УДК 622.692.4

АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗРАХУНКУ РЕЖИМІВ РОБОТИ СИСТЕМ МАГІСТРАЛЬНИХ ГАЗОПРОВОДІВ

О. В. Тимків

ІФНТУНГ; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15, тел. (0342) 727139, e-mail: tymkiv_o_wat2007@yahoo.com

Розглядаються методи розрахунку режимів роботи систем магістральних газопроводів. У літературі практично відсутні поради щодо вибору методу розв'язання подібних задач. Як правило, автори різних праць розглядають окремо теплові та гідродинамічні задачі, а вивчення окремих задач суттєво допомагає при виборі чисельного методу розв'язання і його реалізації на ЕОМ.

При розрахунках неусталених неізотермічних режимів для задач в одномірній постановці ефективніше застосовувати метод сіток, причому перевагу надають неявним схемам. При розв'язуванні задач у двомірній постановці для газопроводів невеликої довжини зручно використовувати локально-одномірний метод і метод змінних напрямків; для газопроводів великої довжини, а також для розрахунків складних газотранспортних систем при двомірному описі течії газу доцільно використовувати метод «прямих». При розв'язуванні задач із непрямокутними межами, зокрема задачі теплообміну з ґрунтом, який має складну поверхню можливе застосування інтегрального методу; використання методу сіток ефективніше, якщо застосовується схема інтегрування за часовою змінною не нижче другого порядку. Найсучаснішим методом розв'язку систем диференційних рівнянь є метод кінцевих елементів і його подальше розроблення - метод суперелементів.

Ключові слова: теплові задачі, гідродинамічні задачі, метод сіток, локально-одномірний метод, метод змінних напрямків, метод прямих, інтегральний метод, метод суперелементів.

Рассматриваются методы расчета режимов работы систем магистральных газопроводов. В литературе практически отсутствуют советы по выбору метода решения подобных задач. Как правило, авторы различных работ тепловые и гидродинамические задачи рассматривают отдельно, а изучение отдельных задач существенно помогает при выборе численного метода решения и его реализации на ЭВМ .

При расчетах неустановившихся неизотермических режимов для задач в одномерной постановке эффективнее применять метод сеток, причем предпочтение дают неявные схемы. При решении задач в двухмерной постановке для газопроводов небольшой длины удобно использовать локально-одномерный метод и метод переменных направлений, для газопроводов большой протяженности, а также для расчета сложных газотранспортных систем при двухмерном описании течения газа целесообразно использовать метод «прямых». При решении задач с непрямоугольным пределами, в частности задачи теплообмена с грунтом, который имеет сложную поверхность возможно применение интегрального метода; использование метода сеток эффективнее, если применяется схема интегрирования по временной переменной не ниже второго порядка. Современным методом решения систем дифференциальных уравнений является метод конечных элементов и его дальнейшая разработка - метод суперэлементов.

Ключевые слова: тепловые задачи, гидродинамические задачи, метод сеток, локально-одномерный метод, метод переменных направлений, метод прямых, интегральный метод, метод суперэлементов.

In the literature there is almost no advice about choosing the method of solving such problems. Typically, the authors of various articles, thermal and hydrodynamic tasks consider separately, and the study of individual tasks are much easier when choosing a numerical method of solution and its realization on a computer.

When calculating nonsteady non-isothermal modes for one-dimensional formulation problems it is more efficiently to apply the method of nets, with preference given to implicit schemes. When solving two-dimensional formulation problems for short gas pipelines it is convenient to use local-and-one-dimensional method and method of variable directions; it is advisable to use the method of lines for long gas pipelines and for calculations of complex gas transportation systems when there is a two-dimensional description of the gas flow. When solving problems with nonrectangular boundaries and, in particular, when dealing with the problems of heat exchange with the ground, which has a complex surface, it is possible to utilize the integral method; the use of the method of nets is more efficient if the integration scheme in accordance with the time variables not less than the second order is used. The most modern method for solving differential equation systems is the finite element method and its further development – a method of superelements.

Key words: thermal problems, hydrodynamic problems, method of nets, local-and-one-dimensional method, method of variable directions, method of lines, integral method, method of superelements.

Для вирішення завдань керування магістральними газопроводами при застосуванні сучасних методів управління необхідно знати динамічні характеристики систем магістрального газопроводу. Для цього доцільно використовувати формалізацію технологічних процесів трубопровідного транспорту газу. Наявність математичної моделі трубопровідного транспорту газу дає змогу обрати параметри та структури управління, визначити критерії оптимальності та обмеження, з'ясувати точність, правильно вибрати технічний засіб управління та ін. Вихідну модель явищ і процесів в газотранспортних системах не завжди вдається отримати з високою точністю, що відповідає реальному явищу і процесу.

