

РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ДИФРАКЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

УДК 621.371.162

А. С. БРЮХОВЕЦКИЙ

Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова НАН Украины,
ул. Ак. Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина
E-mail: bryu@ire.kharkov.ua

ПЕРЕХОД ОТ БЛИЖНЕЙ К ДАЛЬНЕЙ ЗОНЕ В ДВУХПОЗИЦИОННОМ РАССЕЯНИИ ВОЛН СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Для случая двухпозиционного рассеяния волн статистически неровной поверхностью найдены асимптотики двукратных интегралов от осциллирующих функций, определяющих временную корреляционную функцию рассеянного поля. Для невырожденного рассеяния (гессиан фазы отличен от нуля) использован метод стационарной фазы. Для вырожденного (гессиан равен нулю) – комбинированный метод: метод стационарной фазы по одной переменной и приближенное дифракции Фраунгофера по другой. Установлена связь с известными в литературе результатами расчетов.

Ключевые слова: рассеяние волн, интеграл от осциллирующей функции, стационарная фаза, френелевская зона, дифракция Фраунгофера

1. Введение

Настоящая работа продолжает ранее начатые автором исследования [1, 2] применительно к общему случаю двухпозиционного рассеяния волн статистически неровной поверхностью S , размеры которой L достаточно произвольны по отношению к радиусу кривизны волновых фазовых фронтов.

Рассеяние волн статистически неровной поверхностью интенсивно изучается уже более полувека, однако теоретическое описание некоторых аспектов этого явления и до сих пор оставляет желать лучшего. Хотя многие из работ содержат в своих названиях слова “теория рассеяния...”, их по праву можно отнести лишь к тем, в которых известна функция Грина соответствующей задачи для “средней” поверхности (бесконечные плоскость и круговой цилиндр, сфера).

Для практических расчетов используют модификацию решения задачи рассеяния бесконечной шероховатой плоскостью на случай рассеяния шероховатой плоской поверхностью S больших

(по сравнению с длиной волны λ), но конечных размеров L . Суть этой модификации состоит в замене бесконечных пределов интегрирования соответствующих интегралов на конечные. Такой метод является эвристическим, аналогичным методу Кирхгофа. Достоинства и недостатки его уже обсуждались в [2]. Практическая реализация вычислений в этом методе связана с непростой задачей асимптотической оценки многомерных интегралов от осциллирующих функций по конечной области интегрирования. Авторы имеющихся работ с целью максимального упрощения процедуры расчетов прибегают к различного рода допущениям, среди которых предположение о возможности линейной аппроксимации фазы в интегральном представлении корреляционной функции и замена пределов интегрирования на бесконечные являются общими [3–5]. Может быть и негласно принимаемое предположение о возможности механического смешения фрагментов совершенно различных задач. Так, в работах [4, 5] (и многих других!) удельная эффективная площадь из решения задачи рассеяния плоской волны бесконечной шероховатой плоскостью подставляется в уравнение радиолокации

для описания рассеяния площадкой конечных размеров, освещаемой в пределах диаграммы направленности локатора сферической волной.

“В действительности эффективная площадь является лишь удобной математической величиной” ([6], с. 36, с. 436), придающей уравнению радиолокации феноменологический характер, и сама она должна определяться решением соответствующей задачи рассеяния.

Существенным недостатком работ, в основе которых лежат вышеуказанные допущения, является то, что их решения для случая “малой” рассеивающей площадки не переходят в решение, которое получается на основе апробированного приближения дифракции Фраунгофера, о чем упоминалось уже ранее [1, 2]. Указанные причины являются мотивацией к исследованию рассеяния с учетом сферичности волн в пределах рассеивающей площадки.

Если ограничение линейным разложением фазы в вычисляемых интегралах приводит к необходимости оценки интегралов Фурье, процедуре относительно простой и хорошо изученной ([7], с. 60), то учет сферичности фазовых фронтов связан с более общим методом асимптотической оценки – методом стационарной фазы (МСФ), усложненным многократностью интеграла, наличием границ, каустик и т. д. Поставим целью настоящей работы исследование этим методом двухпозиционного рассеяния волн статистически неровной поверхностью. Проводя необходимые вычисления, будем придерживаться двух условий: во-первых, интересующие нас асимптотики должны иметь аналитический вид; во-вторых, в случае “малой” рассеивающей площадки решение должно переходить в то, которое получается в приближении дифракции Фраунгофера.

2. Интегральные представления корреляционной функции $B(\tau)$ и частотного спектра $S(\omega)$ рассеянного поля

Ранее было показано [2], что временную корреляционную функцию $B(\tau)$ при зависимости от времени t в виде $\sim e^{-i\omega_1 t}$ можно представить как

$$B(\tau) = B(-\tau) = B_1(\tau) + B_1^*(\tau), \quad (1)$$

где “*” – знак комплексного сопряжения, а

$$B_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\tilde{\chi}_1 \sum_{j=\pm} \tilde{W}_j(\tilde{\chi}_1) |f_1(\tilde{\chi}_1)|^2 e^{-i[\omega_0 + j\omega_1(\chi_1)]\tau}, \quad (2)$$

$$f_1(\tilde{\chi}_1) = \int_S d^2\tilde{r}_1 f_2(\tilde{r}_1; \tilde{\chi}_1) e^{i\Phi(\tilde{r}_1)}, \quad (3)$$

$$f_2(\tilde{r}_1; \tilde{\chi}_1) = (\sigma/2\sqrt{2})(J_{12}\tilde{J}_{01}(\tilde{\chi}_1))/(4\pi R_{01}R_{12}), \quad (4)$$

$$\Phi(\tilde{r}_1) = kR_{01} + kR_{12} + \tilde{\chi}_1 \cdot \tilde{r}_1. \quad (5)$$

В этих формулах $\vec{R}_{01} = \vec{R}_1 - \vec{R}_0 = (\vec{r}_{01}, z_1 - z_0)$ – вектор, соединяющий точку рассеяния $\vec{R}_1 = (\vec{r}_1, z_1 = 0)$ на средней поверхности $z_1 = \langle \zeta(\vec{r}_1, t) \rangle = 0$ (см. рис. 1) с точкой источника $\vec{R}_0 = (\vec{r}_0, z_0)$; вектор $\vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$ соединяет точку рассеяния \vec{R}_1 с точкой наблюдения $\vec{R}_2 = (\vec{r}_2, z_2)$; $\sigma^2 = \langle \zeta^2 \rangle$ – дисперсия случайных неровностей; $\tilde{W}_j(\tilde{\chi}_1)$ – несимметричный энергетический спектр волновых чисел [8] (пространственный спектр неровностей), а $\omega_1 = \omega_1(\chi_1)$ частота случайных колебаний поверхности, отвечающая волновому вектору $\tilde{\chi}_1$; множители $\tilde{J}_{01}(\tilde{\chi}_1)$ и J_{12} , учитывающие влияние отражательных свойств поверхности на трассе \vec{R}_{01} для среднего поля и на трассе \vec{R}_{12} для рассеянного поля [9, 10], равны соответственно

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{01}(\tilde{\chi}_1) &\equiv \tilde{J}_{01}(\tilde{\chi}_1; \vec{R}_{01}) = \\ &= (-k\tilde{\alpha}\tilde{\chi}_1 + k^2\alpha_z^2)(1 + V_{01}) + k^2\alpha_z\eta_0(1 - V_{01}) + \\ &+ (-k\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\chi}_1 + k^2\alpha_z^2 + k^2\alpha_z\eta_0)(1 - V_{01})W_{01}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$J_{12} \equiv J_{12}(\vec{R}_{12}) = (1 + V_{12}) + (1 - V_{12})W_{12}. \quad (7)$$

Здесь V_{01} , V_{12} – эффективные коэффициенты отражения, а W_{01} , W_{12} – множители ослабления для

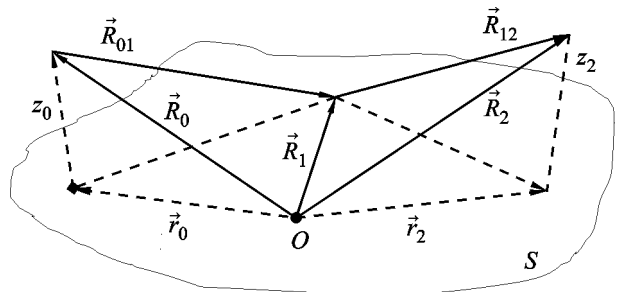


Рис. 1. Геометрия рассеяния

вышеуказанных трасс \bar{R}_{01} и \bar{R}_{12} соответственно; η_0 – импеданс поверхности; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $\bar{\alpha} = \bar{r}_{01}/R_{01}$, $\bar{r}_{01} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$; $\alpha_z = z_0/R_{01}$. Случайное поле неровностей предполагается стационарным и однородным.

