

## МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТИСКУ В ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ ОБМЕЖЕНИХ ПЛАСТАХ З УРАХУВАННЯМ РІЗНИХ ТИПІВ ГРАНИЧНИХ УМОВ ТА КІЛЬКОСТІ СВЕРДЛОВИН

Л.М. Журавчак, А.Є. Струк

Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України,  
79060, Львів, вул. Наукова 3б, e-mail: lzhuravchak@ukr.net

*Обґрунтовано ефективність використання непрямого методу приграничних елементів для побудови розв'язку задачі про неусталений рух стисливої рідини в пружному пористому обмеженому кусково-однорідному пласті з урахуванням заданих дебіту або тиску на межі свердловин та гідронепроникності або тиску на зовнішній межі, а також ідеального контакту на межі поділу середовищ. З використанням фундаментального розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності та схеми послідовності початкових умов побудовано дискретно-континуальну модель задачі з довільними початковими умовами та різними типами граничних умов першого та другого роду. Здійснено низку обчислювальних експериментів для оцінки впливу параметрів моделі на зміну пластового тиску.*

Ключові слова: нестационарний процес зміни пластового тиску, непрямий метод приграничних елементів, горизонтально-неоднорідний пласт.

*Обоснована эффективность использования непрямого метода приграничных элементов для построения решения задачи о неустановившемся движении сжимаемой жидкости в упругом пористом ограниченном кусочно-однородном пласте с учетом заданных дебита или давления на границе скважин и гидроизоляции или давления на внешней границе, а также идеального контакта на границе раздела сред. С использованием фундаментального решения нестационарного уравнения теплопроводности и схемы последовательности начальных условий построена дискретно-континуальная модель задачи с произвольными начальными условиями и разными типами граничных условий первого и второго рода. Произведен ряд вычислительных экспериментов для оценки влияния параметров модели на изменение пластового давления.*

Ключевые слова: нестационарный процесс изменения пластового давления, непрямой метод приграничных элементов, горизонтально-неоднородный пласт.

*The article deals with the efficiency of an indirect near-boundary element technique used to solve the problem of unsettled compressible fluid motion in porous, elastic, closed piecewise-homogeneous reservoir, including given well production or pressure on the outer well and hydro-isolation or pressure border and also ideal contact at the media interface. Using the fundamental solution of the non-stationary thermal conductivity equation and sequence diagram of initial conditions, the problem's discrete-continual model with arbitrary initial and boundary conditions of the first and second type was created. Series of computational experiments to assess the influence of characteristics of environment on reservoir pressure change were carried out.*

Key words: non-stationary process of reservoir pressure change, indirect near-boundary element technique, horizontal-heterogeneous reservoir.

### Вступ

У нафтогазопромисловій геології найважливіше значення має неоднорідність нафтогазоносних пластів за фільтраційно-ємнісними властивостями, перш за все за проникністю, оскільки вона визначає співвідношення припливів нафти і газу до вибоїв свердловин, а отже, впливає на систему розробки покладу. Неоднорідність пласта зумовлює нерівномірність вироблення нафтових пластів і просування води під час експлуатації покладу та вивчається всією сукупністю геологічних, геофізичних і гідродинамічних методів. Першочергове значення для розпізнання неоднорідності має детальна попластова кореляція геологічно-геофізичних розрізів свердловин. Неоднорідність продуктивного пласта за його простяганням (т. зв. горизонтальна або зональна неоднорідність) проявляється в змінах товщини пластів, переривчастості колекторів і пов'язана з фаціальними заміщеннями і виклинюванням, чергуванням зон, складених пісковиками, алевролі-

тами, аргілітами і глинами по всій площі покладу, літологічними властивостями порід.

Математичне моделювання процесу розробки нафтового родовища, змодельованого кусково-однорідним пористим пластом полягає у складанні й розв'язуванні системи диференціальних рівнянь у часткових похідних, яка його описує, доповненої початковими умовами (тими, що існували до початку розробки), крайовими умовами (на поверхнях, які обмежують пласт із зовнішніх сторін і на стінках свердловини всередині пласта) та умовами контакту між зонами, що мають різні, але постійні фізичні характеристики. Припустивши, що товщина пласта і її зміна є досить малими порівняно з розмірами пласта в горизонтальній площині вздовж осей  $x_1$  і  $x_2$ , вертикальною складовою швидкості руху можна знехтувати і розв'язувати двовимірні рівняння руху для дуже протяжних пластів зі змінною товщиною  $h(x_1, x_2)$  [1]. Основна поширена на сьогодні модель однорідного за параметрами необмеженого пласта не

завжди адекватно описує реальне середовище і процеси, що відбуваються в ньому при видобутку нафти і газу.

Для оцінки впливу зміни коефіцієнтів гідро- та п'єзопровідності різних зон необхідно розглядати модель кусково-однорідного пласта, яка враховує просторову зміну його структурно-фаціальних і літолого-фізичних характеристик. Водночас фізичні характеристики (коефіцієнти гідро- та п'єзопровідності) зони пласта поблизу стінки свердловини (привибійна зона пласта), як правило, відрізняється від характеристик решти пласта. Ця зміна зумовлена забрудненням (кольматацією) пор  $U$  процесі буріння свердловини (фільтратом і дисперсною фазою бурового розчину) і під час експлуатації (відкладами парафіну, мінеральних солей) або цілеспрямованим використанням методів інтенсифікації продуктивності свердловини (солянокислотне оброблення тощо). Для оцінки впливу такої зміни коефіцієнтів у привибійній зоні внаслідок кольматації чи інтенсифікації на тиск чи дебіт свердловини теж необхідно розглядати модель кусково-однорідного пласта.

**Математична модель для знаходження тиску у кусково-однорідному пласті**

Розглянемо еліптичний пласт  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{12}$  з півосями  $a, b$ , що містить концентричну свердловину радіусом  $R_c$ , навколо якої виділяється зона  $\Omega_2$  з фізичними характеристиками, що відмінні від характеристики решта пласта, а також з двома іншими свердловинами радіусом  $R_c$ , розміщеними в  $\Omega_1$  поблизу зовнішнього контура. Межа поділу зон  $\Gamma_{12} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$  є колом з радіусом  $R_2$  чи еліпсом з півосями  $a_2, b_2$ , де  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – межі областей  $\Omega_1, \Omega_2$ . Ця модель реалізує гіпотезу про кускову однорідність пласта як по площі, так і по вертикальному розрізу покладу.