Мета і задачі досліджень. Метою роботи є вибір найбільш придатного методу розрахунку складної газотранспортної системи за різних режимів течії газу.

Досягнення цієї мети передбачає розв’язок наступних задач:

– аналіз існуючих методів розрахунку режимів простих газопроводів;

– аналіз існуючих методів розрахунку режимів складних газотранспортних систем;

– аналіз існуючих методів розрахунку режимів компресорних станцій магістральних газопроводів.

Об’єктом досліджень є реальна газотранспортна система західного регіону України.

Предметом досліджень є режими газотранспортних систем.

Методи дослідження. Оброблення результатів теоретичних досліджень виконувалось із використанням:

– статистичних методів оброблення інформації;

– методів групування;

– системного аналізування.

***Наукова новизна результатів досліджень*:** визначено методи розрахунку складних газотранспортних систем довільної конфігурації та різних режимів плину газу.

Вибір методу розрахунку неізотермічних неусталених режимів складних систем магістральних газопроводів залежить від багатьох факторів: геометрії, стаціонарності чи не стаціонарності течії, стисливості, точності розрахунку, числа необхідних вузлових значень, тощо. При оцінюванні того чи іншого методу необхідно враховувати його складність, гнучкість, пристосовуваність. Тому не можна виділити якийсь конкретний метод як оптимальний для всіх випадків [1].

Рівняння транспорту газу включає в себе змінні коефіцієнти при похідних, тому вказувати, до якого типу рівнянь відносяться розглядувані вирази, практично неможливо. Внаслідок цього постає проблема вибору універсального методу розрахунку вказаної системи диференційних рівнянь. Розрахунок режимів роботи магістральних газопроводів для оперативного керування потрібно провести за досить короткий час, з іншого боку, довжина ділянки, що розраховується, може досягати сотень кілометрів. Отже, вибраний метод має бути швидкодіючим за умови достатньої точності розв’язку.

Слід зазначити, що в літературі практично відсутні поради щодо вибору методу розв’язання подібних задач. Як правило, автори різних праць теплові та гідродинамічні задачі розглядають окремо [2, 3], а вивчення окремих задач суттєво допомагає при виборі чисельного методу розв'язання і його реалізації на ЕОМ. Різницеві методи розв'язання задач гідродинаміки розглянуто в [4, 5]. Цікавий огляд і досить повні відомості про найбільш часто використовувані в працях зарубіжних авторів методи розв'язання подано в [6].

Привертають увагу сучасні методи розв'язання задач [7, 8,9], які описуються диференційними рівняннями у часткових похідних. Найбільш поширений метод сіток внаслідок своєї універсальності та наявності добре розроблених теорій. Для його використання в області визначення шуканих функцій вводять сітку; всі похідні, які входять у рівняння та крайові умови, замінюються різницевими значеннями у вузлах сітки. Розв'язок отриманих при цьому алгебраїчних рівнянь дає наближені значення функції у вузлах сітки. Для більшості різницевих схем вузли сітки лежать на перетині деяких прямих ліній, проведених або у звичайній системі координат, або у спеціально підібраній за формою області визначення G шуканих функцій. Вибір виду сітки значною мірою залежить від форми області G. Для двомірних задач у прямокутній області найчастіше використовують прямокутну сітку, значно менше - трикутну та шестикутну [10]. Основні кінцево-різницеві формули для часткових похідних можуть бути одержані за допомогою розкладання у ряди Тейлора.

У праці [6] розглядаються кінцево-різницеві аналоги похідних разом з оцінкою помилки апроксимації.

Для похідної першого порядку:

різницева апроксимація вперед

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}\ , \tag{1}$$

з похибкою апроксимації порядку Δx;

різницева апроксимація назад

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\ , \tag{2}$$

з похибкою апроксимації порядку Δx;

центральна різницева апроксимація

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}\ , \tag{3}$$

з похибкою апроксимації порядку Δx^2, тобто з другим порядком точності.

Точніші результати має двостороння різницева похідна. Аналіз свідчить, що різницева похідна назад має достатню точність при простій структурі диференційних рівнянь, а різницева апроксимація вперед може спричинити значні коливання у процесі розв'язання, що призводить до нестійкості різницевої схеми.

