

**РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ, РАБОТАЮЩИХ НА ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ**

**CALCULATION OF THE FLEXURAL-TORSIONAL CONCRETE  
STRUCTURES SERVICEABILITY**

**Семенюк С.Д.**, д.т.н., зав. кафедрой, **Москалькова Ю.Г.**, к.т.н., доц. (Белорусско-Российский университет, г. Могилев, Республика Беларусь), **Босаков С.В.**, д.т.н., проф. (РУП «Институт «БелНИИС», г. Минск, Республика Беларусь)

**Semenyuk S.D.**, doctor of technical sciences, head of department, **Moskalkova Y.G.**, candidate of technical sciences, assistant of professor (Belarusian-Russian University, Mogilev, the Republic of Belarus), **Bosakov S.V.**, doctor of technical sciences, professor (Institute BelNIIS , Minsk, the Republic of Belarus)

**В статье представлены особенности расчета железобетонных конструкций, работающих на изгиб с кручение, на примере расчета фундамента под бумагоделательную машину.**

**The article presents the features of calculation of reinforced concrete structures, working in bending with torsion, the example of the calculation of the foundation under the paper machine.**

**Ключевые слова:**

Кручение, изгиб, фундамент, железобетон.  
Torsion, bending, foundations, reinforced concrete.

В железобетонных конструкциях кручение элементов в чистом виде почти не встречается, но в сочетании с изгибом – весьма часто. В сравнении с изгибом сопротивление железобетонных элементов кручению существенно меньше. Поэтому в ряде конструкций, несмотря на относительно небольшие по абсолютному значению крутящие моменты, влияние их необходимо учитывать [1].

В любом конструктивном элементе, работающем на изгиб, возникает кручение за счет случайного эксцентриситета, обусловленного асимметрией сечения, неоднородностью материалов или внецентренным приложением вертикальной нагрузки.

При кручении железобетонного элемента в нем возникают главные сжимающие и главные растягивающие напряжения, направленные под углом  $45^\circ$  к продольной оси. Появление трещин и их наклон обусловлены интенсивностью и направлением главных растягивающих напряжений. В элементе, подверженном кручению, трещины расположены по винтообразным линиям. Они появляются на ранних стадиях загрузки. После образования трещин усилия в направлении главных растягивающих напряжений воспринимает арматура, а усилия в направлении главных сжимающих напряжений — бетон. Разрушение элемента начинается, когда в растянутой арматуре появляются значительные неупругие удлинения. Изгиб, сопровождаемый кручением, вызывает в железобетонном элементе прямоугольного сечения разрушение по одной из пространственных трещин, противоположные концы пространственной трещины, проходящей по трем сторонам элемента, близко подходят к сжатой зоне, расположенной у четвертой стороны.

В данной статье рассматривается вариант упрощенного расчета монолитных ригелей фундамента Ф03 под бумагоделательную машины на «Объекте по производству бумаги-основы для декоративных облицовочных материалов производительностью 30 тыс. тонн/год» в г. Шклове.

Фундамент выполнен из монолитного железобетона, имеет размеры в осях  $23,5 \times 3,6$  м. Колонны запроектированы сечением  $600 \times 800$  мм, балки —  $600 \times 1200$  мм. Поперечное сечение монолитных балок показано на рисунке 1.

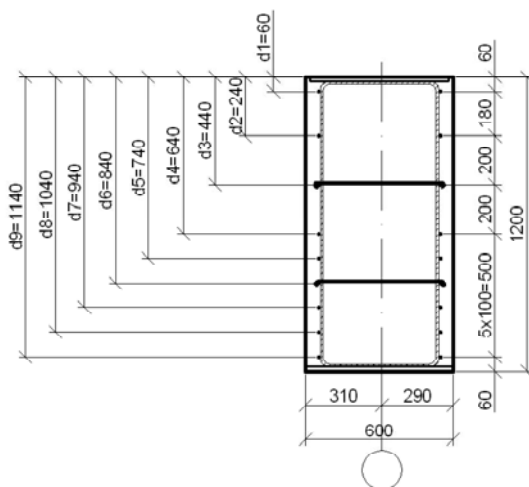


Рис. 1. Проектное поперечное сечение монолитной балки

Исходные данные для расчета. Условный класс бетона  $C' 24,8/31,0$ . Продольная арматура —  $18\text{Ø}25$  класса S500. Поперечная арматура —  $\text{Ø}12$  мм