Для розрахунку зміни тиску в часі у кожній точці областей  $\Omega_m$  ( $m=1,2$ ) для випадку пружного режиму розв'яжемо систему диференціальних рівнянь, що описують неусталений (нестационарний) рух пружної (стисливої) рідини в пружному пористому середовищі, змодельованому двовимірним кусково-однорідним пластом  $\Omega$  з довільною криволінійною межею:

$$\mathbf{P}_{0\tau}^{(m)}(p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)) = \frac{\partial^2 p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_2^2} - \frac{1}{k_m} \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = 0, (\mathbf{x}, \tau) \in \Omega_m \times \mathbf{T}, m = 1, 2 \quad (1)$$

Припустивши необхідність визначення зміни пластового тиску у замкненому покладі за умов ідеального контакту між зонами, отримуємо:

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau), (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T},$$

$$-\varepsilon_1 \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} = -\varepsilon_2 \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(2)}(\mathbf{x})}, \quad (2)$$

граничних умов на зовнішньому контурі та на межах свердловин, розміщених в зонах  $\Omega_2$  та  $\Omega_1$ :

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = p_z^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) \text{ або}$$

$$-\varepsilon_1 \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} = 0, (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z^{(1)} \times \mathbf{T}, \quad (3)$$

$$p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = p_{cl}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau), (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{cl}^{(1)} \times \mathbf{T}, \text{ або}$$

$$-\varepsilon_1 \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} = q_{zl}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau), l=1, 2, \quad (4)$$

$$p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) = p_c^{(2)}(\mathbf{x}, \tau), (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_c^{(2)} \times \mathbf{T} \text{ або}$$

$$-\varepsilon_2 \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(2)}(\mathbf{x})} = q_z^{(2)}(\mathbf{x}, \tau), \quad (5)$$

і початкових умов

$$p^{(m)}(\mathbf{x}, 0) = p_0^{(m)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_m. \quad (6)$$

Тут  $p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$  – тиск в області  $\Omega_m$ ;

$\varepsilon_m = k_m h / \mu_m$  – коефіцієнт гідропровідності породи в  $\Omega_m$ ;

$k_m = k_m / (\mu_m \beta_m^*)$  – коефіцієнт п'єзопровідності;

$k_m$  – коефіцієнт проникності;

$\mu_m$  – динамічний коефіцієнт в'язкості рідини;

$\beta_m^*$  – коефіцієнт пружної ємності насиченого пласта в області  $\Omega_m$ ;

$$\Gamma_{12} \cup \Gamma_z^{(1)} \cup_{l=1}^2 \Gamma_{cl}^{(1)} = \Gamma_1;$$

$$\Gamma_{12} \cup \Gamma_c^{(2)} = \Gamma_2;$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – декартові координати;

$\tau$  – час,

$\mathbf{T} = \{ \tau : 0 < \tau < \infty \}$ ,

$h$  – товщина пласта;

$p_0^{(m)}(\mathbf{x})$  – початковий пластовий тиск в області  $\Omega_m$ ;

$\mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x}) = (n_1^{(m)}(\mathbf{x}), n_2^{(m)}(\mathbf{x}))$  – однозначно визначена зовнішня нормаль до межі області  $\Omega_m$ ;

$$q_z^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{q_c^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi R_c}; q_{lz}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{q_{cl}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau)}{2\pi R_c};$$

$q_{cl}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau), q_c^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)$  – дебіт свердловин.

**Побудова інтегральних зображень розв'язків початково-крайової задачі та граничних інтегральних рівнянь**

Згідно з основними положеннями непрямого методу приграничних елементів (НМПГЕ) [2] у зовнішніх приграничних до  $\Omega_m$  багатозв'язних областях  $G_1 = G_{1z} \cup G_{12} \cup_{l=1}^2 G_{1cl}$ ,  $G_2 = G_{21} \cup G_{2c}$  введемо невідомі функції  $\varphi^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$ , які описують розподіл невідомих

фіктивних джерел тиску. Після розширення області визначення функцій  $p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$  на всю площину  $\mathbf{R}^{2m}$ , рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{P}_{0\tau}^{(m)}(p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)) = -\varphi^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)\chi_{G_m} - p_0^{(m)}(\mathbf{x})\delta(\tau),$$

$$(\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^{2m} \times \mathbf{T}, \quad (7)$$

де  $\chi_{G_m}$  – характеристична функція області  $G_m$ , тобто  $\chi_{G_m} = 1$  при  $\mathbf{x} \in G_m$ ,  $\chi_{G_m} = 0$  при  $\mathbf{x} \notin G_m$ ,

$\delta(z)$  – дельта-функція Дірака.

Оскільки для оператора  $\mathbf{P}_{0\tau}^{(m)}(p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau))$  існує й відомий фундаментальний розв'язок  $U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)$  [3], то інтегральне зображення розв'язку рівняння (7) та його похідних за нормальними з урахуванням початкового розподілу (6) мають вигляд

$$p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(m)}) + b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(m)}),$$

$$(\mathbf{x}, \tau) \in \mathbf{R}^{2m} \times \mathbf{T}, \quad (8)$$

$$-\varepsilon_m \frac{\partial p^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(m)}(\mathbf{x})} = \mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(m)}) + b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(m)}), (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_m \times \mathbf{T}, \quad (9)$$

$$-\varepsilon_2 \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} = \mathbf{F}_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1,2)}) + b_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1,2)}), (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T}, \quad (10)$$

де

$$\mathbf{F}_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \Phi) = \int_0^\tau \int_{\Gamma_m} \Phi(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \varphi^{(m)}(\xi, \xi_4) d\Gamma_m(\xi) d\xi_4,$$

$$\Phi \in \{U^{(m)}, Q^{(m)}, Q^{(1,2)}\}, \quad (11)$$

$$b_\tau^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \Phi) = \int_{\Omega_{m0}} \Phi(\mathbf{x}, \tau, \xi, 0) p_0^{(m)}(\xi) d\Omega_{m0}(\xi), \quad (12)$$

$$U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \frac{1}{4\pi\kappa_m(\tau - \xi_4)} \exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa_m(\tau - \xi_4)}\right),$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2, \quad \xi_4 \in T,$$

$$Q^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \varepsilon_m \sum_{l=1}^2 Q_l^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \mathbf{n}_l^{(m)}(\mathbf{x})$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^2 y_i^2, \quad y_i = x_i - \xi_i,$$

$$Q_l^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = -\frac{\partial U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4)}{\partial x_l} =$$

$$= \frac{U^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) y_l}{2\kappa_m(\tau - \xi_4)} = \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa_m(\tau - \xi_4)}\right) y_l}{8\pi\kappa_m^2(\tau - \xi_4)^2},$$

$$Q^{(1,2)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) = \varepsilon_2 \sum_{l=1}^2 Q_l^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, \xi, \xi_4) \mathbf{n}_l^{(1)}(\mathbf{x}),$$

$\Omega_{m0} = \Omega_m \cup \Omega_{mp}$ ,  $\Omega_{mp}$  – багатозв'язна область продовженої початкової умови [2], в якій початковий тиск лінійно спадає від значення на межі  $\Gamma_m$  до нульового. Зауважимо, що  $\Omega_{mp}$  та  $G_m$  не повинні співпадати, хоч і можуть.