Для другої похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ центрально-різницевий аналог можна подати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2}\ , \tag{4}$$

похибка апроксимації має порядок Δx^2.

Кінцево-різницеві вирази можна одержати також, використовуючи апроксимуючу аналітичну функцію 3 вільними параметрами, яка будується зі значеннями у вузлах сітки, а потім аналітично диференціюється. При цьому вигляд апроксимуючої функції повинен визначатися аналітичним розв'язком або на основі експериментальних даних. Найчастіше як апроксимуючі функції використовують поліноми, при цьому в ряді практичних задач не вище другого порядку.

Якщо припустити, що значення в точках i-1 та i+1задані, то можна провести параболічну апроксимацію

$$f\left(x\right)=a+b+cx^2 \ . \tag{5}$$

Приймаючи за початок координат x=0

$$\begin{gathered} f_{i-1}=a-b\Delta x+c\Delta x^2 \, , \ \ f_i=a \, , \\ f_{i+1}=b\Delta x+c\Delta x^2+a \ . \end{gathered} \tag{6}$$

Тоді:

$$c=\frac{f_{i+1}+f_{i-1}-2\,f_i}{2\Delta x^2}\,,\ b=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x}\,. \tag{7}$$

У точці i значення першої похідної:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i=\left[b+2cx\right]_{x=0}=b \ . \tag{8}$$

Значення другої похідної:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2c \ . \tag{9}$$

Варто відзначити, що виявлено деякі недоліки поліноміальних апроксимацій. Зі збільшенням порядку апроксимації підвищується чутливість до «шумів», тобто до більш або менш випадково розподілених малих помилок у даних, що може призвести до недостовірних результатів. Чутливість поліноміальних апроксимацій можна зменшити, якщо для полінома N-го порядку взяти дані в $3{\cdot}N$, $4{\cdot}N$ та інших точках. При цьому доцільно знаходити коефіцієнти не алгебраїчно, а методом найменших квадратів.

Слід відзначити, що залежно від способу апроксимації похідних одержані алгебраїчні рівняння можуть мати одне чи декілька невідомих значень функції на новому шарі. У першому випадку схеми називають явними, у другому - неявними.

Для явних схем невідомі значення шуканої функції можна виразити через відомі. Для неявних схем на кожному шарі одержуємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих значень функції. Найчастіше матриця цієї лінійної системи тридіагональна і розв'язок можна знайти алгебраїчною перегонкою.

Основною перевагою явних систем є простота розв'язку апроксимуючих рівнянь. Явні схеми економічні, оскільки для переходу до нового шару потрібно виконати арифметичні дії у кількості, пропорційній до першого степеня числа невідомих. У цьому розумінні явна схема не поліпшується. Суттєвим недоліком явних схем є: по-перше, динамічна нестійкість, пов'язана з обмеженням на величину кроку за часом; по-друге, статична нестійкість, зумовлена для рівняння теплообміну за величиною температуропровідності. Приклад простої явної двохшарової за часом схеми з використанням триточкової апроксимації другої похідної і центрально-різницевої апроксимації конвективних членів для розв'язку рівняння переносу вихору розглянуто у [11]. Вказані недоліки явних різницевих схем призвели до необхідності використання для розв'язку систем диференційних рівнянь неявних схем. У [12] зазначається, що при чисельному вивченні складних задач, особливо на початковій стадії роботи, коли невідомий характер поведінки розв'язку, доцільніше використовувати явні схеми. У подальшому ж слід віддавати перевагу більш, ефективним схемам, зокрема неявним.

У [8] розглянуто числові розв'язки задачі нестаціонарної теплопровідності кінцево-різницевими методами. При цьому використані: явна кінцево-різницева апроксимація з введенням додаткових вузлів на відстані 0,5 кроку від границі (сітка Шмідта); неявна кінцево-різницева апроксимація за шеститочковою схемою (схема Кранка-Ніколсона); неявна кінцево-різницева апроксимація за чотириточковою схемою.

Аналіз розв'язків із використанням вказаних видів сіток свідчить, що явні різницеві схеми для розв'язку крайових задач більш ефективні, ніж неявні, оскільки, по-перше, дають змогу збільшувати часовий крок (особливо у випадку Кранка-Ніколсона), по-друге, використовувати нерівномірну розбивку області, за допомогою якої можна точніше апроксимувати границі області та точніше враховувати граничні умови. Для розв'язання двомірних задач теплопровідності розглянуто методи розщеплення, коли складну задачу математичної фізики можна звести до послідовного розв'язання більш простих задач. Зокрема, рекомендують два наближених методи: локально-одномірний (ЛОМ) [9] та метод змінних напрямків (МЗН) [13, 14], в тій чи іншій мірі строго розроблені поки що тільки для розв'язку двомірних задач.