класса S500, установлена с шагом 200 мм. Хомуты (вертикальные стержни) сопряжены с П-образными стержнями на глубину 610 мм с шагом 200 мм. Для восприятия поперечной силы балка армирована стержнями Ø25 класса S500 длиной 1160 мм. Требуется определить несущую способность балки при совместном действии крутящего и изгибающего моментов.

Деформативные и прочностные характеристики бетона и арматуры монолитной балки определены с учетом требований Eurocod 2 [2].

Для продольной арматуры:

площадь поперечного сечения продольной арматуры  $A_{st} = 491 \text{ мм}^2$  (1Ø25 мм);

нормативное сопротивление продольной арматуры  $f_{yk} = 500 \text{ МПа}$  (согласно проектным данным);

расчетное сопротивление продольной арматуры:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{g_s} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ МПа};$$

модуль упругости арматурной стали  $E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Для поперечной арматуры:

площадь поперечного сечения хомутов  $A_{sw} = 131,1 \text{ мм}^2$  (1Ø12 мм);

шаг хомутов  $s = 200 \text{ мм}$ ;

расчетное сопротивление поперечной арматуры  $f_{ywd} = 348 \text{ МПа}$ ;

модуль упругости  $E_{sw} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Для монолитного бетона:

нормативное сопротивление сжатию  $f_{ck} = 24,8 \text{ МПа}$ ;

расчетное сопротивление сжатию:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{24,8}{1,5} = 16,5 \text{ МПа};$$

среднее значение сопротивления бетона растяжению:

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3} = 0,3 \cdot 24,8^{2/3} = 2,55 \text{ МПа};$$

нормативное сопротивление бетона растяжению:

$$f_{ctk,0.05} = 0,7 f_{ctm} = 0,7 \cdot 2,55 = 1,79 \text{ МПа};$$

расчетное сопротивление бетона растяжению:

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,0.05}}{\gamma_c} = \frac{1,79}{1,5} = 1,19 \text{ МПа};$$

расчетный модуль упругости бетона:

$$E_{cd} = 22 \cdot \left( \frac{f_{cd}}{10} \right)^{0,3} = 22 \cdot \left( \frac{16,5}{10} \right)^{0,3} = 25,6 \text{ ГПа}.$$

Определяем коэффициент пластичности бетона:

$$\lambda_c = 0,93 - 0,014 \cdot f_{cd} = 0,93 - 0,014 \cdot 16,5 = 0,699.$$

Отношение модулей упругости:

$$\alpha_m = \frac{E_s}{E_{cd}} = \frac{2 \cdot 10^5}{25,6 \cdot 10^3} = 7,82.$$

Граничная высота сжатой зоны:

$$x_{\text{lim}} = \frac{\alpha_m \cdot f_{cd} \cdot d_0}{\alpha_m \cdot f_{cd} + f_{yd} \cdot (1 - \lambda_c)} = \frac{7,82 \cdot 16,5 \cdot 1140}{7,82 \cdot 9,67 + 435 \cdot (1 - 0,699)} = 712,13 \text{ мм.}$$

Ширина сжатой зоны от действия изгибающего М и крутящего Т моментов:

$$b_r = \sqrt{b^2 + c_1^2} = \sqrt{600^2 + 3000^2} = 3059,4 \text{ мм,}$$

где b = 600 мм – ширина поперечного сечения балки;

$$c_1 = (2h + b) \cdot \text{ctg} \beta = (2 \cdot 1200 + 600) \cdot \text{ctg} 45^\circ = 3000 \text{ мм} \quad \text{– проекция отрезка нейтральной оси на продольную ось элемента.}$$

$$\cos \alpha = \frac{c_1}{b_r} = \frac{3000}{3059,4} = 0,9806;$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{b_r} = \frac{600}{3059,4} = 0,1961.$$