Спрямувавши в (8)-(10)  $x$  зсередини області  $\Omega_m$  до меж  $\Gamma_m$  для задоволення умов (2)-(5), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГР), які зв'язують невідомі  $\varphi_m(\xi, \xi_4)$  з відомими  $p_0^{(m)}(\xi)$  та заданими на контурі свердловин функціями

$$\mathbf{F}_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(1)}) - \mathbf{F}_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(2)}) = b_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(2)}) - b_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(1)}), (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T}, \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1)}) - \mathbf{F}_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1,2)}) = b_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1,2)}) - b_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1)}), (\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{12} \times \mathbf{T}, \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(1)}) = p_z^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(1)})$$

або  $\mathbf{F}_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1)}) = -b_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1)}),$

$$(\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_z^{(1)} \times \mathbf{T}, \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(1)}) = p_{cl}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(1)})$$

або  $\mathbf{F}_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1)}) = q_{zl}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau^{(1)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(1)}),$

$$(\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_{cl}^{(1)} \times \mathbf{T}, \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(2)}) = p_c^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, U^{(2)})$$

або  $\mathbf{F}_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(2)}) = q_{zc}^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) - b_\tau^{(2)}(\mathbf{x}, \tau, Q^{(2)}),$

$$(\mathbf{x}, \tau) \in \Gamma_c^{(2)} \times \mathbf{T}. \quad (17)$$

### Просторово-часова дискретизація математичної моделі

Оскільки виконати аналітичне інтегрування у рівняннях (13)-(17) для прикладних задач внаслідок довільності області  $\Omega$  практично неможливо, здійснимо просторово-часову дискретизацію за допомогою таких кроків. Межі  $\Gamma_m$  та області  $G_m$  дискретизовано відповідно на  $V_m$  граничних  $\Gamma_{mv}$  та приграничних  $G_{mv}$  елементів, причому ділянки, що належать зовнішньому контуру, на  $V_{1z}$ , контури свердловин – на  $V_{1lc}$ ,  $V_{2c}$ , межу поділу середовищ – на  $V_{12}$ , тобто

$$\cup_{v=1}^{V_m} \Gamma_{mv} = \Gamma_m, \quad \cup_{v=1}^{V_{1z}} \Gamma_{lv} = \Gamma_z^{(1)},$$

$$\cup_{v=V_{1z}+1}^{V_{1z}+V_{12}} \Gamma_{lv} = \cup_{v=1}^{V_{12}} \Gamma_{2v} = \Gamma_{12},$$

$$\cup_{v=V_{1z}+V_{12}+1}^{V_1} \Gamma_{lv} = \Gamma_{cl}^{(1)} \cup \Gamma_{c2}^{(1)}$$

$$\cup_{v=V_{12}+1}^{V_2} \Gamma_{2v} = \Gamma_c^{(2)},$$

$$V_1 = V_{1z} + V_{12} + V_{1lc} + V_{12c}, \quad V_2 = V_{12} + V_{2c},$$

граничні елементи між собою не перетинаються. Тоді невідомі функції, які описують розподіл фіктивних джерел тиску в межах приграничних елементів  $G_{mv}$ , позначимо через  $\varphi_v^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$ . Области  $\Omega_m$  та  $\Omega_{mp}$  дискретизуємо на криволінійні елементи другого порядку з 8-ми вузлами  $\Omega_{mq}$  ( $q=1, \dots, Q_m$ ),  $\Omega_{mpq}$  ( $q=1, \dots, Q_{mp}$ ) [4].

Для зручності опису залежності функцій  $\varphi_v^{(m)}(\mathbf{x}, \tau)$  від часу часовий промінь  $T$  розбито на інтервали  $T_k = [\tau_{k-1}, \tau_k]$  ( $k=1, 2, \dots, \tau_0=0$ ) і в межах кожного  $T_k$  ( $k=1, \dots, K, K>1$ ) ці функції апроксимовано постійними  $d_v^{mk}$ . Дискретно-континуальну модель побудовано для покрокової часової схеми – схеми послідовності початкових умов (СППУ) [2, 5].

Кожен крок за часом  $T_k$  розглянуто як нову задачу, тобто уведено локальний час  $\tilde{\tau} = \tau - \sum_{p=1}^{k-1} \Delta\tau_p$  ( $\Delta\tau_k$  – величина часового приросту на  $k$ -му кроці) і обчислені в кінці  $(k-1)$ -го часового інтервалу значення  $p^{(m)}(\mathbf{x}, \Delta\tau_{k-1})$  у внутрішніх точках використано як початкові для наступного  $k$ -го кроку.

Оператори  $F_{\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \Phi^{(m)})$  (11) та  $b_{\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tau, \Phi^{(m)})$  (12) після просторово-часової дискретизації для  $K$ -го кроку ( $\sum_{k=1}^{K-1} \Delta\tau_k < \tau \leq \sum_{k=1}^K \Delta\tau_k, 0 < \tilde{\tau} \leq \Delta\tau_K$ ) отримано у вигляді

$$F^{mK}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_{\tau}^{(m)}) = \sum_{v=1}^{V_m} A_v^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_{\tau}^{(m)}) d_v^{mK},$$

$$b^{mK}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi^{(m)}) =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q_m+Q_{mp}} \int_{\Omega_{m0q}} \Phi^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, 0) p_0^{(mK)}(\xi) d\Omega_{m0q}(\xi), \quad (18)$$

де  $p_0^{(m1)}(\mathbf{x}) = p_0^{(m)}(\mathbf{x}), p_0^{(mk)}(\mathbf{x}) = p^{(m)}(\mathbf{x}, \Delta\tau_{k-1}), k > 1, \mathbf{x} \in \Omega_m$ , а в  $\Omega_{m0}$  лінійно спадає від значення на межі  $\Gamma_m$  до нульового;

$$A_v^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \Phi_{\tau}^{(m)}) = \int_{\Gamma_{mv}} \Phi_{\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) d\Gamma_{mv}(\xi);$$

$$\Phi_{\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \int_0^{\tilde{\tau}} \Phi^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi, \xi_4) d\xi_4;$$

$$U_{\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \frac{1}{4\kappa_m \pi} E_1(\beta_{2m}),$$

$E_1(\beta) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{\exp(-z)}{z} dz$  – інтегро-показникова функція [6];

$$Q_{\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \varepsilon_m \sum_{l=1}^2 Q_{l\tau}^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) \mathbf{n}_l^{(m)}(\mathbf{x});$$

$$\beta_{2m} = \frac{r^2}{4\kappa_m \tilde{\tau}};$$

$$Q_d^{(m)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \frac{y_l}{2\kappa_m \pi r^2} \exp(-\beta_{2m});$$

$$Q_{\tau}^{(1,2)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) = \varepsilon_2 \sum_{l=1}^2 Q_{l\tau}^{(2)}(\mathbf{x}, \tilde{\tau}, \xi) \mathbf{n}_l^{(1)}(\mathbf{x}).$$

**Дискретно-континуальна модель для знаходження невідомих інтенсивностей джерел тиску, введених у приграничних елементах**

Для задоволення умов контакту (2) та граничних умов (3)-(5) використано колокаційну методику. Точки колокації вибрано у кінцевий моменти часу  $\Delta\tau_K$  у середині кожного граничного елемента  $\Gamma_{mw}, w=1, \dots, V_m$ . З ГІР (13)-(17) після просторово-часової дискретизації для  $K$ -го кроку одержимо СЛАР, що відповідають різним типам задання граничних умов.