При використанні цих методів можна послідовно, в два етапи, одержувати у системі алгебраїчних рівнянь тридіагональні матриці, що дає змогу застосовувати метод перегонки, а отже, скорочує об'єм оперативної пам'яті та необхідний час обчислень.

Аналізуючи чутливість розв'язків, рекомендувати для тих розрахунків, які не вимагають високої точності, схему ЛОМ, а при розрахунках з високим ступенем точності використовувати схему МЗН, яка дає розв'язки, близькі до істинних, особливо при досягненні усталеного стану.

Метод змінних напрямків за останні роки широко застосовується в задачах гідродинаміки та теплообміну. Це пояснюється тим, що МЗН простий і єдиний для кожного рівняння початкової системи, він застосовується для розв'язання як стаціонарних, так і нестаціонарних задач. Різницева схема, що використовується, об'єднує (стосовно кожного окремо взятого рівняння системи) переваги явної та неявної схем, тобто є економічною і, безумовно, стійкою. Метод не має обмежень, пов'язаних із типом апроксимації конвективних членів, що особливо важливо у зв'язку з відсутністю аналізу схемної в'язкості для двомірного випадку. Водночас практично всі розрахунки важливих багатомірних задач про течії стисливої рідини, опубліковані до цього часу, проводились за допомогою багатокрокових явних схем. Перевага явних схем під час розв'язання задач стискуваного середовища викликана суттєвою залежністю коефіцієнтів від шуканих функцій, тому при виборі їх значень із попереднього часового кроку виникають значні помилки в обчисленнях.

Досліджуючи роботи різних авторів [6], бачимо, що більшість неявних схем, безумовно стійких при застосуванні до диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами, не може бути такою ж і при застосуванні до системи рівнянь, які описують течію стисливої рідини. Тепер нелінійні задачі течії газів більш успішно розв'язуються за допомогою явних схем [6], хоча в майбутньому неявні схеми розрахунку течій стискуваного середовища можуть набути важливого значення. У зв'язку з цим постає питання про застосування в задачах транспортування природного газу інших методів, таких як: метод «прямих», метод характеристик, метод контрольного об'єму, інтегральний метод та ін. Метод «прямих» є одним із багатокрокових за часом методів з явною схемою по просторових змінних. У цьому методі сітка вводиться тільки для частини змінних, які розглядаються як дискретні, а одна змінна, переважно час τ, залишається безперервною. При цьому рівняння у частинних похідних апроксимується диференційно-різницевими аналогами, які становлять систему значного числа звичайних диференційних рівнянь [15]. Для розв'язку такої системи рівнянь звичайно використовують метод Рунге-Кутта з автоматичним вибором кроку [16]. Перевагами цього методу є швидкодія, точність і широка реалізація на ЕОМ. Розходження спостерігаються тільки при побудові схем. Найчастіше застосовується схема четвертого порядку точності, яка утворює сім'ю чотиричленних схем [9]. Зокрема, у стандартних програмах на ЕОМ реалізована схема:

$$y_{n+1}=y_n+h/6(k_1+2k^2+2k_3+k_4)\ ;$$
$$k=f(x_n,y_n),$$
$$k_2=f(x_n+h/2,\ y_n+h/2*k_1), \qquad (10)$$
$$k_3=f(x_n+h/2,\ y_n=h/2*k_2),$$
$$k_4=f(x_n+h,\ y_n+h*k_3),$$

де y_n, y_{n+1} – розв'язки на n та n+1 kроці;
x_n – незалежна змінна на h кроці;
f – права частина рівняння виду $\frac{\partial y}{\partial x}=f\left(x,y\right)$.

У [13] наведена друга варіація методу Рунге-Кутта четвертого порядку:

$$y_{n+1}=y_n+(0{,}174750k_1\text{-}0{,}551481k_2+ +1{,}205535k_3+0{,}171185k_4), \qquad (11)$$

де $k_1=f*h(x_n,y_n)$, $k_2=h*f(x_n+0{,}4h,\ y_n+0{,}4k_1)$,
$k_3=h*f(x_n+0{,}45573h,\ y_n+0{,}296978k_1+0{,}158760k_2)$,
$k_4=h*f(x_n+h,\ y_n+0{,}218100k_1–3{,}050965k_2+ +3{,}832864k_3)$.