При расчете пространственных сечений железобетонных балок примеры расчётов показывают, что высоты сжатых зон имеют почти всегда незначительную высоту и, как правило, не превышают величины защитных слоёв бетона. Поэтому при таких высотах сжатых зон моментами от усилий в бетоне, а также от усилий в сжатой арматуре можно пренебречь. Плечи внутренних пар без большого ущерба для точности могут быть приняты равными:

$$Z_1 = d - c' = h_2 = 1140 - 60 = 1080 \text{ мм;}$$

$$Z_2 = b - 2 \cdot a = b_2 = 600 - 2 \cdot 60 = 480 \text{ мм.}$$

Усилие в горизонтальных ветвях хомутов, пересекаемых трещиной:

$$F_{1w} = f_{ywd} \cdot \frac{A_{sw}}{S} \cdot Z_2 = 348 \cdot \frac{113,1}{200} \cdot 480 \cdot 10^{-3} = 94,5 \text{ кН.}$$

Трещина пересекает три хомута, следовательно, усилие, приходящееся на один хомут, составит:  $94,5/3 = 31,5 \text{ кН.}$

Усилие в вертикальных ветвях хомута с одной стороны:

$$F_{2w} = f_{ywd} \cdot \frac{A_{sw}}{S} \cdot Z_1 = 348 \cdot \frac{113,1}{200} \cdot 1080 \cdot 10^{-3} = 212,5 \text{ кН.}$$

Трещина пересекает семь хомутов, следовательно, усилие, приходящееся на один хомут, составит:  $212,5/7 = 30,4 \text{ кН.}$

Крутящий момент, воспринимаемый горизонтальными ветвями хомутов:

$$T_{1w} = F_{1w} \cdot Z_1 = 94,5 \cdot 1,080 = 102,06 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Крутящий момент, воспринимаемый вертикальными ветвями хомутов:

$$T_{2w} = F_{2w} \cdot Z_1 = 212,5 \cdot 0,500 = 106,25 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Суммарный крутящий момент, воспринимаемый хомутами:

$$T_w = T_{1w} + T_{2w} = 102,06 + 106,25 = 208,31 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Максимальные касательные напряжения от крутящего момента в середине высоты сечения балки:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{T_w}{\alpha \cdot h \cdot b^2} = \frac{208,3 \cdot 10^6}{0,246 \cdot 1200 \cdot 600^2} = 1,96 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения от крутящего момента посередине ширины балки:

$$\tau_B = \eta \cdot \tau_{\max} = 0,795 \cdot 1,96 = 1,55 \text{ МПа}.$$

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\eta$  приняты из справочника по сопротивлению материалов [3].

Если рассматривать границы ядра сечения, тогда максимальные касательные напряжения посередине вертикальных хомутов:

$$\tau_{2w} = \frac{208,3 \cdot 10^6}{0,25 \cdot 1080 \cdot 500^2} = 3,09 \text{ МПа}.$$

Касательные напряжения посередине горизонтальных хомутов:

$$\tau_{1w} = 0,785 \cdot 3,09 = 2,42 \text{ МПа}.$$

Чтобы предотвратить возникновение трещин от воздействия крутящего момента, исходя из значения нормативной прочности бетона монолитной балки Б11 на растяжение максимальный крутящий момент, приходящийся на балку, не должен превышать

$$T_{Rw} = \frac{f_{ctk,0.05}}{\tau_{\max}} \cdot T_w = \frac{1,79}{1,96} \cdot 208,3 = 190,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Все железобетонные элементы прямоугольного сечения, работающие на кручение или изгиб с кручением, во избежание разрушения бетона от сжатия между спиральными трещинами должны отвечать условию:

$$T_w \leq 0,1 f_{cd} h b^2.$$

$$208,3 \text{ кН} \cdot \text{м} < 0,1 \cdot 16,5 \cdot 1200 \cdot 600^2 \cdot 10^{-6} = 712,8 \text{ кН} \cdot \text{м} - \text{условие выполняется.}$$