Приведенные выражения получены для условий волновой зоны и квазистационарности рассеяния ($kR_{01}, kR_{12} \gg 1$ и $\omega_0 \gg \omega_1$). Для бесконечной плоскости они – результат теории возмущений [9]. Если же S – ограниченный участок плоскости (с размерами $L \gg \lambda$), то их использование будет эвристическим методом расчета, речь о котором шла выше.

Спектр является преобразованием Фурье выражения (2) для корреляционной функции:

$$S(\omega) = S(-\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d^2\bar{\chi}_1 \tilde{W}_j(\bar{\chi}_1) |f_1(\bar{\chi}_1)|^2 \delta(|\omega| - \omega_0 - j\omega_1(\chi_1)), \quad (8)$$

$$(j = \text{sign}(|\omega| - \omega_0)).$$

Поскольку начало координат лежит в средней плоскости $z_1 = 0$, условный центр площадки имеет радиус-вектор $\bar{R}_c = (\bar{r}_c, 0)$. При этом можно сделать преобразование: $\bar{R}_{01} = \bar{R}_{0c} + \bar{r}_1$, $\bar{R}_{12} = \bar{R}_{2c} - \bar{r}_1$, где $\bar{R}_{0c} = \bar{R}_c - \bar{R}_0$, $\bar{r}_1 = \bar{R}_1 - \bar{R}_c$, $\bar{R}_{2c} = \bar{R}_2 - \bar{R}_c$.

Особенности процедуры асимптотической оценки интеграла (3) от осциллирующей функции обсуждались ранее [1, 2]. Не останавливаясь на них, займемся вычислением главного члена асимптотики с помощью МСФ.

3. Значение фазы Φ_s в стационарной точке

Стационарная (седловая) точка $\bar{r}_1 \equiv \bar{r}_{1s}$ фазы (5) определяется условием

$$\partial\Phi/\partial\bar{r}_1 = k(-\bar{\beta} + \bar{\alpha} + (\bar{\chi}_1/k))_s = 0, \quad (9)$$

где

$$\bar{\beta} = -(\partial R_{12}/\partial\bar{r}_1) = (\bar{r}_{2c} - \bar{r}_1)/R_{12}, \quad (10)$$

$$\bar{\alpha} = (\partial R_{01}/\partial\bar{r}_1) = (\bar{r}_{0c} + \bar{r}_1)/R_{01},$$

$$R_{12} = |\bar{R}_{2c} - \bar{r}_1| = \sqrt{z_2^2 + (\bar{r}_{2c} - \bar{r}_1)^2}, \quad (11)$$

$$R_{01} = |\bar{R}_{0c} + \bar{r}_1| = \sqrt{z_0^2 + (\bar{r}_{0c} + \bar{r}_1)^2}. \quad (12)$$

Здесь и далее нижний индекс s отвечает значению в стационарной точке.

“Хотя математическое определение седловой точки выглядит очень просто, найти положение седловых точек аналитическими методами, вообще говоря, весьма трудно...” ([11], с.131). Поэтому случай обратного рассеяния [1] является уникальным, так как стационарная точка фазы в этой работе определяется точно в аналитическом виде.

В случае отражения сферической волны от гладкой плоскости (это отвечает значению $\bar{\chi}_1 = 0$ в уравнении (9)) положение точки ищут приближенно ([6], с.115; [12], с. 194). Поскольку в общем случае произвольных значений размеров L поверхности S , направлений \bar{R}_{0c} , \bar{R}_{2c} определить \bar{r}_{1s} из условия стационарности фазы (9) в аналитическом виде невозможно, ограничимся приближением дифракции Френеля, разложив $\Phi(\bar{r}_1)$ в ряд Тейлора:

$$\Phi(\bar{r}_1) \approx \Phi_c + \sum_{n=1}^{\infty} O_n, \quad (13)$$

$$\Phi_c = k(R_{0c} + R_{2c}), \quad (14)$$

$$O_n \equiv \sum_{i=0}^n O_{i,n-i} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n C_n^i x_1^i y_1^{n-i} (\partial^n \Phi / \partial x_1^i \partial y_1^{n-i})_0. \quad (15)$$

Нижним индексом 0 обозначено значение производной в точке $\bar{r}_1 = 0$.

Френелевское приближение (13) имеет вид

$$\Phi(\bar{r}_1) \approx \Phi_c + \bar{K}_1 \bar{r}_1 + a_{xx} x_1^2 + a_{yy} y_1^2 + a_{xy} x_1 y_1, \quad (16)$$

где

$$\bar{K}_1 = -k\bar{\beta}_c + k\bar{\alpha}_c + \bar{\chi}_1, \quad (17)$$

$$\bar{\alpha}_c = \bar{r}_{0c}/R_{0c}, \quad \bar{\beta}_c = \bar{r}_{2c}/R_{2c}, \quad (18)$$

$$a_{xx} = (1/2)(\Phi''_{xx})_0 = (k/2) \left[(z_2^2 + y_{2c}^2)/R_{2c}^3 + (z_0^2 + y_{0c}^2)/R_{0c}^3 \right], \quad (19)$$

$$a_{yy} = (1/2)(\Phi''_{yy})_0 = (k/2)\left[\frac{(z_2^2 + x_{2c}^2)}{R_{2c}^3} + \frac{(z_0^2 + x_{0c}^2)}{R_{0c}^3}\right], \quad (20)$$

$$\alpha_{xy} = (\Phi''_{xy})_0 = k\left[x_{2c}y_{2c}/R_{2c}^3 + x_{0c}y_{0c}/R_{0c}^3\right]. \quad (21)$$

Проведя непосредственные вычисления, можно убедиться в том, что гессиан

$$H = \Phi''_{xx}\Phi''_{yy} - (\Phi''_{xy})^2 > 0, \quad (22)$$

если только z_0 и z_2 не обращаются в нуль одновременно. Следовательно, сумму членов 2-го порядка в разложении (13) можно привести к каноническому виду квадратичной формы [13].

Предварительно проведем ортогональные преобразования координат (x_1, y_1) , целесообразность которых будет ясна позже. Перейдем от \vec{r}_1 к \vec{r}'_1 с помощью поворота вокруг оси oz_1 на угол φ (см. [13], с. 218; [14], с. 29):

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi - y'_1 \sin \varphi, \\ y_1 = x'_1 \sin \varphi + y'_1 \cos \varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi, \\ y'_1 = -x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases} \quad (23)$$

Разложение фазы (16) приобретет при этом вид:

$$\Phi(\vec{r}_1) = \Phi(\vec{r}'_1) = \Phi_c + \vec{K}'_1 \vec{r}'_1 + A_{xx}x'^2_1 + A_{yy}y'^2_1 + A_{xy}x'_1y'_1, \quad (24)$$

где $\vec{K}'_1 = (K'_{1x}, K'_{1y})$ и $\vec{K}_1 = (K_{1x}, K_{1y})$ связаны формулами, аналогичными (23), а

$$\begin{cases} A_{xx} = a_{xx} \cos^2 \varphi + a_{yy} \sin^2 \varphi + a_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ A_{yy} = a_{xx} \sin^2 \varphi + a_{yy} \cos^2 \varphi - a_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ A_{xy} = (-a_{xx} + a_{yy})2 \sin \varphi \cos \varphi + a_{xy} \cos 2\varphi. \end{cases} \quad (25)$$

Сделаем параллельный перенос системы \vec{r}'_1 на величину \vec{r}'_{1s} , перейдя к \vec{r} :

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}'_{1s} + \vec{r}. \quad (26)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}_1) = \Phi(\vec{r}) = \Phi_c + \vec{K}'_1 \vec{r}'_{1s} + \vec{K}'_1 \vec{r} + \\ + A_{xx}(x^2 + 2x'_1s x + x'^2_{1s}) + A_{yy}(y^2 + 2y'_1s y + y'^2_{1s}) + \\ + A_{xy}(xy + x'_1s y'_1s + y'_1s x + x'_1s y). \end{aligned} \quad (27)$$

Наложим на преобразования следующие условия:
1) линейные члены по x и y отсутствуют,

$$K'_{1x} + 2x'_{1s}A_{xx} + A_{xy}y'_{1s} = 0, \quad (28)$$

$$K'_{1y} + 2y'_{1s}A_{yy} + A_{xy}x'_{1s} = 0; \quad (29)$$

2) квадратичный член xu также отсутствует,

$$A_{xy} = 0. \quad (30)$$

Из последнего условия получаем

$$A_{xy} = (\alpha_{yy} - \alpha_{xx}) \sin 2\varphi + \alpha_{xy} \cos 2\varphi = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \alpha_{xy} / (\alpha_{xx} - \alpha_{yy}). \quad (31)$$

Тем самым определен угол поворота φ системы \vec{r}_1 относительно системы \vec{r}'_1 .