Ця схема має найнижчу похибку для даної сім'ї схем Рунге- Кутта.

Метод «прямих» дає змогу ефективно розв'язувати різноманітні задачі, які виникають при моделюванні динамічних властивостей трубопровідних систем. Недоліком цього методу є те, що при розрахунку ділянки в магістральних газопроводах довжиною в декілька сотень кілометрів доводиться розв'язувати систему диференційних рівнянь великої розмірності. Крім того, у процесі зведення початкових рівнянь до звичайних диференційних опираються на неперервність початкових функцій та їх похідних по всій області інтегрування. Тому метод прямих не слід використовувати при ступінчастих збуреннях [17].

Метод характеристик – метод, суть якого зводиться до відшукання таких напрямків, де часткове диференційне рівняння може бути спрощене до звичайного диференційного рівняння [18]. Цей метод незручний при розрахунках складних схем, що описуються нелінійними диференційними рівняннями. Крім того, різкі зміни параметрів системи (наприклад, перепад тиску в магістральному газопроводі) призводять до неможливості розв'язання методом характеристик [6].

Інтегральний метод дає можливість досягти повного розкладання результативного показника за факторами і носить універсальний характер – застосовується для вимірювання впливу факторів у мультиплікативних, кратних і змішаних моделях. Використання цього способу дає змогу отримати більш точні результати в порівнянні з іншими вище названими способами, оскільки додатковий приріст результативного показника від взаємодії факторів приєднується чи не до останнього фактору, а ділиться порівну між ними [18]. Для розподілу додаткового приросту недостатньо взяти його частки, що відповідають кількості факторів, так як фактори можуть діяти в різних напрямках. Тому зміна результативного показника вимірюється на нескінченно малих відрізках часу, тобто проводиться підсумовування прирощення результату, що визначається як часткові похідні, помножені на приріст факторів на нескінченно малих проміжках. Операція обчислення означеного інтеграла вирішується за допомогою ЕОМ і зводиться до побудови підінтегральних виразів, які залежать від виду функції або моделі факторної системи. У зв'язку зі складністю обчислення деяких певних інтегралів і додаткових складнощів, пов'язаних з можливою дією факторів у протилежних напрямках, на практиці використовуються спеціально сформовані робочі формули, що наводяться в спеціальній літературі. Таким чином, використання інтегрального методу не потребує знання всього процесу інтегрування. Достатньо лише в робочі формули підставити необхідні числові дані і зробити підрахунки. При цьому досягається більш висока точність розрахунків. Інтегральний метод добре проявляє себе при непрямокутних межах. Крім того, перевага цього методу полягає у консервативності його схем, тобто він забезпечує виконання певних інтегральних законів збереження, справедливих для початкових диференційних рівнянь. Слід зазначити, що за допомогою кінцево-різницевого методу можна також одержати консервативні схеми, але консервативність не обов'язково підвищує точність схем. Наприклад, для диференційних рівнянь зі змінними коефіцієнтами неконсервативний метод може призвести до більш точних результатів, ніж консервативний.

Метод контрольного об'єму [19] ґрунтується на мікроскопічних фізичних законах, а не на використанні математичного апарата неперервних функцій. Особливо важливим це виявляється у тих випадках, коли диференційні рівняння не мають всюди неперервних розв'язків, які можна було б у кожній точці подати у вигляді рядів Тейлора. Однак у розглядуваній задачі не існує розв'язків із розривами, тому використання методу контрольного об'єму не дає помітних переваг порівняно, наприклад, із кінцево-різницевим методом.

Методи контрольного об'єму та інтегральний близькі до кінцево-різницевого методу, зокрема вони можуть призвести до однакових різницевих виразів похідних.

У ряді практичних випадків доцільно використовувати метод Монте-Карло. Для розв'язку задач такого типу використовують закони великих чисел.

Оцінки $f_1, f_2, \ldots f_n$ шуканої величини f отримують на основі статичної обробки матеріалу, пов'язаного з результатами деяких багатократних випадкових випробувань. При цьому вимагається, щоб випадкова величина f_n при $n \to \infty$ по ймовірності сходилась до шуканої величини f, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ повинно мати місце граничне співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty}\left(P\left|f-f_n\right|<\varepsilon\right)=1,$$

де P – ймовірність.

Шукана величина f трактується як математичне сподівання деякої випадкової величини.