С учётом упругопластической модели сопротивления сечений и принимая во внимание, что высота сжатой зоны не превышает 60 мм при кручении с изгибом, запишем условие прочности в расчетном предельном состоянии, приняв  $x_c = 60$  мм:

$$\Sigma (\sigma_{si} \cdot A_{s1} \cdot Z_i) \cdot \sin \alpha + \Sigma \left( f_{ywd} \cdot A_{svi} \cdot \frac{b \cdot ctg \beta}{S} \cdot \cos \alpha \cdot Z_{vi} \right) \geq M \cdot \sin \alpha + T \cdot \cos \alpha,$$

$$Z_i = d_i - \frac{x_c \cdot (\lambda_c^2 + \lambda_c + 1)}{3 \cdot (\lambda_c + 1)}; \quad \sigma_{si} = \frac{\alpha_m \cdot f_{cd} \cdot (d_i - x_c)}{(1 - \lambda_c) \cdot x_c} \cdot \sin \alpha.$$

где

Получаем

$$Z_1 = 60 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 34,3 \text{ мм};$$

$$\sigma_{s1} = \frac{9,15 \cdot 16,5 \cdot (60 - 60)}{(1 - 0,699) \cdot 60} \cdot 0,1961 = 0;$$

$$Z_2 = 240 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 214,3 \text{ мм};$$

$$\sigma_{s2} = \frac{9,15 \cdot 16,5 \cdot (60 - 60)}{(1 - 0,699) \cdot 60} \cdot 0,1961 = 252,3 \text{ МПа};$$

$$Z_3 = 440 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 414,3 \text{ мм};$$

$$\sigma_{s3} = \frac{9,15 \cdot 16,5 \cdot (60 - 60)}{(1 - 0,699) \cdot 60} \cdot 0,1961 = 532,6 \text{ МПа};$$

$$Z_4 = 640 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 614,3 \text{ мм};$$

$$\sigma_{s4} = \frac{9,15 \cdot 16,5 \cdot (60 - 60)}{(1 - 0,699) \cdot 60} \cdot 0,1961 = 812,8 \text{ МПа};$$

$$Z_5 = 740 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 714,3 \text{ мм};$$

$$\sigma_{s5} = \frac{9,15 \cdot 16,5 \cdot (60 - 60)}{(1 - 0,699) \cdot 60} \cdot 0,1961 = 953,0 \text{ МПа};$$

$$Z_6 = 740 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 814,3 \text{ мм};$$

$$Z_7 = 940 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 914,3 \text{ мм};$$

$$Z_8 = 1040 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 1014,3 \text{ мм};$$

$$Z_9 = 1140 - \frac{60 \cdot (0,699^2 + 0,699 + 1)}{3 \cdot (0,699 + 1)} = 1114,3 \text{ мм}.$$

Для дальнейших вычислений принимаем:

$$\sigma_{s1} = 0;$$

$$\sigma_{s2} = 252,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{s3} = \sigma_{s4} = \sigma_{s5} = \sigma_{s6} = \sigma_{s7} = \sigma_{s8} = \sigma_{s9} = 435 \text{ МПа}.$$

$$A_{s1} = A_{s2} = A_{s3} = A_{s4} = A_{s5} = A_{s6} = A_{s7} = A_{s8} = A_{s9} = 982 \text{ мм}^2 \text{ (}\varnothing 25 \text{ мм)}$$

$$\Sigma(\sigma_{st} \cdot A_{s1} \cdot Z_i) \cdot \sin \alpha + \Sigma \left( f_{ywd} \cdot A_{swt} \frac{b \cdot ctg \beta}{S} \cdot \cos \alpha \cdot Z_{wi} \right) = 861,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отсюда получаем

$$M_{Rd} \cdot \sin \alpha + T_{Rd} \cdot \cos \alpha = 861,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$T_{Rd} = T_w = 208,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , тогда

$$M_{Rd} = \frac{861,6 - T_{Rd} \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{861,6 - 208,3 \cdot 0,9806}{0,1961} = 3352,02 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, при совместном воздействии крутящих и изгибающих моментов несущая способность монолитной железобетонной балки составляет 861 кН·м.