С учетом условий (28), (29) и (30) находим

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_s + A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2, \quad (32)$$

$$\Phi_s = \Phi_c - A_{xx}x'^2_{1s} - A_{yy}y'^2_{1s}. \quad (33)$$

Поскольку $(\partial\Phi/\partial\vec{r})_{r=0} = 0$, очевидно, что $(\vec{r}'_1)_{\vec{r}=0} = \vec{r}'_{1s}$ – стационарная точка фазы $\Phi(\vec{r}'_1)$, а Φ_s , определенная формулой (33), – ее стационарное значение.

Для нахождения вида кривых равной фазы $\Phi(\vec{r}'_1) = \text{const}$ следует определить знаки A_{xx} и A_{yy} . Подставив a_{xx} , a_{yy} , a_{xy} , даваемые формулами (19), (20), (21), в выражения (25), получим

$$A_{xx} = (k/2)\left[\frac{(z_2^2 + y_{2c}^2)}{R_{2c}^3} + \frac{(z_0^2 + y_{0c}^2)}{R_{0c}^3}\right] \geq 0, \quad (34)$$

$$A_{yy} = (k/2)\left[\frac{(z_2^2 + x_{2c}^2)}{R_{2c}^3} + \frac{(z_0^2 + x_{0c}^2)}{R_{0c}^3}\right] \geq 0. \quad (35)$$

Причем одновременно обратиться в нуль они не могут.

Очевидно, что при $\vec{r} = 0$ фаза $\Phi(\vec{r}'_1) = \Phi_s$ минимальна. Обозначив $\Delta\Phi = \Phi(\vec{r}'_1) - \Phi_s > 0$, получим (при $A_{xx} \neq 0$, $A_{yy} \neq 0$) уравнение эллипса

$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = +1, \quad (36)$$

где $a = \sqrt{\Delta\Phi/A_{xx}}$, $b = \sqrt{\Delta\Phi/A_{yy}}$.

При значении $\Delta\Phi = m\pi$, ($m = 1, 2, \dots$) эллипс определяет границу m -й зоны Френеля.

Переход к случаю рассеяния плоской волны [2] можно проследить при $1/R_{0c} \ll 1/R_{2c}$. Если выбрать систему \vec{r}_1 так, чтобы $y_{2c} = 0$, то получим соответствующие выражения из [2]: $A_{xx} \equiv (k/(2R_{2c}))(z_2^2/R_{2c}^2)$, $A_{yy} \equiv k/(2R_{2c})$, $\varphi \equiv 0$, $A_{xy} \equiv 0$. При этом $A_{xx} \equiv a_{xx}$, $A_{yy} \equiv a_{yy}$, $a_{xy} \equiv 0$.

Если ограничиться значениями $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (добавление $\pm\pi/2, \pm\pi, \dots$ не меняет сути преобразования), то для $G_1 \equiv \operatorname{tg}\varphi$ будем иметь выражение $G_1 = 1/G_2 + \sqrt{1/G_2^2 + 1}$, где для краткости обозначено $G_2 \equiv \operatorname{tg}2\varphi \equiv 2G_1/(1 - G_1^2) = a_{xy}/(a_{xx} - a_{yy})$. При этом элементы матрицы поворота $\sin\varphi = \sqrt{G_1/(1 + G_1)}$, $\cos\varphi = \sqrt{1/(1 + G_1)}$.

Из (24) следует, что уравнения стационарности фазы $\Phi(\vec{r}'_1)$, определяющие x'_{1s}, y'_{1s} , имеют вид:

$$(\partial\Phi/\partial x'_1)_s = 0 = (K'_{1x} + 2A_{xx}x'_1 + A_{xy}y'_1)_s, \quad (37)$$

$$(\partial\Phi/\partial y'_1)_s = 0 = (K'_{1y} + 2A_{yy}y'_1 + A_{xy}x'_1)_s, \quad (38)$$

что совпадает с условием отсутствия линейных членов разложения (28), (29). Учитывая условие $A_{xy} = 0$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, из (37), (38) получаем координаты стационарной точки:

$$x'_{1s} = -K'_{1x}/(2A_{xx}), \quad y'_{1s} = -K'_{1y}/(2A_{yy}). \quad (39)$$

Напомним, что $\vec{K}'_1 = k(-\vec{\beta}'_c + \vec{\alpha}') + \vec{x}'_1$, $K'_{1x} = +K_{1x} \cos\varphi + K_{1y} \sin\varphi$, $K'_{1y} = -K_{1x} \sin\varphi + K_{1y} \cos\varphi$.

4. Применимость френелевского разложения фазы

Необходимым условием френелевского разложения фазы (24) должна быть малость отброшенных членов разложения по сравнению с оставленными. При повороте системы координат, приводящем к преобразованиям $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}'_1$, $\vec{r}_{2c} \rightarrow \vec{r}'_{2c}$, $\vec{r}_{0c} \rightarrow \vec{r}'_{0c}$, сохраняется длина этих векторов, $r_1 = r'_1$, $r_{2c} = r'_{2c}$, $r_{0c} = r'_{0c}$ и т. д. Разложение фазы вблизи $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1$ записывается в виде

$$\Phi(\vec{r}'_1) = \Phi_c + \sum_{n=1}^{\infty} O'_n, \quad (40)$$

где O'_n определены формулой (15) с заменой $x_1 \rightarrow x'_1$, $y_1 \rightarrow y'_1$.

Слагаемые $O'_{0,3}$ и $O'_{3,0}$ в O'_3 малы по сравнению с O'_2 , если выполнены условия:

$$|x'_1|R^{-1} \ll 1, \quad |y'_1|R^{-1} \ll 1, \quad (41)$$

$$R^{-1} = R_{0c}^{-1} + R_{2c}^{-1}. \quad (42)$$

Такая оценка достаточно аккуратно получается при произвольных $\vec{R}'_{0c}, \vec{R}'_{2c}$. Из-за большого числа параметров ($z_0, z_2, x'_{0c}, x'_{2c}, y'_{0c}, y'_{2c}$) при произвольных $\vec{R}'_{0c}, \vec{R}'_{2c}$ произвести аккуратную оценку $O'_{1,2}$ и $O'_{2,1}$ не удастся. Это возможно сделать для двух крайних случаев:

- 1) \vec{R}'_{0c} и \vec{R}'_{2c} лежат в одной плоскости $\parallel oz_1$;
- 2) \vec{R}'_{0c} и \vec{R}'_{2c} лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях $\parallel oz_1$.

Критерием относительной малости $O'_{1,2}$ и $O'_{2,1}$ и в этих случаях является условие (41). По-видимому, оно остается справедливым и для промежуточных положений $\vec{R}'_{0c}, \vec{R}'_{2c}$.

При этом $A_{xx}x'^2_1, A_{yy}y'^2_1$, вообще говоря, могут быть произвольные по сравнению с единицей, для чего необходимо выполнение условий:

$$A_{xx}R^2 = A_{xx}(R_{0c}R_{2c}/(R_{0c} + R_{2c}))^2 \gg 1, \quad (43)$$

$$A_{yy}R^2 = A_{yy}(R_{0c}R_{2c}/(R_{0c} + R_{2c}))^2 \gg 1, \quad (44)$$

что накладывает определенные ограничения на сферические углы $\theta_{0c}, \varphi_{0c}, \theta_{2c}, \varphi_{2c}$ векторов \vec{R}_{0c} и \vec{R}_{2c} .