Зокрема, у випадку **гідронепроникності зовнішнього контура та відомого дебіту свердловин**, розміщених в зонах  $\Omega_m$ , маємо:

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, Q_{\tau}^{(1)}) d_v^{1K} = -b^{1K}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, Q^{(1)}),$$

$$x^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_z^{(1)}, w=1, \dots, V_{1z}, \quad (19)$$

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, U_{\tau}^{(1)}) d_v^{1K} - \sum_{v=1}^{V_2} A_v^{(2)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, U_{\tau}^{(2)}) d_v^{2K} =$$

$$= -b^{1K}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, U^{(1)}) + b^{2K}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, U^{(2)}),$$

$$x^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{12}, w=V_{1z}+1, \dots, V_{1z}+V_{12}, \quad (20)$$

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, Q_{\tau}^{(1)}) d_v^{1K} - \sum_{v=1}^{V_2} A_v^{(2)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, Q_{\tau}^{(2)}) d_v^{2K} =$$

$$= -b^{1K}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, Q^{(1)}) + b^{2K}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, Q^{(1,2)}),$$

$$x^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{12}, w=V_{1z}+1, \dots, V_{1z}+V_{12}, \quad (21)$$

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, Q_{\tau}^{(1)}) d_v^{1K} = q_{l_z}^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K) -$$

$$-b^{1K}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, Q^{(1)}),$$

$$x^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{cl}^{(1)}, w=V_{1z}+V_{12}+1, \dots, V_1, \quad (22)$$

$$\sum_{v=1}^{V_2} A_v^{(2)}(\mathbf{x}^{2w}, \Delta\tau_K, Q_{\tau}^{(2)}) d_v^{2K} = q_z^{(2)}(\mathbf{x}^{2w}, \Delta\tau_K) -$$

$$-b^{2K}(\mathbf{x}^{2w}, \Delta\tau_K, Q^{(2)}),$$

$$x^{2w} \in \Gamma_{2w} \subset \Gamma_c^{(2)}, w=V_{12}+1, \dots, V_2. \quad (23)$$

Для **гідронепроникливого зовнішнього контура та відомого тиску на межах свердловин**, розміщених в зонах  $\Omega_m$ , маємо СЛАР, складену з рівнянь (19)-(21) та наступних:

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, U_\tau^{(1)}) d_v^{1K} = p_z^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K) - b^{1K}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, U^{(1)}),$$

$$x^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{cl}^{(1)}, w = V_{1z} + V_{12} + 1, \dots, V_1, (24)$$

$$\sum_{v=1}^{V_2} A_v^{(2)}(\mathbf{x}^{2w}, \Delta\tau_K, U_\tau^{(2)}) d_v^{2K} = p_c^{(2)}(\mathbf{x}^{2w}, \Delta\tau_K) - b^{2K}(\mathbf{x}^{2w}, \Delta\tau_K, U^{(2)}), x^{2w} \in \Gamma_{2w} \subset \Gamma_c^{(2)}, w = V_{2z} + V_{12} + 1, \dots, V_2. (25)$$

У випадку задання тиску на зовнішньому контурі та дебіту на межах свердловин, розміщених в зонах  $\Omega_m$ , СЛАР складається з рівнянь (20)-(23) та наступного:

$$\sum_{v=1}^{V_1} A_v^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, U_\tau^{(1)}) d_v^{1K} = p_z^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K) - b^{1K}(\mathbf{x}^{1w}, \Delta\tau_K, U^{(1)}), x^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_z^{(1)}, w = 1, \dots, V_{1z}. (26)$$

Якщо відомі тиски на зовнішній межі та на контурах свердловин, то у СЛАР входять рівняння (20), (21) та (24)-(26).

Зрозуміло, що для постійного кроку за часом матрицю систем (19)-(23); (19)-(21), (24), (25); (19)-(24), (26) або (20), (21), (24)-(26) обчислено один раз і збережено у пам'яті комп'ютера.

Знайшовши невідомі  $d_v^{mK}$ , використаємо формули, аналогічні (8)-(10), для обчислення шуканих тисків у вузлах, що описують внутрішні елементи  $\Omega_{mq} \in \Omega_m$ , в момент часу  $\Delta\tau$ :

$$p^{(mK)}(\mathbf{x}^{mqs}, \Delta\tau) = \sum_{v=1}^{V_m} A_v^{(m)}(\mathbf{x}^{mqs}, \Delta\tau, U_\tau^{(m)}) d_v^{mK} + b^{mK}(\mathbf{x}^{mqs}, \Delta\tau, U^{(m)}), \mathbf{x}^{mqs} \in \Omega_{mq}, s=1, \dots, 8,$$

ці значення використано в операторі (18) для формування правої частини СЛАР на наступному часовому кроці.

### Чисельні дослідження

**Задача 1.** Для оцінки впливу коефіцієнтів у привибійній зоні внаслідок кольматації чи інтенсифікації на тиск свердловини розглянуто область  $\Omega$ , вибрану у формі еліпса з півосями  $a=200$ м,  $b=150$  м, з круглою центральною свердловиною радіусом  $R_c=0.1$  м, розміщеною в області  $\Omega_2$ , яка мала вигляд круга радіусом  $R_2=1$  м. Отже, межа поділу середовищ мала вигляд:  $\Gamma_{12} = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = R_2\}$ .

На зовнішньому контурі й на межі свердловини тиск спадав з часом:

$$p_z^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = P^{(1)}(\tau) = \frac{P_z - 0.00k(\Delta\tau) \cdot 10^6}{86400} \text{ Па}, (27)$$

$$p_c^{(2)}(\mathbf{x}, \tau) = P^{(2)}(\tau) = \frac{P_w - 0.05k(\Delta\tau) \cdot 10^6}{86400} \text{ Па}, (28)$$

де  $P_z = 20 \cdot 10^6$  Па,  $P_w = 16 \cdot 10^6$  Па,

Початковий розподіл тиску у пласті з урахуванням узгодженості початкової та граничних умов моделювали у вигляді функції:

$$p_0^{(m)}(\mathbf{x}) = P_z - \frac{(P_z - P_w)(r - r_{el})}{(R_c - r_{el})}, (29)$$

де  $r, r_{el}$  – відстані в полярних координатах до точки  $\mathbf{x}$  та до відповідної їй на зовнішній межі еліпса.