Расчет усилий от внешних нагрузок для балок Б11 и Б12 выполнен в программном комплексе «Лира 9.6» в соответствии с результатами обследования (рис. 2). По результатам расчета установлено, что максимальный крутящий момент, возникающий от действия внешних нагрузок, составляет  $T_{Ed} = 162 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Затружение 1

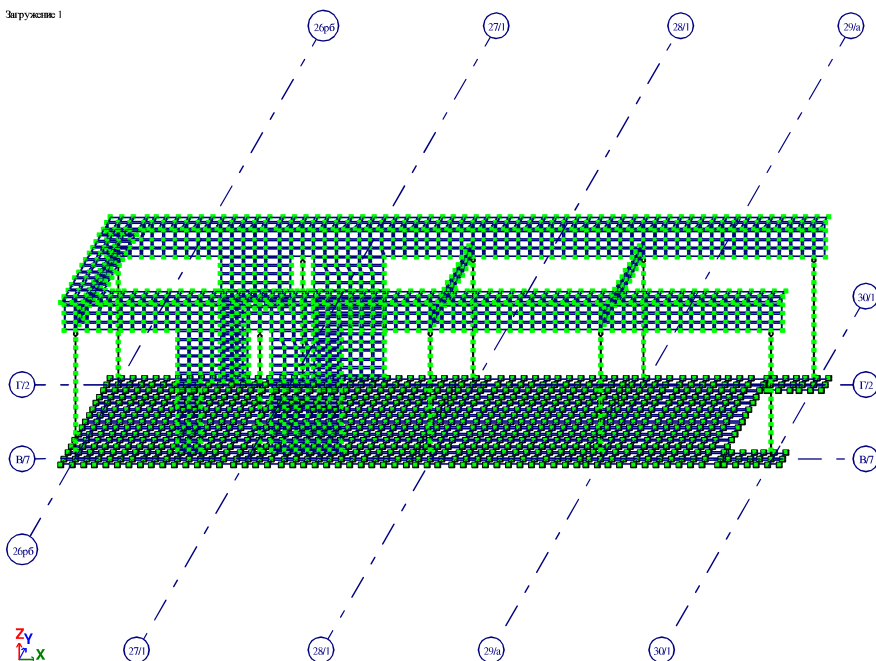


Рис. 2. Конечно-элементная модель фундамента Ф03 под бумагоделательную машину

При угле наклона спиральной трещины  $\theta \approx 45^\circ$  вычисляем предельный крутящий момент, который может быть воспринят бетонными подкосами:

$$T_{Rd,max} = 2\nu\alpha_{cw}f_{cd}A_k t_{ef,i} \sin\theta \cos\theta =$$

$$= 2 \cdot 0,54 \cdot 1 \cdot 16,5 \cdot (480 \cdot 1080) \cdot 60 \cdot \sin 45 \cos 45 \cdot 10^{-6} = 277,1 \text{ кН}\cdot\text{м} > T_{Ed} = 162 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{где } \nu = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{24,8}{250}\right) = 0,54;$$

$$t_{ef,i} = \min \left\{ \frac{A}{u}, \min \left\{ \frac{1200 \cdot 600}{(1200 + 600) \cdot 2} = 200 \text{ мм}, \right. \right. \\ \left. \left. 2 \cdot 30 = 60 \text{ мм} \right. \right\} = 60 \text{ мм}.$$

В результате расчета установлено, что для поперечной арматуры и бетонных подкосов условие прочности элемента на кручение удовлетворяется.

**Таким образом,** упрощенная методика расчета позволяет с достаточной точностью оценить несущую способность железобетонных элементов, работающих на кручение с изгибом, с учетом принятого армирования и фактических характеристик бетона и арматуры.

1. Мурашев, В.И. Железобетонные конструкции / В.И. Мурашев, Э.Е. Сигалов, В.Н. Байков. – М.: Госстройиздат, 1962. – 658 с.
2. ТКП EN 1992-1-1-2009 (02250) Еврокод 2. Проектирование железобетонных конструкций. Ч. 1-1. Общие правила и правила для зданий. – Минск: М-во архит. и строит. РБ, 2010. – 191 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 540 с.