Заметим, что $k^{-1}A_{xx} = 1/\rho_x$, $k^{-1}A_{yy} = 1/\rho_y$ – главные кривизны поверхности $z = k^{-1}\Phi(\vec{r}'_1)$ в стационарной точке, а ρ_x, ρ_y – соответственно главные радиусы кривизны ([15], с. 823; [13], с. 415), $(1/2)(1/\rho_x + 1/\rho_y)$ – средняя кривизна, $(1/\rho_x)(1/\rho_y)$ – гауссова кривизна.

В общем виде определить вид области значений $\vec{R}_{0c} = (x'_{0c}, y'_{0c}, z_0)$, $\vec{R}_{2c} = (x'_{2c}, y'_{2c}, z_2)$, где выполняются условия (43), (44) или обратные им, практически невозможно. При этом заметим, что обратиться в нуль одновременно A_{xx} и A_{yy} не могут (либо $x'_{0c}, x'_{2c} \rightarrow 0$, $y'_{0c}, y'_{2c} \neq 0$, либо $y'_{0c}, y'_{2c} \rightarrow 0$, а $x'_{0c}, x'_{2c} \neq 0$). В связи с этим будем различать два случая рассеяния – вырожденного и невырожденного. Первый отвечает обращению

в нуль гессиана $H = 4A_{xx}A_{yy} = 0$. В случае невырожденного рассеяния $H \neq 0$. В предыдущих исследованиях [1, 2] эти случаи отвечали скользящему и нес скользящему рассеянию. В рассматриваемой нами задаче двухпозиционного рассеяния для обращения в нуль гессиана $H = 4A_{xx}A_{yy}$ условий $z_0, z_2 \rightarrow 0$ недостаточно. Необходимо еще чтобы $x'_{0c}, x'_{2c} \rightarrow 0$ либо $y'_{0c}, y'_{2c} \rightarrow 0$. В дальнейшем будем рассматривать лишь условия $y'_{0c}, y'_{2c} \rightarrow 0$, поскольку случай $x'_{0c}, x'_{2c} \rightarrow 0$ будет отличаться лишь переобозначением переменных. Для вырожденного рассеяния источник $\vec{R}'_{0c}(x'_{0c}, y'_{0c} = 0, z_0 = 0)$ и точка наблюдения $\vec{R}'_{2c}(x'_{2c}, y'_{2c} = 0, z_2 = 0)$ лежат на одной прямой $y'_1 = 0$ в средней плоскости $z = 0$.

5. Невырожденное рассеяние

Возвращаясь к формуле (3), заметим, что

$$I_2 = \int_S d^2\vec{r}' f_2(\vec{r}'_1; \vec{\chi}'_1) e^{i\Phi(\vec{r}')} = f_1(\vec{\chi}'), \quad (45)$$

так как преобразование поворота $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ имеет якобиан, равный единице.

“Большая” рассеивающая площадка характеризуется значениями $A_{xx}x_1'^2 \gg 1$, $A_{yy}y_1'^2 \gg 1$ при граничных значениях $x'_1 = \pm(\Delta x/2)$, $y'_1 = \pm(\Delta y/2)$. Выбор площадки S в таком виде позволяет проследить влияние близости границы к стационарной точке по каждой переменной x'_1 , y'_1 независимо от другой переменной.

Для “малой” площадки имеем обратные неравенства $A_{xx}x_1'^2 \ll 1$, $A_{yy}y_1'^2 \ll 1$ при значениях x'_1 , y'_1 , отвечающих граничным точкам.

Главный член асимптотики имеет вид (П2) (см. Приложение),

$$f_1(\vec{\chi}'_1) \approx e^{i\Phi_c} f_2(\vec{r}'_{1s}; \vec{\chi}'_1) h_{xs} \Delta Q_x h_{ys} \Delta Q_y, \quad (46)$$

где ΔQ_x , ΔQ_y описывают осцилляции поля с изменением расстояния стационарной точки до границы тени по каждой из переменных.

“Большая” площадка

Для стационарных точек в освещенной зоне, значительно удаленных от границ тени, имеем асимптотику $\Delta Q_x, \Delta Q_y \approx \sqrt{\pi}$, и

$$f_1(\vec{\chi}'_1) \approx \left(\pi / \sqrt{A_{xx}A_{yy}}\right) f_2(\vec{r}'_{1s}; \vec{\chi}'_1) e^{i(\Phi_s + \pi/2)}. \quad (47)$$

Для случая падающей плоской волны ($R_{2c} \ll R_{0c}$) имеем $A_{xx} \approx (k/2R_{2c})(z_2^2/R_{2c}^2) + \dots$, $A_{yy} \approx k/(2R_{2c})$, и полученная формула переходит в формулу (23) из работы [2].

“Малая” площадка

В формулу для I_2 следует подставить ΔQ_x , ΔQ_y , даваемые формулами (П11), (П12) из Приложения, тогда

$$f_1(\vec{\chi}'_1) \approx S e^{i\Phi_c} f_2(\vec{r}'_{1s}; \vec{\chi}'_1) (X_x^{-1} \sin X_x) (X_y^{-1} \sin X_y), \quad (48)$$

где

$$X_x = -C_x = (k \Delta x/2) (\beta'_{cx} - \alpha'_{cx} - \chi'_{1x}/k), \quad (49)$$

$$X_y = -C_y = (k \Delta y/2) (\beta'_{cy} - \alpha'_{cy} - \chi'_{1y}/k), \quad (50)$$

$S = \Delta x \Delta y$, и учтено, что $\Phi_c = \Phi_s + B_x + B_y$ согласно (П16).

6. Вырожденное рассеяние

В этом случае $z_0 = z_2 = y'_{0c} = y'_{2c} = 0$. При этом $A_{xx} = 0$, $A_{yy} \neq 0$. Для такой ситуации $R_{0c} = |x'_{0c}|$, $R_{2c} = |x'_{2c}|$ и выражение для A_{yy} принимает вид

$$A_{yy} = (k/2)(1/R_{2c} + 1/R_{0c}), \quad (51)$$

а фаза

$$\Phi(\vec{r}'_1) = \Phi_c + \vec{K}'_1 \vec{r}'_1 + A_{yy} y_1'^2 + O_3 + \dots, \quad (52)$$

причем $O_3 = O'_{1,2}$, а остальные члены 3-го порядка равны нулю. Выражение для $O'_{1,2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} O'_{1,2} &= (k/2) x'_1 y_1'^2 \left[x'_{2c}/R_{2c}^3 - x'_{0c}/R_{0c}^3 \right] = \\ &= (k/2) x'_1 y_1'^2 \left[-\beta'_{cx}/R_{2c}^2 + \alpha'_{cx}/R_{0c}^2 \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

В этом случае разложение фазы (53) линейно по x'_1 и квадратично по y'_1 . Поэтому асимптотическое интегрирование по переменной x'_1 – это задача асимптотической оценки интеграла Фурье (процедура хорошо известная, см. [7], с. 60), а по переменной y'_1 – это задача МСФ.

Перепишем (52) в виде

$$\Phi(\vec{r}'_1) = \Phi_c + \vec{K}'_{1y} y'_1 + A_{yy} y_1'^2 + k \left[-\beta'_{cx} \left(1 - (y_1'^2/2R_{2c}^2) \right) \right] +$$

$$+\alpha'_{cx} \left(1 - (y_1'^2/2R_{0c}^2)\right) + q'_x \Big] x_1'. \quad (54)$$

Поскольку $f_2(\vec{r}'_1; \vec{\chi}'_1)$ мало отличается на концах интервала $|x_1'| \leq \Delta x/2$ от значения в центре $x_1' = x'_c = 0$, первый член асимптотики интеграла Фурье по переменной x_1' равен

$$I_{2x} = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx_1' f_2(\vec{r}'_1; \vec{\chi}'_1) e^{i\Phi(\vec{r}'_1)} \approx \\ \approx e^{i\Phi(y'_1)} \Delta x f_2(x'_c, y'_1; \vec{\chi}'_1) X_x^{-1} \sin X_x, \quad (55)$$

$$X_x = (k\Delta x/2) \left[-\beta'_{cx} \left(1 - (y_1'^2/2R_{2c}^2)\right) + \right. \\ \left. + \alpha'_{cx} \left(1 - (y_1'^2/2R_{0c}^2)\right) + q'_x \right], \quad (56)$$

$$\Phi(y'_1) = \Phi_c + A_{yy} y_1'^2 + K'_y y_1'. \quad (57)$$

Стационарная точка $(y'_1)_s = y'_{1s}$ определяется по-прежнему равенством $y'_{1s} = -K'_{1y}/2A_{yy}$, поэтому главный член асимптотики I_2 равен

$$I_2 = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy_1' I_{2x} \approx e^{i\Phi_s} \Delta x f_2(x'_c, y'_{1s}; \vec{\chi}'_1) X_x^{-1} \sin X_x \times \\ \times h_{ys} \Delta Q_y \Big|_{y_1'=y'_{1s}}. \quad (58)$$

Здесь h_{ys} и ΔQ_y определены формулами (П3), (П4) из Приложения, а

$$\Phi_s = \Phi_c + A_{yy} y_{1s}'^2 + K'_{1y} y_{1s}' = \\ = \Phi_c - (ky_{1s}'^2/2)(1/R_{2c} + 1/R_{0c}). \quad (59)$$

При $1/R_{0c} \rightarrow 0$ формула (58) переходит в формулу, полученную для случая рассеяния плоской волны [2]. Относительно размеров Δy возможны два предельных случая – “большой” и “малой” площадок.