Часовий інтервал  $\mathbf{T} = \{\tau : 0 < \tau < 864000\}$  с (10 діб) рівномірно розбивали на 100 проміжків, крок за часом вибирали постійним  $\Delta\tau = 8640$  с (0.1 доби). Зовнішню межу рівномірно розбивали на 16 граничних елементів ( $V_{1z} = 16, V_{2z} = 0$ ), контур центральної свердловини – на  $V_{2c} = 2$ , межу контакту – на  $V_{12} = 8$ . Товщини приграничних областей та областей продовжених початкових умов були такими:  $h_z = h_{pz} = 20$  (для зовнішнього контура),  $h_w = h_{pw} = 0.05$  (для свердловини) та  $h_{12cont} = h_{p12cont} = 7, h_{21cont} = h_{p21cont} = 20$  (для межі контакту), тобто СЛАР (20), (21), (24)-(26) складалась з 34 рівнянь. Кількість внутрішніх елементів, на які дискретизували області  $\Omega_1, \Omega_2$  та  $\Omega_{mp}$  дорівнювала відповідно  $Q_1 = 32, Q_2 = 8, Q_{1p} = 24, Q_{2p} = 18$  (зрозуміло, що вона ніяк не впливала на розмірність матриці, оскільки інтеграл від початкової умови входить у праву частину СЛАР (20), (21), (24)-(26).

Фізичні характеристики пласта вибирали такими:  $k_1 = 0.16 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ ;  $k_2 = 0.08 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ ;  $\mu_1 = 0.707 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ;  $\mu_2 = 1.232 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ;  $\beta_1^* = 7.07 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ ;  $\beta_2^* = 4.06 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ ;  $h = 18$ м;

Оскільки похибки, що виникають під час застосування непрямого методу приграничних елементів, зумовлені тільки процедурами апроксимації, дискретизації та числового інтегрування, спочатку досліджували точність задоволення граничних умов та умов ідеального контакту в різні моменти часу:

$$\delta p_{z1}(\mathbf{x}^{1w}, l\Delta\tau) = \frac{p^{(1)}(\mathbf{x}^{1w}, l\Delta\tau) - P_z(l\Delta\tau)}{P_z(l\Delta\tau)}, \mathbf{x}^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_z^{(1)}, (30)$$

$$\delta p_{w2}(\mathbf{x}^{2w}, l\Delta\tau) = \frac{p^{(2)}(\mathbf{x}^{2w}, l\Delta\tau) - P_{w1}(l\Delta\tau)}{P_{w1}(l\Delta\tau)}, \mathbf{x}^{2w} \in \Gamma_{2w} \subset \Gamma_w^{(2)}, (31)$$

$$\delta \Phi_{12}(\mathbf{x}^{1w}, l\Delta\tau) = \frac{p^{(1)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau) - p^{(2)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{p^{(1)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}, \mathbf{x}^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{12}, (32)$$

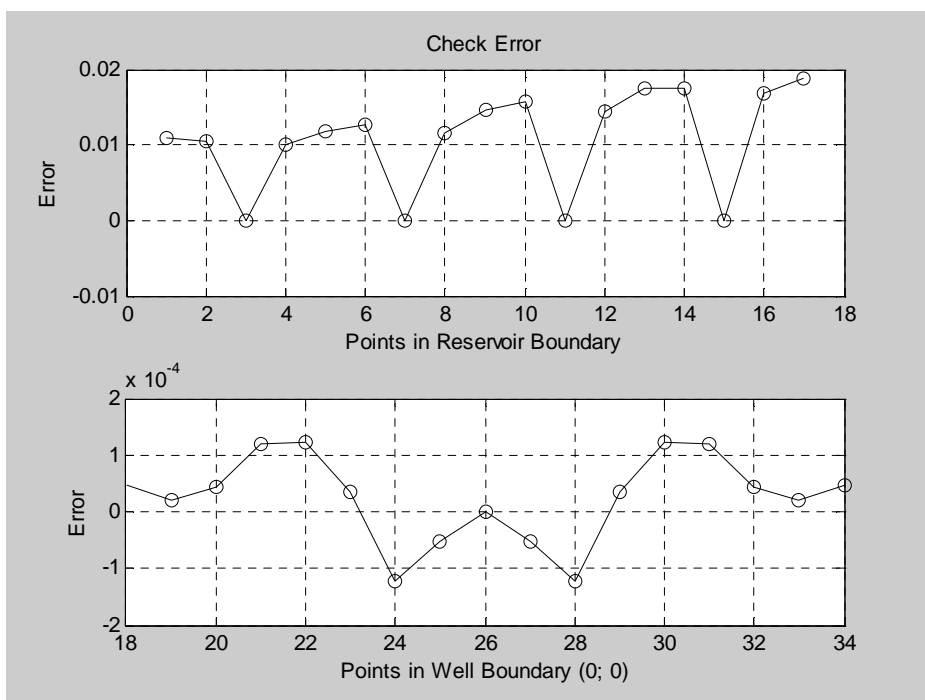


Рисунок 1 – Точність задоволення граничних умов на чвертині зовнішнього контури та на половині межі свердловини

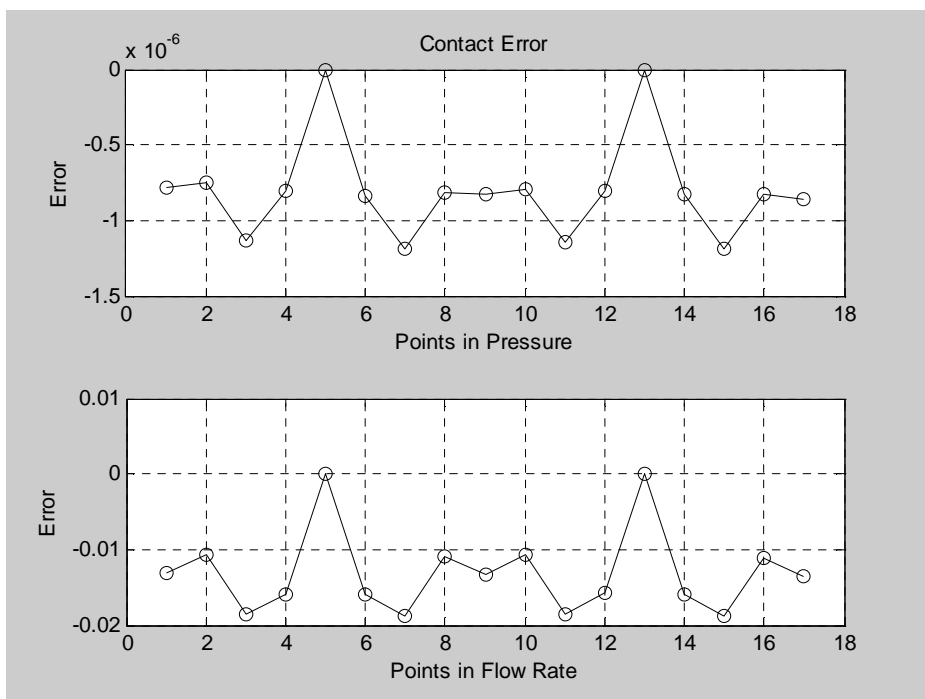


Рисунок 2 – Точність задоволення умов ідеального контакту на межі поділу середовищ непрямым методом приграничних елементів

$$\delta_{12}(\mathbf{x}^{1w}, l\Delta\tau) = \frac{\varepsilon_1 \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})} - \varepsilon_2 \frac{\partial p^{(2)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})}}{\varepsilon_1 \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}^{mw}, l\Delta\tau)}{\partial \mathbf{n}^{(1)}(\mathbf{x})}},$$

$$\mathbf{x}^{1w} \in \Gamma_{1w} \subset \Gamma_{12}. \quad (33)$$

На рис. 1, 2 зображено відносні похибки задоволення граничних умов у момент часу

$\Delta\tau = 21600$  с на першій чверті зовнішнього контура, на половині межі свердловини та на межі контакту, обчислені відповідно за формулами (30)-(33).