У [6] виділено три основні підходи з використання методів Монте-Карло для розв'язку крайових задач:

1) дискретизація задачі з подальшим розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

2) подання розв'язку у вигляді континуального інтеграла і його обчислення;

3) зведення початкової диференційної задачі до спеціального та інтегрального рівнянь і розв'язання цього рівняння.

Перший підхід найбільш універсальний і зводиться до простих чисельних алгоритмів, які, однак, у ряді випадків виявляються більш трудомісткими, ніж алгоритми, що базуються на інших підходах або детермінованих методах. Зокрема, ймовірнісні методів розв'язку систем алгебраїчних рівнянь, що викладені у працях [20, 21, 22], свідчать, що їх застосування не має переваги порівняно з детермінованими методами, коли основна матриця розряджена. Таку матрицю одержують при кінцево-різницевій апроксимації розглянутих нами диференційних рівнянь. Аналогічні висновки зроблено у [23], де аналізуються основні методи розв'язку систем диференційних рівнянь у часткових похідних, пов'язані з їх кінцево-різницевою апроксимацією. При цьому автори зазначають, що для деяких крайових задач, наприклад задачі Діріхле, метод дає значну перевагу, якщо необхідно знайти розв'язок в деяких точках.

Отже, перший підхід до побудови методів Монте-Карло, пов'язаний з кінево-різницевими апроксимаціями, менш перспективний, ніж другий і третій, і в задачі, яка розглядається, не дає помітної переваги порівняно з детермінованими алгоритмами. Застосування інших статистичних підходів також ускладнене через відсутність добре розроблених теорій і алгоритмів, крім того, програмування цих методів пов'язане з алгоритмічними труднощами. Причому оцінити переваги методу можна тільки після закінчення розробки програми.

Найсучаснішим методом розв'язку систем диференційних рівнянь є метод кінцевих елементів (МКЕ) [24] і його подальша розробка - метод суперелементів (МСЕ) [25]. Метод кінцевих елементів є сітковим методом, призначеним для вирішення завдань мікрорівня, для якого модель об'єкта задається системою диференціальних рівнянь в часткових похідних із заданими крайовими умовами. Метод кінцевих елементів успішно застосовується в найрізноманітніших завданнях. Він був створений для вирішення складних рівнянь теорії пружності і будівельної механіки і виявився набагато ефективнішим за метод кінцевих різниць. Зараз активно розробляються й інші застосування методу кінцевих елементів. Цей метод незамінний, якщо потрібно враховувати геометричні особливості областей - тоді ЕОМ використовується не тільки для вирішення системи рівнянь, але, в першу чергу, для формулювання і побудови дискретних апроксимацій. З математичної точки зору метод являє собою узагальнення методу Релея - Рітца - Гальоркіна. Тому він застосовний до широкого класу рівнянь в часткових похідних. У методі Рітца, однак, не розв'язується безпосередньо диференціальне рівняння; замість цього вихідна задача представляється в еквівалентному варіаційному формулюванні, а потім шукається наближене рішення останнього у вигляді комбінації заданих пробних функцій. При цьому вагові коефіцієнти обчислюються з варіаційного принципу, відповідного завданню. Це і є та система дискретних рівнянь, яка вирішується за допомогою ЕОМ. Ця ідея вважається досить давньою. Новим є лише вибір пробних функцій: у методі кінцевих елементів вони кусково-поліноміальні. Саме цим вибором визначається успіх методу. Кожна функція дорівнює нулю на більшій частині області і відмінна від нуля тільки в околиці одного вузла. У цій околиці функція складена з поліномів невеликого степеня, і всі обчислення стають максимально простими. Цікаво, що переваги кусково-поліноміальних функцій одночасно і абсолютно незалежно були помічені в математичній теорії апроксимації. Ідея їх застосування виявилася дуже плідною, і вона з'явилася саме в потрібний час. Як і в методі кінцевих різниць, при використанні МКЕ для розв'язку крайової задачі, яка описується диференційними рівняннями, пошук невідомої функції *U* замінюють знаходженням її значень у кінцевому числі так званих вузлових точок. На цих вузлових точках будується сітка дискретизації області визначення функції як сукупність кінцевого числа підобластей, що не перетинаються, і пов'язаних між собою тільки у вузлових точках. У кожній такій підобласті шукана функція локально апроксимується неперервними функціями, які однозначно визначають її значення у будь-якій точці підобласті через вузлові параметри, а також задовольняють критерії сходження послідовності наближених розв'язків до точного при зменшенні розмірів підобласті. При цьому локальна апроксимація на підобластях дає змогу розглядати останні незалежно один від одного. Такі підобласті з побудовою апроксимації шуканої функції через її вузлові параметри називають кінцевими елементами [24].