“Большая” площадка

В этом случае для стационарных точек внутри освещенной области ($|y'_{1s}| < \Delta y/2$), значительно удаленных от границ тени $|y'_1| = \pm \Delta y/2$, можно положить $\Delta Q_y \approx \sqrt{\pi}$, в результате чего получим

$$f_1(\vec{\chi}'_1) \approx e^{i(\pi/4 + \Phi_c - A_{yy} y_{1s}'^2)} \Delta x \times$$

$$\times \sqrt{\pi/A_{yy}} f_2(x'_c, y'_{1s}; \vec{\chi}'_1) X_x^{-1} \sin X_x. \quad (60)$$

С учетом условия $|y'_1| R^{-1} \ll 1$ в выражении (56) для X_x можно пренебречь поправкой $\sim y_{1s}'^2/(2R_{2c}^2)$, $\sim y_{1s}'^2/(2R_{0c}^2)$.

“Малая” площадка

Согласно формуле (П12) из Приложения

$$\Delta Q_y \approx \Delta y e^{i(A_{yy} y_{1s}'^2 - \pi/4)} \sqrt{A_{yy}} X_y^{-1} \sin X_y, \quad (61)$$

где

$$X_y = (k\Delta y/2) (-\beta'_{cy} + \alpha'_{cy} + q'_y).$$

При этом

$$f(\vec{\chi}'_1) \approx S e^{i\Phi_c} f_2(x'_c, y'_{1s}; \vec{\chi}'_1) (X_x^{-1} \sin X_x) (X_y^{-1} \sin X_y). \quad (62)$$

7. Приближение дифракции Фраунгофера

Для “малой” площадки члены разложения в фазе выше 1-го порядка малы по сравнению с единицей, $A_{xx}(\Delta x/2)^2 \ll 1$, $A_{yy}(\Delta y/2)^2 \ll 1$, поэтому

$$\Phi(\vec{r}'_1) \approx \Phi_c + k(-\bar{\beta}'_c + \bar{\alpha}'_c + \bar{q}') \vec{r}'_1 + \dots \quad (63)$$

Интеграл (3) с таким приближением для фазы является типичным двукратным интегралом Фурье. Асимптотическая оценка его является несложной задачей ([7], с. 60), так как выполняется методом интегрирования по частям. Поскольку $f_2(\vec{r}'_1; \vec{\chi}'_1)$ на границе S мало отличается от своего значения в центре площадки $\vec{r}'_1 = \vec{r}'_c$, главный член асимптотики выглядит следующим образом:

$$f_1(\vec{\chi}'_1) \approx e^{i\Phi_c} S f_2(r'_{cs}; \vec{\chi}'_1) (X_x^{-1} \sin X_x) (X_y^{-1} \sin X_y), \quad (64)$$

где $X_x = K'_{1x} \Delta x/2$, $X_y = K'_{1y} \Delta y/2$.

Отличие полученного выражения (64) от даваемых МСФ выражений (48) и (62) для “малой” площадки заключается в разнице аргументов: $f_2(\vec{r}'_1; \vec{\chi}'_1)$, $f(x'_c, y'_{1s}; \vec{\chi}'_1)$ в МСФ и $f_2(\vec{r}'_c; \vec{\chi}'_1)$ в приближении дифракции Фраунгофера. Поскольку предполагается выполненным условие $|r'_{1s}| R^{-1} \ll 1$, этой разницей можно пренебречь, учитывая плавность изменений функции $f_2(\vec{r}'_1; \vec{\chi}'_1)$ (см. формулу (4)).

8. Средняя интенсивность

Средняя интенсивность $B(0)$ согласно формулам (1) и (2) определяется выражением

$$B(0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \vec{\chi}'_1 2 \tilde{W}(\vec{\chi}'_1) |f_1(\vec{\chi}'_1)|^2, \quad (65)$$

где $\tilde{W}(\vec{\chi}'_1) = (1/2) [\tilde{W}_+(\vec{\chi}'_1) + \tilde{W}_-(\vec{\chi}'_1)]$ – симметричный спектр [8].

Вид формулы (65) является подтверждением того, что статистически независимыми рассеивателями являются фурье-компоненты однородного и стационарного случайного поля неровностей, а $|f_1(\vec{\chi}'_1)|$ являются парциальными амплитудами рассеяния каждой фурье-компонентой.

Невырожденное рассеяние

“Большая” площадка

Пренебрегая вкладом в $B(0)$ от стационарных точек в приграничной полосе и в зоне тени, используем для $f_1(\vec{\chi}'_1)$ выражение (47). С помощью уравнений стационарности находим, что

$$d^2 \vec{\chi}'_1 = d\chi'_{1x} d\chi'_{1y} = 4 A_{xx} A_{yy} d\chi'_{1s} d\chi'_{1s}, \quad (66)$$

Это позволяет в интеграле (65) перейти от интегрирования по $\vec{\chi}'_1$ к интегрированию по \vec{r}'_{1s} ,

$$B(0) \approx 4 \int_S d^2 \vec{r}'_{1s} 4 A_{xx} A_{yy} |f_1(\vec{\chi}'_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}'_1) \Big|_{\vec{\chi}'_1 = k(\vec{\beta}'_s - \vec{\alpha}'_s)}, \quad (67)$$

где $\vec{\beta}'_s = -(\partial R_{12} / \partial \vec{r}'_1)_s$, $\vec{\alpha}'_s = (\partial R_{01} / \partial \vec{r}'_1)_s$, а R_{12} , R_{01} представлены квадратичными разложениями по x'_1 , y'_1 , в чем можно убедиться путем непосредственных вычислений и подстановки в уравнения стационарности.

Подставив в (67) выражение (47) для $f_1(\vec{\chi}'_1)$, получим

$$B(0) \approx 16\pi^2 \int_S d^2 \vec{r}'_{1s} |f_2(\vec{r}'_{1s}; \vec{\chi}'_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}'_1) \Big|_{\vec{\chi}'_1 = k(\vec{\beta}'_s - \vec{\alpha}'_s)}. \quad (68)$$

Переход к случаю рассеяния плоской волны легко выполнить, положив $x'_{1s}/R_{0c} \rightarrow 0$, $y'_{1s}/R_{0c} \rightarrow 0$ в разложении для $\vec{\alpha}'_s$.