Зауважимо, що у точках колокації похибка відсутня; найбільша похибка спостерігається з наближенням до кінців граничних елементів. Усередині області похибки будуть меншими внаслідок виконання принципу максимуму. На рис. 3 подано отриманий непрямым методом

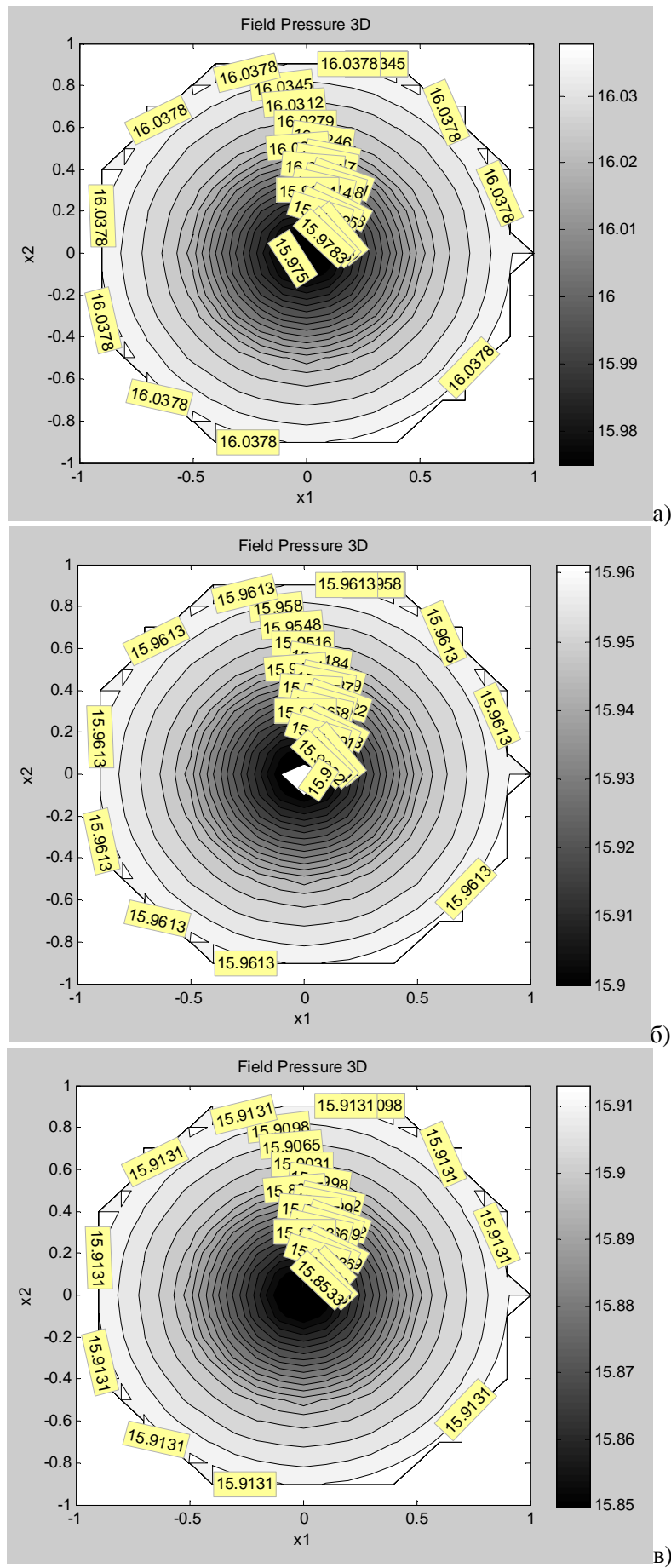


Рисунок 3 – Розподіл тиску в області  $\Omega_2$  у різні моменти часу: 0.5 доби (а), 2 доби (б), 3 доби (в)

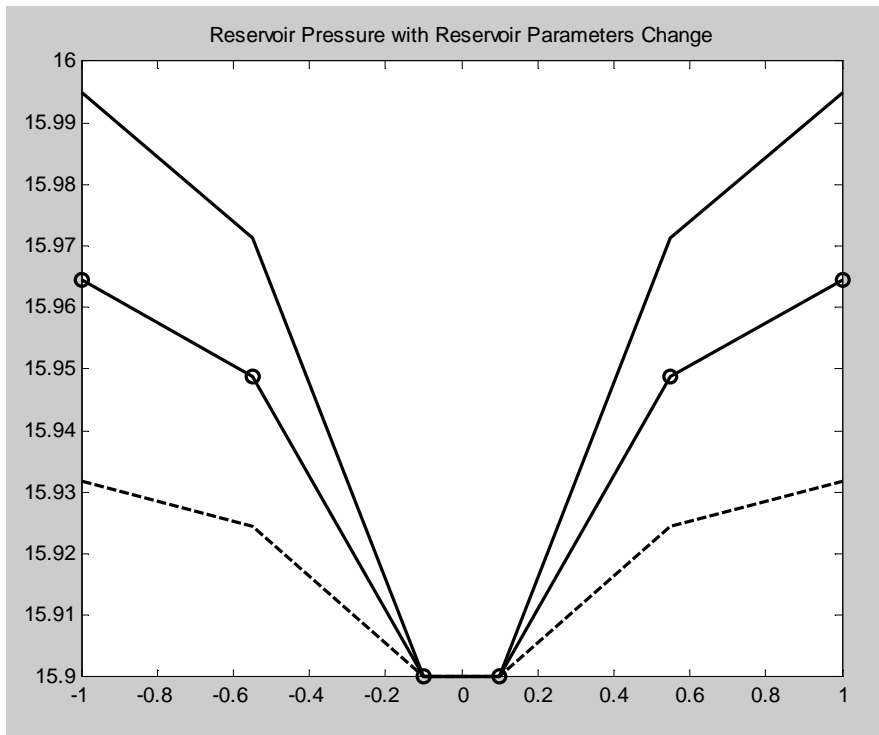


Рисунок 4 – Розподіл тиску в області  $\Omega_2$  у момент часу 2 доби з врахуванням впливу характеристик середовищ

приграничних елементів розподіл тиску в області  $\Omega_2$  з центральною свердловиною. На рис. 4 подано розподіл тиску в області  $\Omega_2$  з врахуванням впливу характеристик середовища на тиск, при цьому суцільна лінія – тиск, отриманий за значень

$$k_1 = 0.16 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2; k_2 = 0.08 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2;$$

$$\mu_1 = 0.707 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \mu_2 = 1.232 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с};$$

$$\beta_1^* = 7.07 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \beta_2^* = 4.06 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$$