Далі на основі варіаційних принципів із використанням побудованих апроксимуючих функцій у кожній з підобластей знаходиться вид підінтегрального виразу у функціоналі $e(u)$, який відповідає характеру задачі, що розглядається. З умови стаціонарності функціоналу $e(u)$ $\delta\, e(u) = 0$ одержимо систему рівнянь для визначення вузлових параметрів дискретної моделі шуканої функції. Розв'язок цієї системи алгебраїчних рівнянь дає значення u у вузлах області її визначення.

У [26] МКЕ розв'язана задача теплообміну в тепловиділяючому елементі (ТВЕЛ) ядерного реактора. Для розрахунку використовувалось нелінійне рівняння теплопровідності. Для розв'язання задачі застосовувався метод колокацій. У вигляді апроксимуючих функцій, були відрізки поліномів Ерміта, а у вигляді точок колокацій - точки квадратур Гаусса. Розроблений авторами метод дав змогу скоротити кількість арифметичних операцій на кожному часовому кроці порівняно з методом Бубнова-Галеркіна, що уможливило застосування багатоступінчастої різницевої схеми для часової змінної. Порівняння одержаних результатів із результатами методу кінцевих різниць свідчить про те, що завдяки високій точності цього методу можна забезпечити бажану точність результатів при використанні тільки декількох рівнянь.

До переваг МКЕ слід віднести виняткову індиферентність відносно геометрії області, що розглядається, крайових умов задачі, законів зміни властивостей середовища та зовнішніх впливів на область [23] . Крім того, МКЕ наділений простою фізичною інтерпретацією основних його обчислювальних операцій.

До загальних недоліків цього методу слід віднести необхідність обробки великих об'ємів інформації, що часто дуже складно навіть при використанні найдосконаліших ЕОМ, а також значну затрату праці при підготовці початкових даних для реалізації МКЕ [25] Крім того, МКЕ широко застосовується для рівнянь параболічного типу, які розв'язують задачі механічно деформованих середовищ, а для рівнянь гіперболічного типу одержання підінтегрального виразу в мінімізуючому функціоналі та побудова системи алгебраїчних рівнянь доволі складна задача. Досить важко при використанні МКЕ знайти розбиття області визначення шуканої функції на кінцеві елементи, оскільки алгоритмів розбиття, а тим більше машинних програм, явно недостатньо [27, 28, 29].

На відміну від методів, що опираються на кінцево-різницеві схеми низького порядку, методи кінцевих елементів можуть забезпечити високий рівень точності, а отже, і зменшити розміри системи рівнянь, які підлягають розв'язанню. Тому вимоги до обробки даних виявляються менш жорсткими, і з метою підвищення величини кроку за часом можна скористатися багатоступінчастими різницевими схемами за часовою змінною. Водночас при розв'язанні нелінійних задач за допомогою цих методів доводиться на кожному кроці за часом обчислювати інтеграли, і в результаті цього об'єм арифметичних операцій на кожному кроці виявляється значно більшим, ніж при використанні кінцево-різницевих схем низького порядку. Отже, незважаючи на більшу точність, ці процедури високого порядку, пов'язані зі застосуванням МКЕ для розв'язку нелінійних задач гідравліки та теплообміну, не дають суттєвих переваг у часі порівняно з методами кінцевих різниць при заданій точності розрахунків.

Зіставлення розглянутих методів дає змогу зробити такі висновки:

– при розрахунках неусталених неізотермічних режимів для задач в одномірній постановці ефективніше застосовувати метод сіток, причому перевагу надають неявним схемам;

– при розв'язуванні задач у двомірній постановці для газопроводів невеликої довжини зручно використовувати схеми ЛОМ і МЗН;

– для газопроводів великої довжини, а також для розрахунків складних газотранспортних систем при двомірному описі течії газу доцільно використовувати метод «прямих»;

– при розв'язуванні задач із непрямокутними межами (зокрема задачі теплообміну з ґрунтом, який має складну поверхню) можливе застосування інтегрального методу;

– використання методу сіток є ефективнішим, якщо застосовується схема інтегрування за часовою змінною не нижче другого порядку.

Література

1 Режими газотранспортних систем / Є.І.Яковлєв, О.С.Казак, В.Б.Михалків, Д.Ф.Тимків. – Львів: Світ, 1992. – 170 с.

