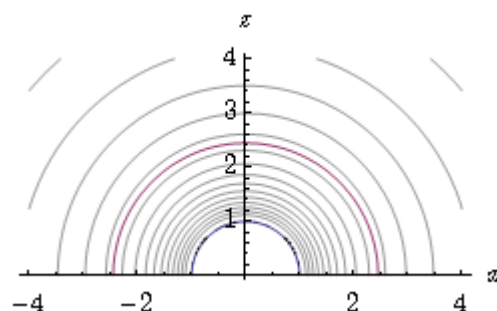


Рис. 4. Линии концентрации для сферы для $Re = 25$ и $Pe = 0$

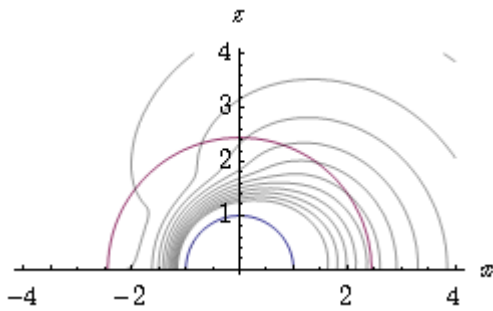


Рис. 5. Линии концентрации для сферы для $Re = 25$ и $Pe = 10$

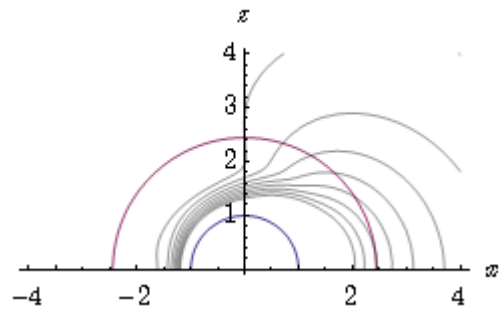


Рис. 6. Линии концентрации для сферы для $Re = 25$ и $Pe = 20$

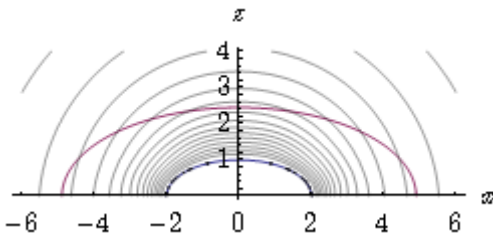


Рис. 7. Линии концентрации для эллипсоида для $Re = 0$ и $Pe = 0$

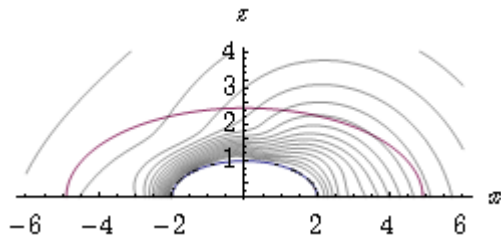


Рис. 8. Линии концентрации для эллипсоида для $Re = 0$ и $Pe = 10$

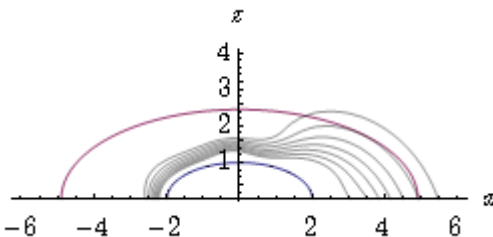


Рис. 9. Линии концентрации для эллипсоида для $Re = 0$ и $Pe = 20$

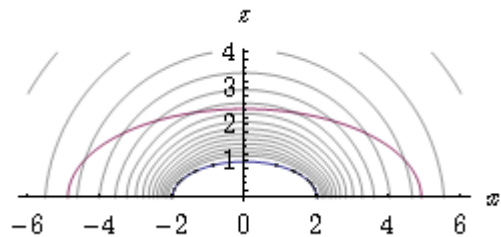


Рис. 10. Линии концентрации для эллипсоида для $Re = 30$ и $Pe = 0$

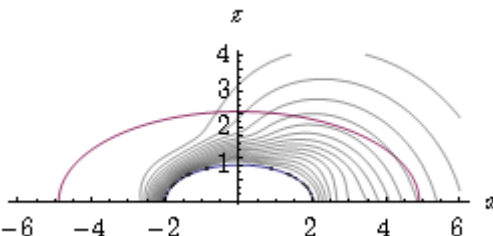


Рис. 11. Линии концентрации для эллипсоида для $Re = 30$ и $Pe = 10$

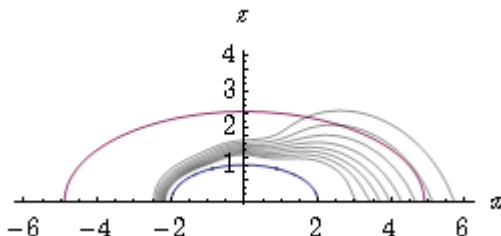


Рис. 12. Линии концентрации для эллипсоида для $Re = 30$ и $Pe = 20$

Выводы

Впервые предложен численный метод расчета массообмена тела вращения с равномерным поступательным потоком, основанный на совместном применении методов последовательных приближений, R-функций и Галеркина, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает все краевые условия задачи, в том числе и условие на бесконечности. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных технологических и физико-механических процессов.

Сказанное выше и определяет *научную новизну и практическую значимость* полученных результатов.

Литература: 1. Кутепов А.М., Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А. Химическая гидродинамика: Спр. пос. М.: Квантум, 1996. 336 с. 2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 3. Колосова С.В. Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07 Вычислительная математика. Харьков: ХИРЭ, 1972. 85 с. 4. Колосова С.В., Сидоров М.В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. 2003. № 602. С. 61 – 67.

5. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. Харьков, 2004. № 31. С. 141 – 148. 6. Тевяшев А.Д., Гибкина Н.В., Сидоров М.В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. 2007. № 2. С. 50 – 57. 7. Суворова И.Г., Кравченко О.В., Баранов И.А. Математическое и компьютерное моделирование осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода R-функций // Мат. методы та фіз.-мех. поля. 2011. 54, № 2. С. 139 – 149. 8. Максименко-Шейко К.В. Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций // Доп. НАН України. 2005. № 9. С. 41 – 46. 9. Ламтюгова С.М., Сидоров М.В. Застосування методу R-функцій до розрахунку зовнішніх повільних течій в'язкої рідини // Відбір та обробка інформації. 2012. № 36 (112) С. 56 – 62. 10. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2012. №1. С. 112 – 122. 11. Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л. Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. 1972. № 9. С. 837 – 839. 12. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с. 13. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 432 с. 14. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутцкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 420 с. 15. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 576 с.

Поступила в редколлегию 14.03.2014

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Колосова Светлана Васильевна, канд. физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы математической физики. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Ламтюгова Светлана Николаевна, аспирантка каф. прикладной математики ХНУРЭ, ассистентка каф. высшей математики ХНУГХ им. А.Н. Бекетова. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.