(значини фізичних характеристик в області  $\Omega_2$  удвічі менші, ніж в області  $\Omega_1$ ); пунктирна –

$$k_1 = k_2 = 0.16 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2; \mu_1 = \mu_2 = 0.707 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с};$$

$\beta_1^* = \beta_2^* = 7.07 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$  (середовище однорідне); криві з символами «o» –

$$k_1 = 0.12 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2; k_2 = 0.08 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2;$$

$$\mu_1 = 0.898 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \mu_2 = 1.232 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с};$$

$$\beta_1^* = 5.56 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; \beta_2^* = 4.06 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$$

(значини фізичних характеристик в області  $\Omega_2$  в півтора рази менші, ніж в області  $\Omega_1$ ). Як бачимо, зменшення коефіцієнта п'єзопровідності в  $\Omega_2$  веде до зменшення тиску в точках пласта, що належать  $\Omega_2$ .

**Задача 2.** Для оцінки впливу фізичних коефіцієнтів на тиск з врахуванням структурних порушень розглянуто область  $\Omega$ , вибрану у формі еліпса з півсями  $a=200\text{м}$ ,  $b=150\text{ м}$ , з трьома свердловинами радіусом  $R_c=0.1\text{ м}$

(центральна розміщена в області  $\Omega_2$ , дві інші – в  $\Omega_1$ ), причому межі поділу середовищ  $\Gamma_{12}$  мали форму еліпса з півсями  $a_2=50\text{ м}$ ,  $b_2=37.5\text{м}$ . Координати центрів двох інших свердловин були такими:  $x_{1,1c}^{(1)} = -175, x_{2,1c}^{(1)} = 0$ ;  $x_{1,2c}^{(1)} = 175, x_{2,2c}^{(1)} = 0$ .

На зовнішньому контурі й на межі центральної свердловини тиск спадав з часом як функції (27)-(28), а на межі двох інших був заданий формулою:

$$p_{lc}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) = P_l^{(1)}(\tau) = \frac{P_{0l}^{(1)} - 0.05k(\Delta\tau) \cdot 10^6}{86400} \text{ Па},$$

де  $P_{01}^{(1)} = P_{02}^{(1)} = 17 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

Початковий розподіл тиску у пласті з урахуванням узгодженості початкової та граничних умов моделювали у вигляді функції (29). Кількість та товщини приграничних елементів вибирали аналогічно, як в задачі 1, окрім того, контури двох інших свердловин дискретизували на  $V_{11c} = V_{12c} = 2$ , область  $\Omega_1$  розбивали на  $Q_1 = 36$  внутрішніх елементів, область продовженої початкової умови на  $Q_{1p} = 28$  елементів, а СЛАР складалась з 38 рівнянь, а крок за часом брали рівним  $\Delta\tau = 21600\text{ с}$  (0.25 доби).

На рис. 5 подано отриманий непрямим методом приграничних елементів розподіл тиску в пласті з трьома свердловинами, при цьому  $h_{12cont} = h_{p12cont} = 10$ . На рис. 6 подано розподіл тиску в пласті з трьома свердловинами з урахуванням кроку за часом:



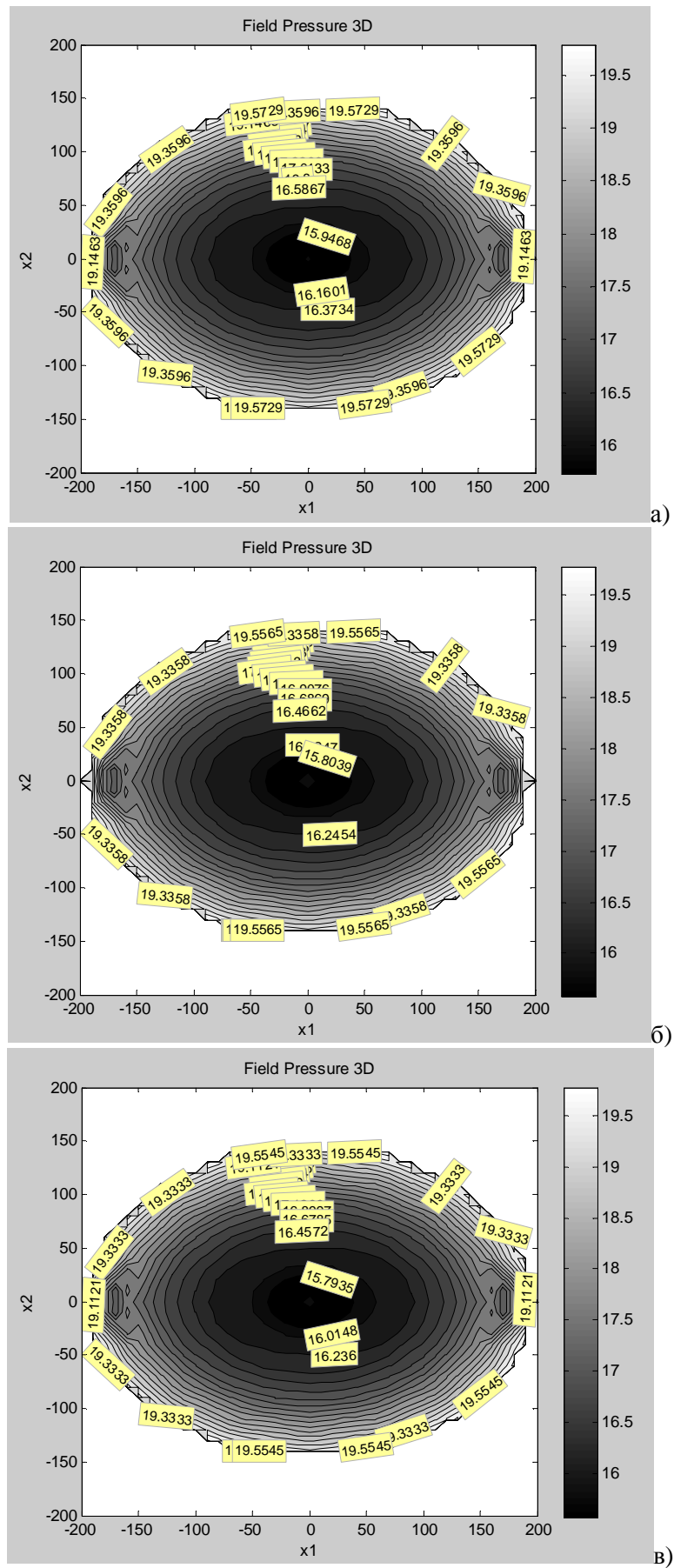


Рисунок 5 – Розподіл тиску в пласті з трьома свердловинами у різні моменти часу: 0.5 діб (а), 2 доби (б), 3 доби (в), кроком за часом 0.25 доби