“Малая” площадка

В силу быстрого убывания “диаграммных” множителей в (48) пределы интегрирования по $\vec{\chi}'_1$ можно считать бесконечными, а из-за малого отличия от результатов приближения дифракции Фраунгофера в качестве $f_1(\vec{\chi}'_1)$ взять именно это приближение. Тогда

$$B(0) = 4S^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \vec{\chi}'_1 |f_2(\vec{r}'_c; \vec{\chi}'_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}'_1) \times \\ \times (X_x^{-1} \sin X_x) (X_y^{-1} \sin X_y), \quad (69)$$

где X_x , X_y определены формулами (49), (50):

$$X_x = (\Delta x/2) (\chi'_{1cx} - \vec{\chi}'_{1x}), \quad (70)$$

$$\chi'_{1cx} = k(\beta'_{cx} - \alpha'_{cx}),$$

$$X_y = (\Delta y/2) (\chi'_{1cy} - \vec{\chi}'_{1y}), \quad (71)$$

$$\chi'_{1cy} = k(\beta'_{cy} - \alpha'_{cy}),$$

Если выражение $|f_2(\vec{r}'_c; \vec{\chi}'_1)|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}'_1)$ слабо меняется в пределах первых нескольких лепестков “диаграммных” множителей, его можно вынести за знак интеграла при значении $\vec{\chi}'_1 = \vec{\chi}'_{1c}$. Оставшийся интеграл является табличным (см. [15], с. 431), равным $4\pi^2/S$. В результате

$$B(0) \approx 16\pi^2 |f_2(\vec{r}'_c; \vec{\chi}'_{1c})|^2 \tilde{W}(\vec{\chi}'_{1c}) S, \quad (72)$$

что совпадает с подобным результатом в случае рассеяния падающей плоской волны [2].

Вырожденное рассеяние

“Большая” площадка

Если пренебречь вкладом стационарных точек из переходной пограничной зоны и зоны тени, то, приняв во внимание (60), аналогично выводу формулы (67) можно положить

$$B(0) = \frac{4\pi}{A_{yy}} (\Delta x)^2 \int_{\chi'_{1x}}^{\chi'_{1x}} d\chi'_{1y} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi'_{1x} |f_2(x'_c, y'_{1s}; \vec{\chi}'_1)|^2 \times \\ \times \tilde{W}(\vec{\chi}'_1) (X_x^{-1} \sin X_x)^2. \quad (73)$$

При этом $\tilde{W}(\tilde{\chi}'_1)$ должна быть достаточно плавной функцией вблизи граничных значений χ'_{1l} , χ'_{1u} , равных соответственно $\chi'_{1l} = -kA_{yy}\Delta y$, $\chi'_{1u} = kA_{yy}\Delta y$, поскольку в данном случае $\alpha'_{cy} = \beta'_{cy} = 0$, $|\alpha'_{cx}| = |\beta'_{cx}| = 1$.

Если сомножитель при $(X_x^{-1} \sin X_x)^2$ мало меняется в области нескольких первых лепестков, его можно вынести из-под знака внутреннего интеграла, приравняв значению в точке $\chi'_{1cx} = k(\beta'_{cx} - \alpha'_{cx})$. В результате получим

$$B(0) = (8\pi^2/A_{yy})\Delta x \times \int_{\chi'_{1e}}^{\chi'_{1u}} d\chi'_{1y} |f_2(x'_c, y'_{1s}; \tilde{\chi}'_1)|^2 \tilde{W}(\tilde{\chi}'_1) \Big|_{\chi'_{1x}=\chi'_{1cx}}. \quad (74)$$

Из уравнения стационарности следует $\chi'_{1y} = -2A_{yy}y'_{1s}$, поэтому $d\chi'_{1y} = -2A_{yy}dy'_{1s}$. Перейдя к переменной интегрирования y'_{1s} , получим

$$B(0) = 16\pi^2 \Delta x \int_{-y/2}^{y/2} dy'_{1s} |f_2(x'_c, y'_{1s}; \tilde{\chi}'_1)|^2 \tilde{W}(\tilde{\chi}'_1), \quad (75)$$

где $\tilde{\chi}'_1 = (\chi'_{1cx}, -2A_{yy}y'_{1s})$.

В таком виде (75) обобщает формулу (53) из [2] (в последней утеряно Δx) на случай двухпозиционного рассеяния.

“Малая” площадка

Как и в случае невырожденного рассеяния, в качестве $f_1(\tilde{\chi}_1)$ можно взять приближение дифракции Фраунгофера (64), а пределы интегрирования считать бесконечными в силу быстрого убывания “диаграммных” множителей,

$$B(0) = 4S^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2\tilde{\chi}'_1 |f_2(\tilde{r}'_c; \tilde{\chi}'_1)|^2 \tilde{W}(\tilde{\chi}'_1) \times (X_x^{-1} \sin X_x)^2 (X_y^{-1} \sin X_y)^2. \quad (76)$$

В случае достаточно широкополосного спектра $\tilde{W}(\tilde{\chi}'_1)$ (по сравнению с «диаграммными» множителями) его вместе с $|f_2(\tilde{r}'_c; \tilde{\chi}'_1)|^2$ можно вынести за знак интеграла при значении $\tilde{\chi}'_1 = \tilde{\chi}'_{1c}$. В результате получим

$$B(0) = 16\pi^2 |f_2(\tilde{r}'_c; \tilde{\chi}'_{1c})|^2 \tilde{W}(\tilde{\chi}'_{1c})S, \quad (77)$$

где по-прежнему $\tilde{\chi}'_{1c} = k(\beta'_{cx} - \alpha'_{cx})$.

Очевидно, что формула (77) переходит в полученную ранее ([2], формула (55)) в задаче рассеяния плоской волны.

9. Частотный спектр

Для закона дисперсии $\omega_1(\chi_1) = \sqrt{g\chi_1}$, где g – ускорение силы тяжести, δ -функция в формуле (8) равна

$$\delta(\Delta\omega - j\omega_1(\chi)) = (2\sqrt{2kx'_{1s}}/\omega_{Br})\delta(\chi_1 - \chi_{1s}). \quad (78)$$

Здесь $\Delta\omega = |\omega| - \omega_0$, $j = \text{sign } \Delta\omega$, $\omega_{Br} = \sqrt{2gk}$, а $\chi_{1s} = 2k\xi_0^2 \equiv 2k(\Delta\omega/\omega_{Br})^2$ – нуль δ -функции. Перейдем к вычислению конкретных случаев.

Невырожденное рассеяние

“Большая” площадка

Для частот, формируемых стационарными точками освещенной области, удаленными от границ, взяв в качестве $f_1(\tilde{\chi}'_1)$ выражение (47) и $d^2\tilde{\chi}'_1 = 4A_{xx}A_{yy}d^2\tilde{r}'_{1s}$, получим

$$S(\omega) = 16\pi^2 \int_S d^2\tilde{r}'_{1s} |f_2(\tilde{r}'_{1s}; \tilde{\chi}'_1)|^2 \times \tilde{W}_j(\tilde{\chi}'_1)\delta(\Delta\omega - j\omega_1(\chi_1)) \Big|_{\tilde{\chi}'_1=\tilde{\chi}'_{1s}}, \quad (79)$$

где $\tilde{\chi}'_{1s} = k(\tilde{\beta}'_s - \tilde{\alpha}'_s)$ определено квадратичными разложениями по x'_{1s} , y'_{1s} величин R_{01} , R_{12} в выражениях $\tilde{\beta}'_s = -(\partial R_{12}/\partial \tilde{r}'_1)_s$, $\tilde{\alpha}'_s = (\partial R_{01}/\partial \tilde{r}'_1)_s$.

“Малая” площадка

В этом случае в качестве $f_1(\tilde{\chi}'_1)$ следует взять выражение (48). Подставив его в (8), аналогично вычислениям $B(0)$, получим

$$S(\omega) = (2\sqrt{2k\chi_{1s}^3}/\omega_{Br})S^2 \int_0^{2\pi} d\phi'_1 |f_2(\tilde{r}'_c; \tilde{\chi}'_{1s})|^2 \times \tilde{W}_j(\tilde{\chi}'_{1s})(X_x^{-1} \sin X_x)^2 (X_y^{-1} \sin X_y)^2 \Big|_{\tilde{\chi}'_1=\tilde{\chi}'_{1s}}. \quad (80)$$

где X_x , X_y определены формулами (49), (50).

Вырожденное рассеяние

“Большая” площадка

Как и в случае вычисления $B(0)$, пренебрежем вкладом в рассеяние стационарных точек в переходной пограничной области и в области тени, продолжив $f_1(\vec{\chi}'_1)$ в этих областях нулевыми значениями, а в освещенной области используем асимптотику (60). Тогда

$$S(\omega) = \left(2\sqrt{2k\chi_{1s}^3}/\omega_{Br}\right) \pi(\Delta x)^2 \int_0^{2\pi} d\phi'_1 |f_2(x'_c, y'_{1s}; \vec{\chi}'_{1s})|^2 \times \\ \times \tilde{W}_j(\vec{\chi}'_{1s}) \left(X_x^{-2} \sin^2 X_x\right) U((\Delta y/2) - |y'_{1s}|) \Big|_{\vec{\chi}'_1 = \vec{\chi}'_{1s}}, \quad (81)$$

где X_x определено формулой (56), $\vec{\chi}'_{1s} = (\chi'_{1s} \cos \phi'_1, \chi'_{1s} \sin \phi'_1)$.