2 Евдокимов А. Г. Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях / А. Г. Евдокимов. – Харків: Вища школа, Издательство при ХГУ, 1980. – 144 с.

3 Бобровский С.А. Движение газа в газопроводах с путевым отбором / С.А.Бобровский, С. Г. Щербаков, М.А. Гусейн-Заде. – М.: Наука, 1972. – 193 с.: ил., табл. – 191.

4 Рраиловская И.Ю. Разностные методы решения уравнений Навье-Стокса / И. Ю. Рраиловская, Т. В. Кускова, Л. А. Чудов. – В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. XI. – М.: Изд-во МГУ, 1968. – С. 3-18.

5 Люлькаю В. А. Численное решение уравнений Навье-Стокса / В.А. Люлькаю, В.В. Шенников // Сб. теорет. работ по гидромеханике. – М., 1970. – С. 107-149.

6 Роуч П. Вычислительная гидродинамика / Пер.с англ. Гущин В.А., Митницкий В.Я. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

7 Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н. Б. Варгафтик. – М., 1972. – 720 с., ил.

8 Переверзев Д. А. Задачи теплового состояния базовых и маневренных турбоагрегатов / Д. А. Переверзев. – К.: Наук. думка 1980. – 216 с.

9 Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие / Калиткин Н.Н.; под ред. А.А. Самарского – М.: Наука, 1978. – 512 с.: рис., табл.

10 Идентификация моделей гидравлики / Бабе Г. Д., Бондарев Э. А., Воеводин Л. Ф. – Изд-во Наука, Сибирское от-ние, 1980. – 159 с.

11 Симуни Л. М. Конечно-разностное решение уравнений Навье-Стокса / Л. М. Симуни // Тепло- и массоперенос. – 1972. – Т. 1, Ч. 2. – С. 344-350.

12 Ковеня В. М. Метод расщепления в задачах газовой динамики / В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1981. – 304 с.

13 Самарский А.А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

14 J. Douglas, T. Dupont. (1970, v. 7). Galerkin methods for parabolic problems. SIAM J. Numer. Anal. , 576 — 626.

15 Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности / Л.А. Коздоба. – М.: Наука, 1975. – 228 с.: ил., табл. - 193-223.

16 Деккер К. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К.Деккер, Я.Вервер; пер.с англ. Захаров А.Ю., Кульчицкая И.А. – М.: Мир, 1988. – 334 с.

17 Вержбицкий В.М. Численные методы. (линейная алгебра и нелинейные уравнения)./ В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2000. – 266 с.

18 Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник / Я.С.Бугров, С.М.Никольский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1985. – 464 с.

19 Волков К.Н., Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газе на неструктурированных сетках// Статья в журнале Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2005. – Т.6., № 1. – С. 43-60.

20 Трубопроводный транспорт нефти и газа: учебник / Р.А.Алиев, В.Д.Белоусов, А.Г.Немудров, В.А.Юфин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1988. – 368 с.

21 Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко. – М.: Наука, 1968. – 355 с.

22 Соболь И.М. Метод Монте-Карло. - 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 64с.: ил. – (Популярные лекции по математике; Вып. 46)

23 Гладкий В. С. Вероятностные вычислительные модели / В.С. Гладкий. – М.: Наука, 1973. – 298 с.

24 Трубопроводный транспорт газа / Бобровский С.А., Щербаков С.Г., Яковлев Е.И., Гарляускас А.И., Грачев В.В. – М.: Наука, 1976, – 496 с., с ил.

25 Галлагер Р**.** Метод конечных элементов**.** Основы: Пер. с англ. Р**.** Галлагер – М.: Мир, 1984. – 428 с., ил.

26 Нори Д. Введение в метод конечних элементов: Пер. с англ./ Д Нори, де Фриз Ж. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

27 Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А. – Л.: Судостроение, 1979. – 288 с.

28 ANSYS. User's Guide. - ANSYS, Inc. (Canonsburg, PA), 2000. http://www.ansys.com/services/documentation/manuals.html

29 Метод конечных элементов в задачах газонефтепромысловой механики / В.Н.Аликин, И.Е.Литвин, С.М.Щербаков, В.П.Бородавкин. – М.: Недра, 1992. – 288 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 28.01.14

Рекомендована до друку
*професором **Грудзом В.Я.***
(ІФНТУНГ, м. Івано-Франківськ)
*д-ром техн. наук **Банахевичем Ю.В.***
(відділ експлуатації магістральних газопроводів і газорозподільних станцій ПАТ «Укртрансгаз», м. Київ)