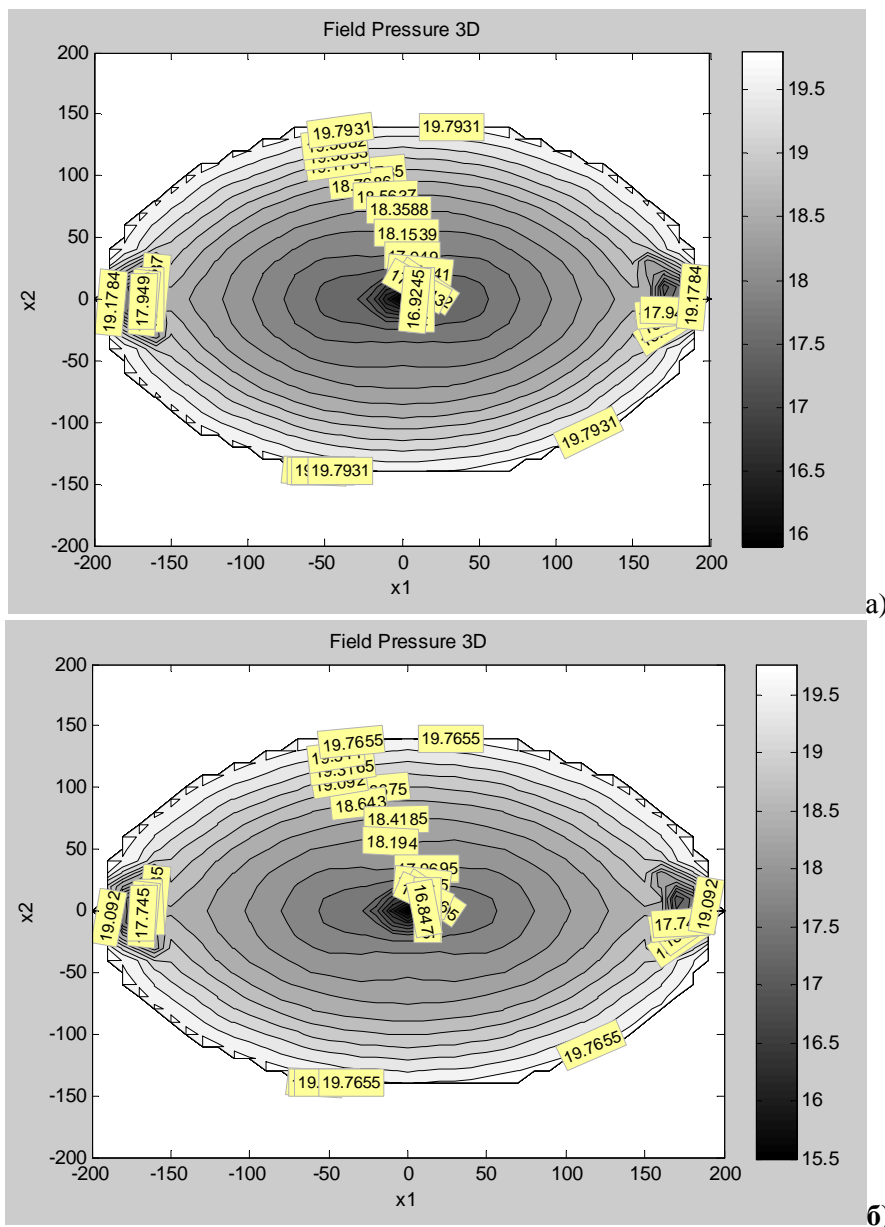


Рисунок 6 – Розподіл тиску в пласті з трьома свердловинами у різні моменти часу: 2 діб (а), 10 діб (б), кроком за часом 1 доба

$$\begin{aligned} & \pi h_{12cont} = h_{21cont} = 6, \\ & k_1 = 0.12 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \quad k_2 = 0.08 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \\ & \mu_1 = 0.898 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_2 = 1.232 \cdot 10^{-3} \text{ Па}, \\ & \beta_1^* = 5.56 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad \beta_2^* = 4.06 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1} \end{aligned}$$

і кроком за часом  $\Delta\tau = 86400 \text{ с}$  (1 доба).

### Висновки

Побудовано наближені до реальних середовищ математичні моделі зміни в часі тиску (двовимірні обмежені кусково-однорідні пласти з криволінійними межами) з урахуванням ідеального контакту на межі поділу середовищ, кількості свердловин, гідронепроникності зовнішнього контура, депресії тисків та дебіту свердловин. Для знаходження розв'язку задачі використано непрямий метод приграничних елементів спільно з часовою схемою послідовності

початкових умов, що дозволило точно задовольнити рівняння в усій досліджуваній області та контролювати похибку задоволення граничних умов на її межах та на межі поділу середовищ (внаслідок можливості вибору кроку за часом, кількості приграничних елементів, товщин приграничних областей та областей продовжених початкових умов). Здійснено програмну реалізацію запропонованого чисельно-аналітичного підходу з використанням системи MATLAB та проведено низку досліджень впливу фізичних та часових параметрів на розподіл тиску і дебіту у привибійній зоні свердловин, що дає можливість оцінити можливість інтенсифікації їх роботи.

Розроблена методика може бути розширена для врахування залежності фізичних характеристик від координат, що ми і плануємо здійснити в наступних дослідженнях.

## Література

- 1 Бойко В.С. Підземна гідрогазомеханіка: підручник / В.С.Бойко, Р.В.Бойко. – Львів: Апріорі, 2007. – 452 с.
- 2 Журавчак Л.М. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики / Л.М.Журавчак, Є.Г.Грицько. – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
- 3 Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
- 4 Методы граничных элементов / К.Бреббия, Ж.Теллес, Л.Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
- 5 Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П.Бенерджи, Р.Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
- 6 Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. под ред. А.А.Абрамовица И.И.Стиган – М.: Наука, 1979. – 832 с.
- 7 Журавчак Л.М. Розв'язування задач неусталеної фільтрації пружної рідини в недеформівному пористому пласті методом приграничних елементів / Л.М.Журавчак, А.Є.Струк : Матеріали наукової конференції-семінару «Сейсмологічні та геофізичні дослідження в сейсмоактивних регіонах» (м. Львів, 29-30 травня 2012 р.). – Львів: «Сполом», 2012. – С. 45–49.
- 8 Журавчак Л.М. Порівняння методів граничних та приграничних елементів при знаходженні неусталеного тиску у пружному пористому замкненому пласті / Л.М.Журавчак, А.Є.Струк // Вісник НУ «Львівська політехніка». – Сер. «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», Львів, 2012. – № 732. – С. 198–206.

*Стаття надійшла до редакційної колегії  
23.01.13*

*Рекомендована до друку  
професором Федоришиним Д.Д.  
(ІФНТУНГ, м. Івано-Франківськ)  
професором Максимчуком В.Ю.  
(Інститут геофізики ім. С.І.Субботіна  
НАН України, Карпатське відділення, м. Львів)*