Функция единичной ступеньки $U(y)$ равна 1, если аргумент $y \geq 0$, и нулю, если аргумент $y \leq 0$. Напомним, что y'_{1s} и $\vec{\chi}'_{1s}$ связаны формулой (39).

“Малая” площадка

В этом случае из-за быстрого убывания “диаграммных” множителей допустимы любые значения $\vec{\chi}'_1$ (в том числе и отвечающие точкам $|y'_{1s}| \gg \Delta y/2$). По той же причине можно везде воспользоваться приближением дифракции Фраунгофера (64) и в результате получить

$$S(\omega) = \left(2\sqrt{2k\chi_{1s}^3}/\omega_{br}\right) S^2 \int_0^{2\pi} d\phi'_1 |f_2(\vec{r}'_c; \vec{\chi}'_{1s})|^2 \times \\ \times \tilde{W}_j(\vec{\chi}'_1) \left(X_x^{-1} \sin X_x\right)^2 \left(X_y^{-1} \sin X_y\right)^2 \Big|_{\vec{\chi}'_1 = \vec{\chi}'_{1s}}. \quad (82)$$

Связь между $\vec{\chi}'_{1s}$, χ'_{1sy} , y'_{1s} и X_x та же, что и в выражении (81), а $X_y = \chi'_{1sy} \Delta y/R$. Напомним, что $R^{-1} = 1/R_{0c} + 1/R_{2c}$, $\vec{\chi}'_{1s} = k(\vec{\beta}'_s - \vec{\alpha}'_s)$.

Очевидно, что в случае “малой” площадки формулы (81), (82) для вырожденного рассеяния являются аналитическим продолжением соответствующих им формул (79), (80) для невырожденного, учитывающим конкретные значения \vec{R}_{0c} и \vec{R}_{2c} .

10. Обсуждение результатов

Применение МСФ для исследования рассматриваемой проблемы является новым шагом в ее решении, позволяющим отказаться от неоправдан-

ных предположений, характерных для работ предшественников. Новыми являются как рабочие формулы, полученные в приближении дифракции Френеля, так и их предельный переход к результатам, отвечающим приближению дифракции Фраунгофера в случае “малой” рассеивающей площадки, что является подтверждением их достоверности.

Применимость полученных результатов исследования ограничена по ряду причин. Первая из них – необходимая малость отбрасываемых членов в разложении фазы по сравнению с квадратичными. Это ограничивает область рассматриваемых в вычислениях значений x'_1, y'_1 требованиями (41). Вторая причина – ограничение главным членом асимптотического разложения (46), что требует малости по сравнению с ним последующих членов разложения. Как указывалось ранее [1], в общем виде для однократного интеграла такой критерий малости установлен лишь для случая изолированных стационарных точек ([11], с. 474–475, 532–533), расположенных вдали от концов контура интегрирования. Главная трудность оценок при этом связана с обращением степенных рядов.

В нашем случае френелевского разложения фазы (32) и конкретного вида аналитической зависимости функции $f_2(\vec{r}'_1; \vec{\chi}'_1)$ от \vec{r}'_1 (4) условие малости последующих членов асимптотического ряда по сравнению с главным для двукратного интеграла (3) можно получить в явном виде. Разложение $f_2(\vec{r}'_1; \vec{\chi}'_1)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\vec{r}'_1 = r'_{1s}$ и почленное интегрирование в (3) приводит к табличным интегралам, выражающимся либо через дополнение интеграла вероятности аналогично формуле (П2), либо через произведения степеней x'_{1s}, y'_{1s} на гауссовы экспоненты. Требование малости поправок, линейных по x'_{1s}, y'_{1s} , приводит к условиям $|x'_{1s}|/R_s \ll 1, |y'_{1s}|/R_s \ll 1$, где $1/R_s = (1/R_{01} + 1/R_{12})_s$. А требование малости квадратичных поправок – соответственно к $|x'_{1s}|^2/R_s^2 \ll 1, |y'_{1s}|^2/R_s^2 \ll 1, |x'_{1s}||y'_{1s}|/R_s^2 \ll 1$, что по порядку величин равносильно вышеприведенному требованию (41).

Кроме того, различные варианты формул для $B(0)$ и $S(\omega)$ накладывают некоторые ограничения на спектр неровностей $\tilde{W}(\vec{\chi}'_1)$ и частотный интервал ω , о чем говорилось при их выводе. При этом специальный выбор геометрии площадки S в формуле (45) не является принципиальным

ограничением для вычислений, однако позволяет описать влияние близости стационарной точки (x'_{1s}, y'_{1s}) к границе по каждой из переменных раздельно.

Результаты проведенных исследований представляют интерес с нескольких сторон. Во-первых, сам ход вычислений позволяет проследить физический механизм рассеяния волн. Во-вторых, они могут служить основой создания физически обоснованных моделей рассеяния волн для практических задач, таких как радиолокация взволнованной морской поверхности.

Относительно физического механизма рассеяния в литературе (см. напр. [5], с. 2) бытует мнение, что его объяснил в своей пионерской работе [16] Д. Кромби. Для справки приведем его высказывание на этот счет в оригинале: "A tentative explanation of these features can be offered if it is assumed that the sea waves act as diffraction gratings".

Объяснение это столь же неясное, сколь и некорректное по причине полного несоответствия физических условий.

В оптике наблюдается дифракция Фраунгофера ([15], с. 418): падающая волна практически плоская (коллимированный свет), точка наблюдения располагается в фокальной плоскости объектива (условия дальней зоны). Наблюдаемые дифракционные максимумы отвечают определенным разностям оптического хода вдоль направлений падения и рассеяния (отличных от скользящих!), при которых вклады в рассеянное поле от отдельных элементов решетки складываются синфазно.

В экспериментах Кромби [16] указанные направления – чисто скользящие (что нереализуемо в оптике), волны (падающая и рассеянные) в пределах диаграммы направленности локатора – сферические, а рассеянное поле имеет случайный характер. При этих условиях рассеяние отвечает условиям дифракции Френеля, характерной чертой которой является "деструктивная интерференция" ([15], с. 421). Статистически независимыми рассеивателями являются не элементы $d^2\vec{r}_1$ площадки, а фурье-компоненты случайного поля неровностей. Об этом свидетельствует сам вид формулы (3), в основу вывода которой положена теорема Винера–Хинчина для однородного и стационарного случайного поля неровностей.

Из-за деструктивной интерференции парциальная амплитуда $f_1(\vec{\chi}'_1)$ рассеяния отдельной "синусоидальной" решеткой с волновым вектором $\vec{\chi}'_1$ определяется лишь малой окрестностью точки \vec{r}'_{1s} (зависящей от $\vec{\chi}'_1$), где осцилляции фазы минимальны, т. е. окрестностью стационарной точки. Согласно формуле (П2) эффективная площадь этой окрестности $|h_{xs}||h_{ys}|$ пропорциональна площади 1-й зоны Френеля.

В случае "большой" площадки S (много больше $|h_{xs}||h_{ys}|$) для точек \vec{r}'_{1s} , лежащих внутри S и дающих основной вклад в вычисления, можно "привязать" $f_1(\vec{\chi}'_1)$ к точке \vec{r}'_{1s} , используя связь между $\vec{\chi}'_1$ и \vec{r}'_{1s} .

В случае "малой" площадки S этого сделать нельзя, поскольку только малая окрестность максимума основного лепестка "диаграммного множителя" обязана вкладу от внутренних точек \vec{r}'_{1s} . Остальная часть формируется стационарными точками из области тени.

Таким образом, механизм формирования рассеянного поля определяется двумя факторами. Первый из них – статистическая независимость рассеяния на отдельных "синусоидальных" решетках, образующих случайное поле неровностей поверхности. Второй фактор – "деструктивная интерференция", определяющая амплитуду рассеяния $f_1(\vec{\chi}'_1)$ на каждой из этих решеток.

Приложение

Главный член асимптотики двойного интеграла (45) (см. [2], Приложение),

$$I_2 = \int_{y_1}^{y_2} dy'_1 \int_{x_1}^{x_2} dx'_1 f(x'_1, y'_1) e^{i\Phi(x'_1, y'_1)}, \quad (\text{П1})$$

имеет вид

$$I_2 \approx e^{i\Phi_s} f(x'_{1s}, y'_{1s}) h_{xs} \Delta Q_x h_{ys} \Delta Q_y, \quad (\text{П2})$$

где $\Phi_s = \Phi(x'_{1s}, y'_{1s})$ – значение фазы $\Phi(x'_1, y'_1)$ в стационарной точке (x'_{1s}, y'_{1s}) , расположенной произвольно относительно контура области интегрирования,

$$h_{xs} = e^{-i\epsilon_{xx}\pi/4} \sqrt{2/|\Phi''_{xx}|_s}, \quad (\text{П3})$$

$$h_{ys} = e^{-i\epsilon_{yy}\pi/4} \sqrt{2|\Phi''_{yy}/H|_s},$$

$$\Delta Q_x = Q(\hat{\mu}_{xl}) - Q(\hat{\mu}_{xu}), \quad (П4)$$

$$\Delta Q_y = Q(\hat{\mu}_{yl}) - Q(\hat{\mu}_{yu}),$$

$$\hat{\mu}_{xl} = e^{i\varepsilon_{xx}\pi/4} \mu_{xl}, \quad (П5)$$

$$\mu_{xl} = \text{sign}(x_l - x_s) \sqrt{|\Phi_s - \Phi_{(x_l, y_s)}|},$$

$$\hat{\mu}_{yl} = e^{i\varepsilon_{yy}\pi/4} \mu_{yl}, \quad (П6)$$

$$\mu_{yl} = \text{sign}(y_l - y_s) \sqrt{|\Phi_s - \Phi_{(x_s, y_l)}|},$$

$$\varepsilon_{xx} = -\text{sign}(\Phi''_{xx})_s, \quad \varepsilon_{yy} = -\text{sign}(\Phi''_{yy})_s.$$

Выражения для $\hat{\mu}_{xu}$, $\hat{\mu}_{yu}$ получаются из (П5), (П6) заменой $x_l \rightarrow x_u$, $y_l \rightarrow y_u$. Гессиан H определен формулой (22). Величина $(2/\sqrt{\pi})Q(\hat{\mu})$ является дополнением интеграла вероятности

$$(2/\sqrt{\pi})Q(\hat{\mu}) = (2/\sqrt{\pi}) \int_{\hat{\mu}}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \text{erf} \hat{\mu}. \quad (П7)$$

Воспользовавшись френелевским приближением для фазы (24), получим

$$\mu_{xl} = \sqrt{A_{xx}}(x'_{1l} - x'_{1s}), \quad \mu_{xu} = \sqrt{A_{xx}}(x'_{1u} - x'_{1s}), \quad (П8)$$

$$\mu_{yl} = \sqrt{A_{yy}}(y'_{1l} - y'_{1s}), \quad \mu_{yu} = \sqrt{A_{yy}}(y'_{1u} - y'_{1s}), \quad (П9)$$

$$h_{xs} = e^{i\pi/4} (A_{xx})^{-1/2}, \quad h_{ys} = e^{i\pi/4} (A_{yy})^{-1/2}. \quad (П10)$$

Согласно формуле (П10) из предыдущей работы [2] для “малой” площадки

$$\Delta Q_x \approx A_x e^{-i(\pi/4 - B_x)} \sin C_x / C_x, \quad (П11)$$

$$\Delta Q_y \approx A_y e^{-i(\pi/4 - B_y)} \sin C_y / C_y, \quad (П12)$$

где

$$A_x = \sqrt{A_{xx}} \Delta x, \quad (П13)$$

$$B_x = A_{xx} x'_{1s}, \quad (П14)$$

$$C_x = -A_{xx} x'_{1s} \Delta x. \quad (П15)$$

Выражения для A_y , B_y , C_y получаются соответственно из (П13), (П14), (П15) заменой $A_{xx} \rightarrow A_{yy}$, $\Delta x \rightarrow \Delta y$ и $x'_{1s} \rightarrow y'_{1s}$. Из уравнений стационарности фазы (28), (29) и (33) вытекает связь x'_{1s} , y'_{1s} с K'_{1x} , K'_{1y} (см. формулу (39)). Используя ее, можно получить

$$\Phi_s + B_x + B_y = \Phi_c \equiv k(R_{0c} + R_{2c}), \quad (П16)$$

а также

$$C_x = (-\Delta x/2)K'_{1x}, \quad C_y = (-\Delta y/2)K'_{1y}. \quad (П17)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюховецкий А. С. Переход от ближней к дальней зоне в решении задачи обратного рассеяния волн статистически неровной поверхностью // Радиофизика и радиоастрономия. – 2010. – Т. 15, № 4. – С. 408–424.
2. Брюховецкий А. С. Переход от ближней к дальней зоне в решении задачи рассеяния плоской волны статистически неровной поверхностью // Радиофизика и радиоастрономия. – 2012. – Т. 17, № 2. – С. 157–170.
3. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. – М.: Наука, 1972. – 424 с.
4. Valenzuela G. R. Scattering of Electromagnetic Waves from a Tilted Slightly Rough Surface // Radio Sci. – 1968. – Vol. 3, No. 11. – P. 1057–1066.
5. Barrick D. E. First Order Theory and Analysis of MF/VHF Scatter from the Sea // IEEE Trans. Antennas Propag. – 1972. – Vol. AP-20, No. 1. – P. 2–10.
6. Керр Д. Е. Распространение ультракоротких радиоволн / Пер. с англ. под ред. Б. А. Шиллерова. – М.: Сов. радио, 1954. – 710 с.
7. Эрдейи А. Асимптотические разложения. – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.
8. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – 373 с.
9. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. I. Флуктуации поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. – Т. 12, № 4. – С. 399–409.
10. Брюховецкий А. С. Рассеяние волн в ближней зоне статистически неровной поверхности. II. Средняя интенсивность и частотный спектр флуктуаций поля // Радиофизика и радиоастрономия. – 2008. – Т. 13, № 1. – С. 92–98.
11. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. – М.: Мир, 1978. – 547 с.
12. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
13. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. – М.: Физматгиз, 1962. – 608 с.
14. Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. – М.: Наука, 1975. – 439 с.

15. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
16. Crombie D. D. Doppler spectrum of sea echo at 13.56 Mc/s // Nature. – 1955. – Vol. 175, No. 4459. – P. 681–682.

А. С. Брюховецький

Інститут радіофізики та електроніки ім. А. Я. Усикова
НАН України,
вул. Ак. Проскури, 12, м. Харків, 61085, Україна

**ПЕРЕХІД ВІД БЛИЖНЬОЇ ДО ДАЛЬНЬОЇ ЗОНИ У
ДВОПОЗИЦІЙНОМУ РОЗСІЯННІ ХВИЛЬ СТАТИС-
ТИЧНО НЕРІВНОЮ ПОВЕРХНЕЮ**

Для випадку двопозиційного розсіяння хвиль статистично нерівною поверхнею знайдено асимптотики двократних інтегралів, що визначають часову кореляційну функцію розсіяного поля. Для невиродженого розсіяння (гессіан фази не дорівнює нулеві) використано метод стаціонарної фази. Для виродженого розсіяння (гессіан фази дорівнює нулеві) – комбінований метод: метод стаціонарної фази за однією змінною та наближення дифракції Фраунгофера

за іншою. Встановлено зв'язок з відомими в літературі результатами розрахунків.

А. S. Bryukhovetski

A. Usikov Institute of Radio Physics and Electronics,
National Academy of Sciences of Ukraine,
12, Akad. Proskura St., Kharkiv, 61085, Ukraine

**NEAR-TO-FAR ZONE TRANSITION IN A TWO-POINT
WAVE SCATTERING BY A STATISTICALLY ROUGH
SURFACE**

For a case of two-point wave scattering by a statistically rough surface, the asymptotics of double integrals of oscillating functions that determine the time correlation function of the scattered field are found. For nondegenerate scattering (hessian of phase is other than zero) the method of stationary phase has been used for calculations. For degenerate scattering (hessian of phase is zero) the combined method has been applied, namely, the method of stationary phase for one variable, and the Fraunhofer approximation for another variable. The correlation with the results known from literature has been established.

Статья поступила в редакцию 18.06.2013